Autoreferat

Hanna Wojewódka-Ściążko

28 września 2023

Spis treści

1 Imię i nazwisko

Hanna Wojewódka-Ściążko

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

2015

doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki
(rozprawa doktorska obroniona z wyróżnieniem)

- stopień nadano uchwałą Rady Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego, na podstawie rozprawy doktorskiej pt. *Ergodyczne własności pewnych stochastycznych układów dynamicznych*, przygotowanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Tomasza Jakuba Szarka;

2011

magister matematyki

- tytuł nadano na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego, na podstawie pracy pt. *Modele matematyki finansowej o dynamicznej strukturze czasowej*, przygotowanej pod kierunkiem dr. hab. Henryka Leszczyńskiego, prof. UG.

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

od 2016

adiunkt w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach

(100% etatu)

(1.10.2021-30.06.2023 – urlop bezpłatny, 2.06.2020-31.05.2021 – urlopy: macierzyński i rodzicielski, 2.03-1.06.2020 – niezdolność do pracy);

2019-2023

adiunkt w Instytucie Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk w Gliwicach

(1.12.2019-30.09.2021 – 50% etatu, 1.10.2021-30.06.2023 – 100% etatu,
1.07-31.10.2023 – 50% etatu),

(2.06.2020-31.05.2021 – urlopy: macierzyński i rodzicielski, 2.03-1.06.2020 – niezdolność do pracy);

2015-2016

wykładowca na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej

(25% etatu);

2015-2016

adiunkt w Instytucie Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki Uniwersytetu Gdańskiego, delegowana do pracy w Krajowym Centrum Informatyki Kwantowej w Gdańsku (1.10-16.12.2015 – 50% etatu, 17.12.2015-30.09.2016 – 75% etatu);

2013-2015

asystent w Instytucie Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki Uniwersytetu Gdańskiego, delegowana do pracy w Krajowym Centrum Informatyki Kwantowej w Gdańsku (50% etatu).

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.), a także innych wyników habilitantki związanych z nimi tematycznie

Tytuł osiągnięcia naukowego

Opis ergodyczny pewnych klas niestacjonarnych procesów Markowa o wartościach w przestrzeniach polskich

4.1 Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe

[H1] R. Kukulski, H. Wojewódka-Ściążko, *The e-property of asymptotically stable Markov--Feller operators*, Colloq. Math. **165** (2021), 269–283, DOI 10.4064/cm8165-6-2020.

[H2] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *Ergodic properties of some piecewise deterministic Markov process with application to gene expression modelling*, Stoch. Proc. Appl. **130** (2020), no. 5, 2851–2885, DOI 10.1016/j.spa.2019.08.006.

[H3] D. Czapla, S.C. Hille, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *Continuous dependence of an invariant measure on the jump rate of a piecewise-deterministic Markov process*, Math. Biosci. Eng. **17** (2020), no. 2, 1059–1073, DOI 10.3934/mbe.2020056.

[H4] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *A useful version of the central limit theorem for a general class of Markov chains*, J. Math. Anal. Appl. **484** (2020), no. 1, 123725, DOI 10.1016/j.jmaa.2019.123725.

[H5] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *The Strassen invariance principle for certain non-stationary Markov-Feller chains*, Asymptot. Anal. **121** (2021), no. 1, 1–34, DOI 10.3233/ASY-191592.

[H6] K. Czudek, T. Szarek, H. Wojewódka-Ściążko, *The law of the iterated logarithm for random interval homeomorphisms*, Isr. J. Math. **246** (2021), 47–53, DOI 10.1007/s11856-021-2235-9.

4.2 Pozostałe artykuły habilitantki, które nawiązują tematycznie do osiągnięcia naukowego

Najnowszy wynik (praca w recenzji)

[N1] R. Kukulski, H. Wojewódka-Ściążko, *The e-property of asymptotically stable Markov semigroups*, w recenzji w Results Math., arXiv:2211.16424 [math.PR] (2022), DOI 10.48550/arXiv.2211.16424.

Prace opisujące własności ergodyczne procesów Markowa o wartościach w przestrzeniach polskich

[E1] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *The central limit theorem for Markov processes that are exponentially ergodic in the bounded-Lipschitz norm*, Qual. Theory Dyn. Syst. **23** (2023), no. 7, DOI 10.1007/s12346-023-00862-4.

[E2] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *Exponential ergodicity in the bounded--Lipschitz distance for some piecewise-deterministic Markov processes with random switching between flows*, Nonlinear Anal. **213** (2022), no. 112678, DOI 10.1016/j.na.2021.112678.

[E3] D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *On absolute continuity of invariant measures associated with a piecewise-deterministic Markov process with random switching between flows*, Nonlinear Anal. **13** (2021), no. 112522, DOI 10.1016/j.na.2021.112522.

[E4] D. Czapla, S.C. Hille, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko, *The law of the iterated logarithm for a piecewise deterministic Markov process assured by the properties of the Markov chain given by its post-jump locations*, Stoch. Anal. Appl. **39** (2021), no. 2, 357–379, DOI 10.1080/07362994.2020.1798252.

Wyniki dotyczące własności ergodycznych pewnych markowowskich układów dynamicznych, obejmujących m.in. prosty model podziału komórki
(prace powstałe w czasie studiów doktoranckich)

[D1] S.C. Hille, K. Horbacz, T. Szarek, H. Wojewódka, *Law of the iterated logarithm for some Markov operators*, Asymptot. Anal. **97** (2016), no. 1-2, 91-112, DOI 10.3233/ASY-151344.

[D2] S.C. Hille, K. Horbacz, T. Szarek, H. Wojewódka, *Limit theorems for some Markov chains*, J. Math. Anal. Appl. **443** (2016), no. 1, 385-408, DOI 10.1016/j.jmaa.2016.05.022.

[D3] H. Wojewódka, *Exponential rate of convergence for some Markov operators*, Statist. Probab. Lett. **83** (2013), no. 10, 2337-2347, DOI 10.1016/j.spl.2013.05.035.

4.3 Omówienie osiągnięcia naukowego

4.3.1 Wstęp

***Operatory Markowa* działające na miarach, a także rodziny tych operatorów, tworzące półgrupy (tzw. *półgrupy Markowa*), w naturalny sposób wywodzą się od *procesów Markowa* (odpowiednio: z czasem dyskretnym i ciągłym). Dzięki nim możemy opisywać dynamikę rozkładów tychże procesów.**

Markowowskie układy dynamiczne, opisywane zarówno za pomocą procesów dyskretnych (łańcuchów Markowa), jak i procesów z czasem ciągłym, w szczególności *procesów Markowa kawałkami deterministycznych* (PDMPs, od ang. *piecewise deterministic Markov processes*), znajdują liczne zastosowania – m.in. w teorii iterowanych układów funkcyjnych (IFSs, od ang. *iterated function systems*) i fraktali (zob. np. [BD85, BDEG88, Las95, LM98, DF99, KS20]), w teorii równań różniczkowych cząstkowych (zob. chociażby [Hai02, LS06, HM08, KPS10, Sza13], a także prace nawiązujące do modeli pasywnych znaczników [SSU10, KPS13, KS14]), jak również w modelowaniu przechowywania [BKKP05] i ruchu internetowego [GR09], a także w biologii – jako stochastyczne modele opisujące dynamikę biologii molekularnej, w tym: ekspresję i autoregulację genu [HHS16, MTKY13, CDMR12], podział komórki [LM99], dynamikę membran pobudliwych [RTW12] czy dynamikę populacji [AHVG15, BL16, RTK17].

Moje zainteresowania badawcze koncentrują się wokół pewnych *własności ergodycznych* markowowskich układów dynamicznych (w tym: istnienia i jednoznaczności niezmienniczych miar probabilistycznych, równociągłości i asymptotycznej stabilności tych procesów, a także twierdzeń granicznych i innych własności). Przyczyniłam się do rozwoju tej teorii, szczególnie w kontekście rozważania ogólnych przestrzeni metrycznych stanów, a konkretnie - *polskich* (a więc zupełnych i ośrodkowych) przestrzeni metrycznych stanów, które niekoniecznie muszą być lokalnie zwarte. Warto zaznaczyć, że uzyskane przeze mnie wyniki mogą być użyteczne w analizie zachowania asymptotycznego układów nieskończenie wymiarowych.

Przejście od przestrzeni (lokalnie) zwartych do przestrzeni polskich nie jest prostym uogólnieniem (zauważmy, że kula w takich przestrzeniach nie musi być zwarta). Jak podkreślają wybitni matematycy, tacy jak M. Hairer [Hai02, HM08, CH15] czy A. Lasota [Las95], stanowi to znaczący postęp jakościowy. W **przestrzeniach polskich większość metod opracowanych dla przestrzeni lokalnie zwartych i σ-zwartych staje się niemożliwa do zastosowania – co sprawia, że konieczne jest opracowanie nowych koncepcji.**

Dodatkowo tego rodzaju badania są silnie motywowane przez konkretne implementacje – zob. np. [HHS16], gdzie przedstawiono przykład z biologii molekularnej, wskazujący na znaczenie rozważania przestrzeni nie-lokalnie zwartych jako przestrzeni stanów w ujęciu abstrakcyjnym; [EHM15], gdzie wykazano istnienie łagodnych rozwiązań (ang. *mild solutions*) problemu ewolucji masy, przyjmujących wartości w przestrzeni miar i z warunkami brzegowymi dotyczącymi przepływu (ang. *flux boundary conditions*); lub [Pic19], gdzie omawiane są równania różniczkowe miarowe (ang. *measure differential equations*).

Poniżej przedstawiamy zwięzłe podsumowanie wyników z serii prac zatytułowanej *Opis ergodyczny pewnych klas niestacjonarnych procesów Markowa o wartościach w przestrzeniach polskich.*

[H1] W artykule badamy zależności pomiędzy *asymptotyczną stabilnością* a *e-własnością* operatorów Markowa działających na miarach określonych na ogólnych (tj. polskich) przestrzeniach metrycznych. Chociaż zwykle skupia się uwagę na asymptotycznej stabilności (a e-własność przez lata była weryfikowana tylko w celu jej potwierdzenia), podkreślmy, że sama e-własność ma również znaczenie, między innymi dlatego, że dopiero ona zapewnia, że błędy numeryczne w symulacjach są zaniedbywalne. W artykule dowodzimy, że każdy operator Markowa-Fellera asymptotycznie stabilny ma e-własność wszędzie poza zbiorem pierwszej kategorii. Przedstawiamy również przykład, który pokazuje, że ten wynik jest ścisły. Ponadto proponujemy równoważne kryterium dla e-własności.

[H2] Badamy PDMP Ψ z polską przestrzenią stanów, którego deterministyczne zachowanie pomiędzy losowymi skokami jest regulowane przez skończoną liczbę półpotoków, a każdy stan zaraz po skoku jest osiągany w wyniku działania losowo wybranej transformacji ciągłej. Przyjmujemy, że skoki pojawiają się w losowych momentach, które pokrywają się z czasami skoków procesu Poissona o intensywności λ. Podajemy warunki zapewniające pewną formę *geometrycznej ergodyczności*, a także *mocne prawo wielkich liczb* (SLLN, od ang. *strong law of large numbers*) dla łańcucha Markowa Φ określającego lokalizacje tego układu tuż po skokach. Ponadto dowodzimy *jednoznacznej odpowiedniości między zbiorami niezmienniczych miar probabilistycznych* łańcucha Φ i PDMP Ψ. Te wyniki pozwalają nam wyprowadzić SLLN dla interesującego nas PDMP. Badany układ dynamiczny jest inspirowany pewnymi modelami ekspresji i autoregulacji genów.

[H3] Badamy PDMP Ψ wprowadzony w [H2] (aczkolwiek z tylko jednym półpotokiem, określającym zachowanie układu pomiędzy losowymi skokami). Celem artykułu jest udowodnienie *ciągłej zależności jedynej niezmienniczej miary probabilistycznej tego procesu od wskaźnika intensywności skoków* λ. Podczas gdy twierdzenia graniczne dostarczają teoretycznych podstaw do odpowiedniej aproksymacji miar niezmienniczych, uzyskany wynik potwierdza stabilność tej procedury – przynajmniej lokalnie w przestrzeni parametrów. Co więcej, potwierdza odpowiedniość tego modelu jako narzędzia do analizy dynamiki ekspresji genów u prokariotów.

[H4] W artykule proponujemy pewne warunki, stosunkowo łatwe do zweryfikowania, które zapewniają *centralne twierdzenie graniczne* (CLT, od ang. *central limit theorem*) dla ogólnej klasy niestacjonarnych łańcuchów Markowa-Fellera (o wartościach w polskich przestrzeniach metrycznych). Tę klasę można krótko scharakteryzować za pomocą dwóch właściwości: po pierwsze – operator przejścia rozważanego łańcucha spełnia (nieliniowy) warunek typu Lapunowa, a po drugie – istnieje odpowiednie sprzężenie markowowskie (ang. *Markovian coupling*), którego funkcję prawdopodobieństwa przejścia można rozbić na dwie części, z których jedna jest zwężająca i – w pewnym sensie – dominująca nad drugą. Podane warunki gwarantują zarówno *geometryczną ergodyczność (w metryce Forteta-Mouriera)*, jak i CLT. Aby uzasadnić przydatność naszego kryterium, weryfikujemy je dla konkretnego markowowskiego układu dynamicznego z czasem dyskretnym (wprowadzonego w [H2]), do którego nie udało nam się zastosować żadnej innej istniejącej wersji CTG dla łańcuchów Markowa.

[H5] Proponujemy pewne warunki implikujące funkcjonalne *prawo iterowanego logarytmu* (LIL, od ang. *law of the iterated logarithm*) – tzw. *zasadę niezmienniczości Strassena dla LIL* – dla ogólnej klasy niestacjonarnych łańcuchów Markowa-Fellera (zdefiniowanych jak wyżej) o wartościach w polskich przestrzeniach metrycznych. W ostatniej części artykułu przedstawiamy także przykładowe zastosowanie naszego głównego twierdzenia do konkretnego modelu matematycznego opisującego stochastyczną dynamikę ekspresji genów (wprowadzonego w [H2]).

[H6] Dowodzimy LIL dla niestacjonarnych łańcuchów Markowa generowanych przez *IFSs składające się z homeomorfizmów zachowujących orientację przedziału* (ang. *IFSs consisting of orientation-preserving homeomorphisms of the interval*). Wynik wzbogaca opis ergodyczny tej klasy łańcuchów Markowa, wcześniej badanej przez K. Czudka i T. Szarka pod kątem ergodyczności i CLT [Isr. J. Math., **239** (2012), 75–291]. Należy jednak zaznaczyć, że rozważane tutaj łańcuchy mogą nie zbiegać do swoich rozkładów stacjonarnych w tempie geometrycznym. Dlatego też techniki opracowane w [H5] (lub inne podobne) nie mają tu zastosowania.

Bardziej szczegółową dyskusję na temat wyżej przytoczonych wyników (a także tych zaprezentowanych w artykułach [N1] oraz [E1]-[E4], z których każdy jest powiązany tematycznie z osiągnięciem naukowym) można znaleźć w następnej sekcji. Omówienie zawiera tło historyczne badań, odniesienia do innych prac naukowych, opis zastosowanych technik dowodowych, a także pewne otwarte pytania, na które będziemy szukać odpowiedzi w przyszłości.

4.3.2 Opis wyników

Tło historyczne tej części badań nad asymptotyką procesów Markowa, która odwołuje się do warunku równociągłości

Zachowanie asymptotyczne procesów Markowa – w szczególności istnienie i jednoznaczność ich *rozkładów stacjonarnych*, a także słaba zbieżność rozkładów tych procesów do ich (jedynych) rozkładów stacjonarnych niezależnie od rozkładów początkowych (*asymptotyczna stabilność*) – od lat jest przedmiotem szeroko zakrojonych badań. W toku tychże badań wypracowano różne techniki, głównie takie, które odwołują się do *równociągłości* (ang. *equicontinuity*) rodzin operatorów Markowa (zob. np. [Ste94, LS06, Wor10, SW11, Cza12, CH14, WW18], w których wykazano pewne własności ergodyczne łańcuchów Markowa, lub [SSU10, KS11], w których przedmiotem badań jest asymptotyka procesów Markowa z czasem ciągłym).

Początkowo tego rodzaju techniki rozwijano na potrzeby analizy procesów Markowa o wartościach w zwartych przestrzeniach metrycznych (por. [Jam64]) lub lokalnie zwartych podprzestrzeniach przestrzeni Hausdorffa (por. [MT93b]). Później wprowadzono tzw. *technikę ograniczenia dolnego* (ang. *lower-bound technique*) dla równociągłych rodzin operatorów Markowa, dzięki której można skutecznie dowodzić twierdzeń dla procesów o wartościach w ogólnych (tj. *polskich*, a więc zupełnych i ośrodkowych) przestrzeniach metrycznych (zob. np. [LS06, Sza13], a także pierwsze wyniki [Sza03, Sza06] dotyczące asymptotyki łańcuchów Markowa ewoluujących w przestrzeniach polskich). W literaturze przedmiotu znajdziemy pojęcia takie jak *e-własność* (ang. *e-property*) [SW11, Cza12, CH14], *asymptotyczna e-własność* (ang. *eventual e-property*) [Wor10, Cza18], *Cesáro e-własność* (ang. *Cesáro e-property*) [Wor10], czy nawet *jednorodna równociągłość na kulach* (ang. *uniform equicontinuity on balls*) [HHS16]. Ostatnio, wykorzystując w tym celu własność typu Schura, autorzy pracy [HSWZ21] pokazali ścisły związek zachodzący między pojęciami równociągłości dla operatorów Markowa działających na miarach oraz dla ich operatorów dualnych działających na funkcjach.

Zależności pomiędzy asymptotyczną stabilnością a e-własnością

Niech (E, ρ) będzie przestrzenią polską, oraz niech R będzie dostatecznie dużym podzbiorem zbioru $C_b(E)$ składającego się ze wszystkich funkcji $f : E \to \mathbb{R}$, które są ciągłe i ograniczone.

Mówimy wówczas, że regularny operator Markowa P (przy czym operator do niego dualny będziemy oznaczać tym samym symbolem) ma *e-własność w* R, jeśli rodzina $\{P^n f\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ iteracji jest równociągła dla wszystkich funkcji $f \in$ R, tzn. dla dowolnej $f \in$ R zachodzi zbieżność

$$\lim_{x\to z} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |P^n f(x) - P^n f(z)| = 0 \quad \text{dla każdego} \quad z \in E.$$

Podobnie o regularnej półgrupie Markowa $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ powiemy, że ma e-własność w R, jeśli rodzina $\{P(t)f\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest równociągła dla wszystkich $f \in$ R. W wielu pracach (zob. np. [KPS10, Wor10, SW11, HSZ17, Cza18]) przyjmuje się, że R jest zbiorem $\mathrm{Lip}_b(E)$ wszystkich funkcji lipschitzowskich i ograniczonych. Warto jednak pamiętać, że R może być również zbiorem funkcji ciągłych i ograniczonych z ograniczonym (lub zwartym) nośnikiem (zob. np. [MT93b, Ste94, Cza12]), a nawet całym zbiorem $\mathrm{C}_b(E)$ (jak w naszych pracach [H1] i [N1]). Definicje e-własności dla różnych zbiorów R w ogólności nie są sobie równoważne. Jeśli jednak założymy, że regularny operator Markowa P jest asymptotycznie stabilny, niektórych z tych pojęć możemy używać zamiennie (zob. uwagę 2.1 oraz lemat 3.4 w [H1]). Porównanie pojęć e-własności dla różnych zbiorów R w przypadku półgrup Markowa przedstawiono natomiast w dodatku II do pracy [N1]. Aby zapewnić równoważność niektórych z tych pojęć, potrzebna jest tym razem nie tylko asymptotyczna stabilność półgrupy $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, lecz także jej *stochastyczna ciągłość w zerze* (ang. *stochastic continuity at zero*), zdefiniowana tak jak w [Dyn65, Dyn00, KW12].

Znając kryteria asymptotycznej stabilności operatorów Markowa z e-własnością, możemy zapytać o odwrotną zależność, a mianowicie: *Czy asymptotyczna stabilność operatorów Markowa automatycznie implikuje ich e-własność?*. Odpowiedź na to pytanie jest negatywna – a dowiedziono tego w pracy [HSZ17]. Dokładniej rzecz ujmując, autorzy tej pracy przedstawiają przykłady operatorów Markowa-Fellera, które są asymptotycznie stabilne, ale nie mają e-własności. Jednocześnie dowodzą, że każdy asymptotycznie stabilny operator Markowa-Fellera, którego niezmiennicza miara probabilistyczna μ_* jest taka, że wnętrze jej nośnika jest zbiorem niepustym ($\mathtt{Int}(\mathrm{supp}(\mu_*)) \neq \emptyset$), spełnia e-własność (zob. [HSZ17, twierdzenie 2.3]).

Podsumowanie wyników z [H1].

W [H1] uogólniamy ten wynik, tzn. dowodzimy, że dowolny asymptotycznie stabilny operator Markowa-Fellera ma e-własność wszędzie poza zbiorem pierwszej kategorii (zob. twierdzenie 3.1 w [H1]; por. rozdział 4.3.3 niniejszego autoreferatu). Ponadto w twierdzeniu 3.5 w [H1] proponujemy warunek równoważny e-własności dla asymptotycznie stabilnych operatorów Markowa-Fellera – mianowicie **pokazujemy, że asymptotycznie stabilny operator Markowa-Fellera ma e-własność wtedy i tylko wtedy, gdy ma e-własność w co najmniej jednym punkcie nośnika jego niezmienniczej miary probabilistycznej**. Wykazane przez nas twierdzenia naturalnie implikują [HSZ17, twierdzenie 2.3] (por. rozdział 4.3.3 niniejszego autoreferatu). W rzeczywistości implikują one jeszcze więcej – ponieważ dzięki lematowi 3.4 w [H1] wiemy, że przyjęte założenia gwarantują e-własność w $\mathrm{C}_b(E)$ (podczas gdy [HSZ17, twierdzenie 2.3] oryginalnie sformułowano dla e-własności w $\mathrm{Lip}_b(E)$, co jest mniej ogólne).

W pracy [H1] prezentujemy również dwa przykłady istotne z punktu widzenia badań nad e-własnością. W pierwszym z nich **definiujemy asymptotycznie stabilny operator Markowa-Fellera, dla którego zbiór punktów bez e-własności jest gęsty**. Tym samym pokazujemy, że główny wynik pracy [H1], tj. twierdzenie 3.1, jest ścisły. W drugim przykładzie **konstruujemy asymptotycznie stabilny operator Markowa-Fellera, dla którego zbiór punktów bez e-własności jest nieprzeliczalny** (zob. sekcję 4 w [H1]).

Podsumowanie wyników z [N1].

Temat związku pomiędzy e-własnością a asymptotyczną stabilnością podejmujemy również w naszej ostatniej pracy [N1], w której odpowiadamy na pytanie: *Kiedy asymptotycznie stabilna półgrupa Markowa ma e-własność?*. **Jedno z głównych twierdzeń tej pracy (twierdzenie 1) jest odpowiednikiem [HSZ17, twierdzenia 2.3] dla półgrup Markowa**, dlatego też jego dowód opiera się na pewnych koncepcjach pochodzących z [HSZ17]. Różnica polega na tym, że warunki gwarantujące e-własność dla pojedynczego asymptotycznie stabilnego operatora Markowa P (tj. własność Fellera i niepustość wnętrza nośnika niezmienniczej miary probabilistycznej tego operatora) są niewystarczające, by dowieść tej własności dla asymptotycznie stabilnej półgrupy Markowa $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (kontrprzykłady podajemy w sekcji 2.2 artykułu [N1]). Przy takich założeniach możemy jedynie pokazać, że półgrupa $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ma *asymptotyczną e-własność* (tzn. e-własność zachodzącą od pewnego momentu, a nie – w całym przedziale czasowym $t \in \mathbb{R}_+$). Aby udowodnić e-własność, należy przyjąć dodatkowe założenie o *silnej stochastycznej ciągłości* (ang. *strong stochastic continuity*; por. [EK86, str. 6]) półgrupy $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Dokładniej rzecz ujmując, w twierdzeniu 2 w [N1] **dowodzimy, że dowolna silnie stochastycznie ciągła półgrupa Markowa, która ma asymptotyczną e-własność, ma również e-własność**. Co ciekawe, założenia nie można osłabić. **Przykład 2 w pracy [N1] ilustruje, że słaba stochastyczna ciągłość – czyli taka, w której zbieżność w normie supremum zostanie zastąpiona zbieżnością punktową – niekoniecznie implikuje pożądane twierdzenie, chyba że podstawowa przestrzeń fazowa jest zwarta** (zob. dodatek I do pracy [H1]). Z dwóch powyższych twierdzeń (tj. twierdzeń 1 i 2 w [N1]) możemy zatem wywnioskować, że **asymptotycznie stabilna półgrupa Markowa-Fellera posiada e-własność pod warunkiem, że jest ona również silnie stochastycznie ciągła, a wnętrze nośnika jej niezmienniczej miary probabilistycznej jest niepuste** (wniosek 1 w [N1]).

Nieco ogólniejsze twierdzenie, w którym zamiast asymptotycznej stabilności półgrupy markowowskiej zakłada się jej „asymptotyczną ciągłość" (ang. "eventual continuity"), zostało później udowodnione w [LL23] (zaznaczmy jednak, że autorzy tej pracy dowodzą mniej ogólnej e-wła- sności w $\mathrm{Lip}_b(E)$). My natomiast skupiamy się na wykazaniu, że wyniki w [N1] są ścisłe – w tym sensie, że założenia o silnej stochastycznej ciągłości rozważanego operatora Markowa-Fellera nie można zastąpić założeniem o jego stochastycznej ciągłości (pojęcia e-własności i asymptotycznej e-własności nie będą wówczas równoważne). Tym samym odpowiadamy na piąte otwarte pytanie postawione przez autorów pracy [LL23].

Na koniec warto zauważyć, że jeśli pracujemy z półgrupami Markowa $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, stochastyczna ciągłość nie jest szczególnie restrykcyjnym warunkiem. Zakłada się ją, np. aby pokazać wspólną mierzalność półgrupy (jak zauważono w [Wor10, propozycji 3.4.5]) lub jednoznacznie scharakteryzować półgrupę Markowa-Fellera za pomocą jej (słabego) generatora infinitezymalnego (zob. [Dyn65, twierdzenie 2.5]).

Asymptotyczna stabilność, zwłaszcza osiągana w tempie wykładniczym, jest jedną z najbardziej pożądanych właściwości ergodycznych – jednak dopiero dodatkowo spełniona e-własność gwarantuje, że pewne błędy numeryczne w symulacjach można traktować jako pomijalne (zob. również pracę [CH14], w której udowodniono, że asymptotycznie stabilny operator Markowa-Fellera zbiega do swojego rozkładu stacjonarnego jednostajnie, o ile spełnia odpowiedni warunek równociągłości). **W świetle powyższej obserwacji czysto teoretyczne wyniki z prac [H1] i [N1] okazują się być ważne również z punktu widzenia zastosowań praktycznych.**

Nasze dalsze badania dotyczące związku między asymptotyczną stabilnością a e-własnością będą koncentrować się wokół próby zastąpienia założenia o niepustości wnętrza nośnika niezmienniczej miary probabilistycznej danego operatora/półgrupy Markowa przez inny, mniej restrykcyjny i łatwiejszy do zweryfikowania warunek – na przykład założenie, że jedyny niezmienniczy rozkład stacjonarny jest rozkładem bezatomowym (ang. *atomless distribution*).

Techniki sprzęgania asymptotycznego (ang. *asymptotic coupling techniques*)

Jak już wspomniano w rozdziale 4.3.2: *Tło historyczne tej części badań nad asymptotyką procesów Markowa, która odwołuje się do warunku równociągłości*, asymptotyczne zachowanie markowowskich układów dynamicznych często bada się przy użyciu technik opartych na wykorzystaniu warunku równociągłości. Jednak aby wykazać *ergodyczność* danego układu losowego – a dodatkowo oszacować tempo, w jakim układ ją osiąga – można skorzystać z zupełnie innej metody, opartej na *sprzęganiu asymptotycznym* całych trajektorii procesów Markowa. To nowoczesne podejście zaproponował M. Hairer w swojej głośnej pracy [Hai02], inspirowanej głównie artykułem [Mat02] J.C. Mattingly'ego na temat drugiego równania Naviera-Stokesa. W kolejnych latach metodę sprzęgania asymptotycznego rozwijano zarówno dla operatorów Markowa – szczególnie tych, które opisują ewolucję IFSs (por. [Ś11, Cza18, CK19, KS20] lub [D3], [H2]) – jak i dla półgrup Markowa, opisujących m.in. PDMPs (zob. np. [CH15] lub [E2]), działających na ogólnych (polskich) przestrzeniach metrycznych.

Ideę leżącą u podstaw wszystkich technik sprzęgania asymptotycznego można krótko opisać w sposób przedstawiony niżej. Dla danego łańcucha Markowa $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ z funkcją prawdopodobieństwa przejścia P rozważamy jego dwie instancje: jedną z punktem początkowym x_0, oznaczaną przez $\{\phi_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, oraz drugą z punktem początkowym y_0, oznaczaną przez $\{\phi_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Celem opisywanej metody jest zbliżenie trajektorii łańcuchów $\{\phi_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $\{\phi_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (na tyle, na ile to możliwe) poprzez tworzenie odpowiednich korelacji między nimi. Przy pewnych (dość ogólnych) założeniach można to zrobić dzięki rozbiciu funkcji prawdopodobieństwa przejścia sparowanego łańcucha $\{(\phi_n^{(1)},\phi_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ na dwie części, z których jedna jest zwężająca oraz – w pewnym sensie – dominująca nad drugą (szczegółową konstrukcję można znaleźć np. w sekcji 1.3 artykułu [H4]).

W literaturze przedmiotu znajdziemy również pojęcie tzw. *czasu sprzężenia* τ_{couple}, tzn. losowego momentu, w którym obie kopie łańcucha Markowa $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ po raz pierwszy osiągają ten sam stan, tj. $\tau_{\text{couple}} = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \phi_n^{(1)} = \phi_n^{(2)}\}$. Wiemy, że jeśli $\tau_{\text{couple}} < \infty$, to łańcuchy można sparować w taki sposób, by od momentu τ_{couple} ich trajektorie były ze sobą „sklejone" (zob. np. [Lin02, MT93b]). Nie jest to jednak przypadek, z którym mamy do czynienia w niniejszym autoreferacie – dlatego, podążając za pomysłem M. Hairera [Hai02], trajektorie łańcuchów, które nie mogą się spotkać w skończonym czasie, sprzęgamy asymptotycznie (zob. również [HM08], gdzie podano przykład łańcucha Markowa o wartościach w przestrzeni nieskończenie wymiarowej, którego kopie startujące z dwóch różnych punktów początkowych indukują miary wzajemnie singularne).

Na zakończenie warto wspomnieć, że techniki sprzęgania asymptotycznego mogą posłużyć nie tylko do wykazywania wykładniczej ergodyczności, lecz także do dowodzenia twierdzeń granicznych – takich jak SLLN (por. [HS16]), CLT (zob. np. [D2], [Hor16], [H4]), czy LIL (por. [D1], [H5], [E4]). W szczególności **artykuły [H4] i [H5] – oba oparte na twórczej adaptacji technik sprzęgania asymptotycznego – stanowią ważny wkład w badania nad ogólnymi wersjami twierdzeń granicznych dla procesów Markowa przyjmujących wartości w przestrzeniach polskich.**

PDMPs sterowane przez półpotoki przełączane losowo

Naszą początkową motywacją do kreatywnego zastosowania technik sprzęgania asymptotycznego była chęć przygotowania opisu ergodycznego pewnego losowego układu dynamicznego, który służy m.in. do opisu prostego modelu podziału komórki. Układ ten był już wcześniej badany pod kątem stabilności przez A. Lasotę i M.C. Mackeya w pracy [LM99]. My natomiast, korzystając z technik sprzęgania asymptotycznego M. Hairera [Hai02] (zob. również [Ś11]), **oszacowaliśmy tempo zbieżności do jedynego rozkładu stacjonarnego tego układu jako geometryczne [D3] i wykazaliśmy zarówno CLT [D2], jak i LIL [D1]** (tutaj dodatkowo odwołując się do pewnych pomysłów z prac [MW00] i [BMS12]). W tym samym czasie R. Kapica i M. Ślęczka zaadaptowali te techniki, aby wykazać swoje kryterium ergodyczności geometrycznej ([KS20, twierdzenie 2.1]) dla łańcuchów Markowa o wartościach w przestrzeniach polskich, ze szczególnym zastosowaniem do losowych iteracji z prawdopodobieństwami zależnymi od położenia. Wszystkie powyższe wyniki i leżące u ich podstaw idee okazały się przydatne do analizy pewnej klasy PDMPs, sterowanych przez półpotoki przełączane losowo.

Podsumowanie wyników z serii prac [D1]-[D3].

PDMPs, wprowadzone przez M. Davisa [Dav84] (zob. także [Cos90, Dav93, Dav06]), stanowią obszerną klasę niedyfuzyjnych procesów Markowa, dla których losowość wynika wyłącznie z *mechanizmu skoków*, obejmującego czasy skoków, lokalizacje tuż po skokach i inne zmiany zachodzące w momentach skoków. Ta rodzina procesów znajduje liczne zastosowania w dziedzinach takich jak biologia [CDMR12, MTKY13, RTK17], modelowanie przechowywania [BKKP05] i ruchu internetowego [GR09], a także w teorii sterowania i optymalizacji [CD99, CD08]. PDMPs są też rozwiązaniami pewnych wariantów stochastycznych równań różniczkowych sterowanych procesem Poissona (zob. np. [CK19, Hor02, Kaz13, MZ10]), które badali przede wszystkim A. Lasota i J. Traple [LT03], a które mają istotne zastosowania w biomatematyce, fizyce i inżynierii (zob. np. [Sny75, DHT84]).

W tym autoreferacie zajmiemy się m.in. pewnym losowym układem dynamicznym o przestrzeni stanów Y będącej polską przestrzenią metryczną (wyposażoną w σ-algebrę $\mathcal{B}(Y)$ zbiorów borelowskich), **którego ewolucję zaburzają losowe skoki, występujące w momentach odpowiadających czasom skoków procesu Poissona.** Oznacza to, że odstępy w czasie pomiędzy kolejnymi skokami mają rozkład wykładniczy o stałej intensywności λ. Pomiędzy dwoma sąsiednimi skokami dynamikę tego układu określa jeden z półpotoków, losowo wybrany z pewnego skończonego zbioru $\{S_i\}_{i\in I}$ wszystkich dostępnych półpotoków, gdzie $S_i : \mathbb{R}_+ \times Y \to Y$. Wybór półpotoku określa macierz $[\pi_{ij}]_{i,j\in I}$ funkcji ciągłych $\pi_{ij} : Y \to [0, 1]$, spełniających warunek $\sum_{j\in I} \pi_{ij}(y) = 1$ dla każdego $y \in Y$ i każdego $i \in I$. Losowy stan układu osiągany zaraz po skoku (dalej nazywany *lokalizacją tuż po skoku*; od ang. *post-jump location*) zależy od stanu bezpośrednio go poprzedzającego, a jego rozkład określa jądro stochastyczne $J : Y \times \mathcal{B}(Y) \to [0, 1]$. Z tego typu układem związany jest więc zarówno PDMP, jak i łańcuch Markowa opisujący stany układu tuż po skokach.

Opis klasy losowych układów dynamicznych badanych w pracach [H2]-[H5], [E1]-[E4].

Mówiąc nieco dokładniej, badamy proces stochastyczny $\Psi := (Y(t), \xi(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, który przyjmuje wartości w $X := Y \times I$, a którego dynamikę możemy opisać w następujący sposób. Startując z pewnego punktu (y_0, i_0), proces Ψ ewoluuje deterministycznie zgodnie z funkcją $t \mapsto (S_{i_0}(t, y_0), i_0)$ aż do momentu t_1 pierwszego losowego skoku. W tym momencie trajektoria pierwszej współrzędnej „skacze" do innego punktu y_1 przestrzeni Y, przy czym prawdopodobieństwo trafienia do zbioru $B \in \mathcal{B}(Y)$ wynosi $J(S_{i_0}(t_1, y_0), B)$. Jednocześnie indeks „aktywnego" półpotoku, określany przez $\{\xi(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, zostaje losowo zmieniony z i_0 na inny (lub ten sam) indeks i_1, z prawdopodobieństwem $\pi_{i_0 i_1}(y_1)$. Następnie, po starcie z nowego stanu (y_1, i_1), cała procedura zostaje wznowiona i przebiega analogicznie. Formalnie proces Ψ można zatem zdefiniować przez następujące równania:

$$Y(t) := S_{\xi_n}(t - \tau_n, Y_n) \quad \text{i} \quad \xi(t) := \xi_n \quad \text{dla} \quad t \in [\tau_n, \tau_{n+1}), \;\; n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

gdzie $\bar{\Phi} := \{(Y_n, \xi_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest łańcuchem Markowa jednorodnym w czasie, przyjmującym wartości w przestrzeni stanów $X \times \mathbb{R}_+$, z funkcją prawdopodobieństwa przejścia spełniającą

$$\mathbb{P}\left(\bar{\Phi}_{n+1} \in \bar{A} \,|\, \bar{\Phi}_n = (y, i, s)\right) = \sum_{j\in I} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_Y \mathbb{1}_{\bar{A}}(u, j, t+s)\, \pi_{ij}(u)\, J\left(S_i(t, y), du\right) dt \tag{2}$$

dla dowolnych $n \in \mathbb{N}_0$ oraz dla każdego zbioru borelowskiego $\bar{A} \subset X \times \mathbb{R}_+$. Oczywiście, cała losowość procesu Ψ zawiera się w łańcuchu $\bar{\Phi}$. Co więcej, ciąg $\Phi := \{(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zmiennych losowych, opisujących lokalizacje procesu Ψ tuż po skokach, również jest łańcuchem Markowa o wartościach w przestrzeni X (względem swojej filtracji naturalnej). Wówczas jasnym jest, że funkcja przejścia tego łańcucha ma postać

$$\begin{aligned} P((y,i),A) &:= \mathbb{P}\left(\Phi_{n+1} \in A \,|\, \Phi_n = (y,i)\right) \\ &= \sum_{j\in I} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_Y \mathbb{1}_A(u,j)\, \pi_{ij}(u)\, J\left(S_i(t,y), du\right)\, dt \end{aligned} \tag{3}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ i dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset X$.

Rozważana tutaj podklasa PDMPs przypomina nieco tę badaną w [Cos90, CD99, CD08, BLBMZ12, BLBMZ15, BHS18, BS19]. **Autorzy wszystkich wymienionych prac skupiają się jednak na procesach ewoluujących w przestrzeniach skończenie wymiarowych (a więc lokalnie zwartych). W takim przypadku, jeśli chce się pokazać istnienie niezmienniczych miar probabilistycznych bądź ergodyczność (zwykle w *normie wahania całkowitego*, od ang. *total variation norm*), można korzystać z różnych adaptacji konwencjonalnych metod S.P. Meyna i R.L. Tweediego [MT93a, MT93b], odwołujących się przede wszystkim do łańcuchów *powracających w sensie Harrisa* (którą to własność można wykazać, np. używając warunków typu Hörmandera, od ang. *Hörmander-type bracket conditions*, tak jak zrobiono to w [BLBMZ15]), lub pewnych kryteriów odnoszących się do tzw. dryfu w kierunku „małego zbioru" (ang. *drift towards a petite set*). Warto jednak zwrócić uwagę, że tego typu techniki są zazwyczaj efektywne tylko dla procesów ψ-nieredukowalnych, co oczywiście nie dotyczy naszych rozważań (zob. również odpowiedni komentarz we wstępie do artykułu** [H2] **i w streszczeniu pracy [HM08] na temat tzw. *luki spektralnej* (ang. *spectral gap*) w *odległości Wassersteina* dla półgrup Markowa o wartościach w przestrzeniach Banacha, gdzie wyjaśniono, dlaczego potrzebne jest nowe podejście do pracy z nieskończenie wymiarowymi przestrzeniami, w których zwykłe warunki Harrisa czy Doeblina – ukierunkowane na zbieżność w normie wahania całkowitego – zwykle nie spełniają swojej roli; por. [HM11]**).

Porównanie rozważanej tutaj klasy PDMPs z tymi, które badane są w innych pracach.

Zaznaczmy, że w serii artykułów [H2], [H3], [E1]-[E4] (skupionych na pewnych własnościach ergodycznych półgrup Markowa) zwracamy uwagę na szczególny przypadek opisanych wcześniej PDMPs, w którym jądro skoków J jest prawdopodobieństwem przejścia pewnego losowo zaburzanego IFS, zadanym przez

$$J(y,B) = \int_{\text{supp}(\nu)} \int_\Theta \mathbb{1}_B(w_\theta(y)+v)\, p_\theta(y)\, \vartheta(d\theta)\nu(dv) \quad \text{dla } \; y \in Y \; \text{ i } \; B \in \mathcal{B}(Y), \tag{4}$$

w którym to przypadku Y jest domkniętym podzbiorem przestrzeni Banacha H, ν jest borelowską miarą probabilistyczną na H z ograniczonym nośnikiem, Θ oznacza dowolną przestrzeń topologiczną wyposażoną w miarę borelowską ν, $\{w_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ jest dowolną rodziną ciągłych przekształceń przestrzeni Y w siebie, taką że $w_\theta(Y) + v \subset Y$ dla dowolnego $v \in \text{supp}(\nu)$, a odwzorowania $\Theta \ni \theta \mapsto p_\theta(y) \in \mathbb{R}_+$, $y \in Y$, są odpowiadającymi jej funkcjami gęstości prawdopodobieństwa względem miary ϑ, zależnymi od położenia.

W takim ujęciu rozważany model może posłużyć do analizy dynamiki ekspresji genów u prokariotów (zob. np. [BTK16], [MTKY13], sekcję 5.1 w [H2] lub przykład 7.3 w [E2]). **Ponadto, jeśli $\nu = \delta_0$, $\vartheta(\Theta) = 1$ oraz $p_\theta \equiv 1$ dla każdego $\theta \in \Theta$, to** $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$

można traktować jako rozwiązanie stochastycznego równania ewolucji z szumem Poissona (zob. np. [Hor02, LT03, MZ10, Kaz13, CK19]).

Z kolei dyskretny układ dynamiczny Φ z jądrem skoków J zadanym przez (4) **może służyć jako model autoregulacji genu** (opisany w [HHS16] lub w sekcji 5.2 artykułu [H2]). **Właśnie dzięki temu przykładowi widzimy, jak istotne jest rozważanie modeli abstrakcyjnych z przestrzenią stanów, która nie jest lokalnie zwarta (w modelu autoregulacji genu rozpatruje się przestrzeń fazową złożoną z funkcji ciągłych określających koncentrację związków chemicznych w poszczególnych punktach cytoplazmy komórki).** Ergodyczność i twierdzenia graniczne dla tego modelu wykazaliśmy w pracach [H2], [H4] i [H5].

Motywacja do rozważania procesów z ogólną (polską) przestrznią stanów.

Ergodyczność rozważanej klasy PDMPs i odpowiadających im łańcuchów opisujących ich lokalizacje tuż po skokach

W ostatnich latach podczas naszych badań skupialiśmy się w dużej mierze na analizie PDMP Ψ i powiązanego z nim łańcucha Φ, opisującego jego lokalizacje tuż po skokach (oba procesy zostały wprowadzone i omówione w poprzedniej sekcji). Naszym głównym celem było opracowanie ich opisów ergodycznych, a tym samym – udzielenie odpowiedzi na następujące pytania:

- *Czy procesy Φ i Ψ są ergodyczne – a jeśli tak, to jak szybko stabilizują się ich rozkłady?*,
- *Jakie własności mają ich niezmiennicze miary probabilistyczne? Jak zależą od parametrów modelu? Czy są singularne, czy absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a (w przypadku uproszczonego modelu, w którym przestrzeń fazowa tych procesów to $\mathbb{R}^d$)?*,
- *Czy zachodzą jakieś twierdzenia graniczne dla tych procesów?*.

Aby rozpocząć nasze badania, najpierw musieliśmy ustalić założenia, przy których procesy Φ i Ψ mają rozkłady stacjonarne (w rzeczywistości zrobiliśmy nawet więcej – tzn. **zaproponowaliśmy stosunkowo łatwe do zweryfikowania warunki, które gwarantują, że te rozkłady stacjonarne, oznaczone odpowiednio jako μ_*^Φ i μ_*^Ψ, nie tylko istnieją, ale również są jedyne**).

Podsumowanie wyników z [H2].

Dla szczególnej wersji modelu z jądrem skoków J zadanym wzorem (4)**, w którym to przypadku funkcja przejścia P łańcucha Φ (zob.** (3)**) ma następującą postać:**

$$P((y,i),A) := \sum_{j\in I}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{\mathrm{supp}(\nu)}\int_\Theta \mathbb{1}_A\left(w_\theta\left(S_i(t,y)\right)+v,j\right)\,\pi_{ij}\left(w_\theta\left(S_i(t,y)\right)+v\right) \times p_\theta\left(S_i(t,y)\right)\vartheta(d\theta)\,\nu(dv)\,dt \quad \text{dla dowolnych} \quad (y,i)\in X,\ A\in\mathcal{B}(X), \tag{5}$$

zrobiliśmy to w pracy [H2]**, a konkretnie – w twierdzeniu 4.1 dla łańcucha Φ i we wniosku 4.5 dla PDMP Ψ** (por. rozdział 4.3.3 tego autoreferatu). **Zaproponowane w twierdzeniu 4.1 warunki są również wystarczające, aby zapewnić *geometryczną ergodyczność* łańcucha Φ**, przez którą rozumiemy istnienie takiej jedynej niezmienniczej miary probabilistycznej μ_*^Φ tego procesu, która przyciąga (ang. *attracts*) wszystkie początkowe rozkłady tego procesu (o skończonych pierwszych momentach) w tempie geometrycznym względem *odległości Forteta-Mouriera* (definicję normy Forteta-Mouriera można znaleźć np. w [Las95, str. 236] lub [LY94, str. 46]; por. [Dud66], w której omawiana jest równoważna jej *norma Dudleya*). Taka metryka, w literaturze przedmiotu znana również jako *bounded-Lipschitz distance*, jest zdefiniowana na stożku nieujemnych skończonych miar borelowskich na X i indukuje topologię słabej zbieżności takich miar ([Dud66, twierdzenia 8 i 9]). Zaznaczmy również, że z twierdzenia 4.1 w prosty sposób wynika stabilność samego łańcucha $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (zob. wniosek 4.2 w [H2]).

W dowodzie głównego twierdzenia artykułu [H2] (tj. twierdzenia 4.1) korzystamy z technik sprzęgania asymptotycznego wprowadzonych przez M. Hairera [Hai02] (por. [Ś11] i [D3]) i stosujemy oparty na nich wynik R. Kapicy i M. Ślęczki [KS20] (aby zrozumieć główne pomysły stojące za [KS20, twierdzeniem 2.1], odsyłamy do dodatku znajdującego się na końcu artykułu [H2], gdzie przedstawiamy szkic dowodu tego twierdzenia; zob. także sekcję 2 w [H4], ze szczególnym uwzględnieniem lematów 2.2 i 2.3, w których dowodzimy pośredniego wyniku – choć w nieco silniejszej wersji niż w [KS20]).

Uwagi dotyczące założeń nałożonych na komponenty modelu.

Warunki nałożone na komponenty modelu, a więc na półpotoki S_i, $i \in I$ i macierz $[\pi_{ij}]_{i,j\in I}$ ich (zależnych od położenia) prawdopodobieństw, a także na przekształcenia ciągłe w_θ, $\theta \in \Theta$, decydujące o stanach układu tuż po skokach, i odpowiadający im zbiór $\{p_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ (zależnych od położenia) funkcji gęstości (względem miary ϑ), wymieniamy np. w sekcji 2 w [H2] (por. sekcja 4 w [H4] i sekcja 5 w [H5]). **Zasadność tych założeń omawiamy szczegółowo w sekcji 3 w [H2]. Wyjaśniamy tam m.in., że półpotoki spełniające te warunki mogą być generowane np. przez pewne równania różniczkowe z udziałem operatorów dyssypatywnych** (zob. także sekcję 4 w [E2] lub sekcję 3 w [H3]; por. [IK02, CK19]). Dodatkowy warunek dotyczący parametru λ, określającego intensywność skoków, a także stałych występujących w przyjętych założeniach, jest konieczny, aby pokazać *warunek dryfu typu Fostera-Lapunowa*, występujący w kryterium ergodyczności wykładniczej R. Kapicy i M. Ślęczki ([KS20, twierdzenie 2.1]), do którego odwołujemy się w dowodzie naszego głównego wyniku. Tego typu warunki znajdziemy w wielu pracach poświęconych własnościom ergodycznym procesów Markowa (por. [MT93a, MT93b]). Podobne wymaganie pojawia się też np. w [Las95, propozycji 5.1], gdzie rozważane jest stochastyczne równanie różniczkowe sterowane procesem Poissona.

Kolejnym ważnym wynikiem artykułu [H2] jest **wykazanie jednoznacznej odpowiedniości między zbiorami niezmienniczych miar probabilistycznych łańcucha Φ i procesu Ψ** (twierdzenie 4.4 w [H2]) – mianowicie pokazujemy, że jeśli μ^Φ jest niezmienniczą miarą probabilistyczną łańcucha Φ, to $\mu^\Psi := \mu^\Phi G$ jest niezmienniczą miarą probabilistyczną procesu Ψ, oraz $\mu^\Psi W = \mu^\Phi$ (odwrotna zależność jest również prawdziwa), gdzie funkcje $G, W : X \times \mathcal{B}(X) \to [0,1]$ są jądrami stochastycznymi zadanymi przez

$$G((y,i),A) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_A\left(S_i(t,y),i\right)\,dt, \tag{6}$$

$$W((y,i),A) = \sum_{j\in I} \int_{\mathrm{supp}(\nu)} \int_\Theta \mathbb{1}_A\left(w_\theta(y)+v,j\right) \pi_{ij}\left(w_\theta(y)+v\right) p_\theta(y)\, \vartheta(d\theta)\, \nu(dv) \tag{7}$$

dla wszystkich $(y,i) \in X$ i wszystkich $A \in \mathcal{B}(X)$. Zaznaczmy, że w celu udowodnienia powyższego faktu założyliśmy dodatkowo, że miara ϑ, określona na zbiorze Θ, jest skończona. Dowód twierdzenia 4.4 oparty jest na technikach podobnych do tych zastosowanych w [Hor08, twierdzeniu 5.3.1] i [BLBMZ15, twierdzeniach 2.1, 2.4] (w lematach 6.3 i 6.5 w [H2] pokazujemy, że półgrupa przejścia $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ procesu Ψ jest - odpowiednio - fellerowska i stochastycznie ciągła). Ponadto w dowodzie twierdzenia 4.4 w [H2] korzystamy również z kilku faktów z teorii półgrup operatorów liniowych w przestrzeniach Banacha, m.in. dotyczących słabych generatorów infinitezymalnych (zob. [Dyn65, str. 36–43, 47–61] oraz [Dyn00, str. 437-448]).

Z twierdzeń 4.1 i 4.4 w [H2] uzyskujemy wniosek, że **PDMP Ψ ma jedyną niezmienniczą miarę probabilistyczną** μ_*^Ψ (wniosek 4.5 w [H2]).

Następnie, w propozycjach 7.1 i 7.2 oraz twierdzeniu 7.1 w [E2] **wykazujemy wykładniczą ergodyczność rozważanego układu z ogólnym jądrem skoków J (lecz ze stałymi – tj. niezależnymi od aktualnego stanu układu – prawdopodobieństwami π_{ij}, $i,j \in I$)**. Zatem, mówiąc ściśle, celem artykułu [E2] jest wskazanie stosunkowo łatwych do zweryfikowania warunków na jądro J oraz półpotoki S_i, $i \in I$, które gwarantują, że zarówno operator przejścia łańcucha Φ, jak i półgrupa przejścia procesu Ψ są wykładniczo ergodyczne względem metryki Forteta-Mouriera. Podsumowanie wyników z [E2].

W naszym podejściu, częściowo zainspirowanym technikami wykorzystanymi w dowodzie [CH15, twierdzenia 1.4], przyjmujemy następującą strategię:

(I) pokazujemy, że gdy jądro J spełnia pewną wzmocnioną wersję własności Fellera, to istnieje jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zbiorami niezmienniczych miar probabilistycznych procesów Φ i Ψ (twierdzenie 5.1 w [E2]);

(II) zauważamy, że kopie $\Phi^{(1)}$ i $\Phi^{(2)}$ łańcucha Φ można sparować w taki sposób, by średnia odległość między nimi malała (w czasie) w tempie geometrycznym, co – w połączeniu z tzw. *warunkiem dryftu Fostera-Lapunowa* (zob. np. [DMS14, definicja 6.23]) i narzuconą na P własnością Fellera – zapewnia wykładniczą ergodyczność Φ (lemat 6.1 w [E2]);

(III) dowodzimy, że dla danego sprzężenia $(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)})$ łańcucha Φ, mającego własność wskazaną w kroku (II), odpowiadające mu sprzężenie dla procesu Ψ ma analogiczną własność – pod warunkiem, że półpotoki S_i spełniają warunek typu Lipschitza (lemat 6.2 w [E2]);

(IV) zauważamy, że przy odpowiednich założeniach dla półpotoków S_i i jądra J, gwarantujących spełnienie wszystkich warunków z kroków (I)-(III), istnienie odpowiedniego sprzężenia (asymptotycznego) trajektorii procesu Φ implikuje wykładniczą ergodyczność odpowiadającego mu PDMP Ψ (twierdzenie 6.1 w [E2]);

(V) wskazujemy dodatkowe założenie, które w połączeniu z wcześniejszymi zapewnia istnienie sprzężenia (asymptotycznego) trajektorii procesu Ψ, opisanego w kroku (II), co prowadzi nas już bezpośrednio do głównego twierdzenia pracy [E2], tj. twierdzenia 7.1 (wymagamy istnienia podstochastycznego jądra Q_J, określonego na Y^2, o właściwościach podobnych do tych, których wymaga się w pracach [H4] i [KS20], tzn.

$$Q_J((y_1,y_2),\cdot\times Y) \leq J(y_1,\cdot) \quad \text{i} \quad Q_J((y_1,y_2),Y\times\cdot) \leq J(y_2,\cdot),$$

co następnie pozwala na skonstruowanie podstochastycznego jądra $\widetilde{Q}_P$ na X^2, mającego analogiczne własności względem P; zob. lemat 7.1 w [E2]);

(VI) zauważamy, że funkcja przejścia pożądanego sprzężenia może być zdefiniowana jako suma $\widetilde{Q}_P$ i odpowiedniego uzupełniającego jądra podstochastycznego (propozycja 7.1 w [E2]).

Na szczególną uwagę zasługuje tu fakt, że w zaproponowanym podejściu widać, w jaki sposób wykładnicza ergodyczność PDMP Ψ wynika z analogicznej własności powiązanego z nim łańcucha Φ (zob. kroki (I) i (III)). Podobny efekt zaobserwujemy, gdy w kolejnych sekcjach omawiać będziemy różne własności niezmienniczych miar probabilistycznych procesów Φ i Ψ, a także zachodzące dla nich twierdzenia graniczne.

Na koniec musimy jednak zaznaczyć, że kwestia wykładniczej ergodyczności dla PDMP Ψ (w szczególności wynikającej z analogicznej własności dla łańcucha Φ) wciąż pozostaje otwarta w przypadku modelu z rodziną macierzy prawdopodobieństw $\{[\pi_{ij}(y)]_{i,j\in I}\}_{y\in Y}$ zależnych od aktualnego stanu układu.

SLLN dla rozważanej klasy PDMPs i odpowiadających im łańcuchów opisujących ich lokalizacje tuż po skokach

Wiedząc już, że dany proces ma jedyny rozkład stacjonarny, możemy oczywiście zapytać o jego aproksymowanie, np. za pomocą średnich (wielu) trajektorii próbkowych tego procesu. W związku z powyższym w pracy [H2], oprócz dowodu wykładniczej ergodyczności, prezentujemy również **dowód SLLN zarówno dla łańcucha Φ (twierdzenie 4.3), jak i dla PDMP Ψ (twierdzenie 4.7)**. Podsumowanie wyników z [H2].

SLLN dla Φ, mówiące o tym, że dla każdej funkcji $g : X \to \mathbb{R}$, która jest lipschitzowska i ograniczona, średnie $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} g(\Phi_k)$ zbiegają do $\int_X g\, d\mu_*^{\Phi}$ prawie na pewno (gdzie μ_*^{Φ} oznacza jedyną niezmienniczą miarę probabilistyczną łańcucha Φ), wynika z jego geometrycznej ergodyczności (wykazanej już w twierdzeniu 4.1 w [H2]) i zmodyfikowanej wersji [Shi03, twierdzenia 2.1], przedstawionej jako twierdzenie 6.2 w [H2], która jest wersją SLLN dla *mieszających* (ang. *mixing-type*) łańcuchów Markowa. Oryginalny wynik A. Shirikyana ([Shi03, twierdzenie 2.1]) został sformułowany dla łańcuchów Markowa ewoluujących w przestrzeniach Hilberta – jednak po dokładnym przeanalizowaniu jego dowodu widać, że wynik ten można łatwo zaadaptować do łańcuchów Markowa o wartościach w przestrzeniach polskich (twierdzenie 6.2 w [H2]).

Następnie, korzystając z *metody martyngałowej* (por. [BLBMZ15]), pokazujemy SLLN dla PDMP Ψ na podstawie już wykazanego SLLN dla Φ oraz jednoznacznej odpowiedniości niezmienniczych miar probabilistycznych procesów Ψ i Φ (zob. twierdzenie 4.4 w [H2]). Mówiąc nieco precyzyjniej, jeśli chcemy przeprowadzić dowód tego faktu, wymaga to porównania średnich $t^{-1}\int_0^t g(\Psi(s))\, ds$ i $n^{-1}\sum_{k=0}^{N_t-1} Gg(\Phi_k)$, gdzie G jest zdefiniowane w (6), $g : X \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją lipschitzowską i ograniczoną, a $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ oznacza proces zliczający zdarzenia (ang. *renewal counting process*) z momentami przyjścia (ang. *arrival times*) τ_n, tj. $N_t := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : \tau_n \le t\}$ dla $t \in \mathbb{R}_+$. Używając argumentów podobnych do tych z dowodu [BLBMZ15, lematu 2.5], pokazujemy, że różnica między tymi dwoma średnimi maleje do zera, gdy $t \to \infty$. Kolejne kroki wynikają z twierdzeń 4.3 i 4.4 w [H2].

Własności niezmienniczych miar probabilistycznych dla rozważanej klasy PDMPs i odpowiadających im łańcuchów opisujących ich lokalizacje tuż po skokach

Wiedząc, że zarówno operator przejścia P łańcucha Φ, jak i półgrupa przejścia $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ procesu Ψ mają swoje jedyne niezmiennicze miary probabilistyczne, postanowiliśmy zbadać ich właściwości.

Niech $\lambda > 0$ oznacza intensywność skoków w badanym modelu. W [H3] badamy wersję PDMP Ψ_λ, określonego wzorami (1) i (2) (oraz odpowiadającą mu wersję łańcucha Φ_λ opisującego stany tuż po skokach), taką że deterministyczna ewolucja tego procesu pomiędzy losowymi skokami jest określona przez jeden półpotok S, a mechanizm skoków opisuje jądro J zadane wzorem Podsumowanie wyników z [H3].

$$J(y, B) = \int_\Theta \mathbb{1}_B\left(w_\theta(y)\right) p_\theta(y)\vartheta(d\theta) \quad \text{dla każdego} \quad y \in Y \quad \text{i każdego} \quad B \in \mathcal{B}(Y). \tag{8}$$

Celem pracy [H3] jest wykazanie ciągłej (w odległości Forteta-Mouriera) zależności niezmienniczych miar probabilistycznych $\mu_*^{\Phi_\lambda}$ i $\mu_*^{\Psi_\lambda}$ (odpowiednio łańcucha Φ_λ i procesu Ψ_λ) od parametru λ, określającego intensywność losowych skoków (zob. twierdzenia 5.2 i 5.3 w [H3]; por. rozdział 4.3.3 tego autoreferatu). Idee leżące u podstaw dowodów tych wyników można krótko podsumować w niżej opisany sposób. Po pierwsze

– zauważamy, że dla dowolnego parametru $\lambda > 0$ i dowolnej miary μ należącej do pewnej podprzestrzeni przestrzeni Banacha $\mathcal{M}_{\text{sig}}(Y)$ wszystkich *skończonych i borelowskich miar znakozmiennych* (ang. *signed measures*) określonych na Y, miarę μP_λ, gdzie P_λ jest regularnym operatorem Markowa indukowanym przez funkcję przejścia

$$\begin{aligned} P_\lambda(y,B) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} J(S(t,y),B)\,dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_\Theta \mathbb{1}_B\left(w_\theta(S(t,y))\,p_\theta(S(t,y))\,\vartheta(d\theta)\,dt, \quad y\in Y,\ \ B\in\mathcal{B}(Y),\end{aligned} \tag{9}$$

łańcucha Φ_λ, można zapisać jako odpowiednią *całkę Bochnera* (zob. definicję w [DU77] lub w sekcji 2 w [H3]), tj.

$$\mu P_\lambda = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \mu \Pi_{(t)}\,dt,$$

gdzie

$$\Pi_{(t)}(y,B) := \int_\Theta \mathbb{1}_B\left(w_\theta(S(t,y))\right) p_\theta(S(t,y))\,\vartheta(d\theta) \quad \text{dla} \quad y\in Y \quad \text{i} \quad B\in\mathcal{B}(Y) \tag{10}$$

(zob. lemat 4.1 w [H3]). Po drugie – w lemacie 4.2 w [H3] pokazujemy, że dla każdej miary $\mu\in\mathcal{M}_{\text{sig}}(Y)$ norma Forteta-Mouriera miary $\mu\Pi_{(t)}$ jest nie większa niż norma Forteta-Mouriera μ pomnożona przez pewną stałą (zależną od t i parametrów modelu z wyłączeniem λ). W lemacie 4.4 w [H3] pokazujemy z kolei, że odwzorowanie $(\lambda,\mu)\mapsto \mu P_\lambda$ jest wspólnie ciągłe. Jeżeli więc odwołamy się do twierdzenia 4.1 z pracy [H2], to otrzymamy, że (przy jego założeniach) łańcuch Φ jest geometrycznie ergodyczny (w odległości Forteta-Mouriera). Ponadto dowodzimy, że dla dowolnego λ z pewnego przedziału $[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$ i dowolnej miary probabilistycznej μ z pierwszym momentem skończonym, odległość Forteta-Mouriera pomiędzy miarami μP_λ^n i $\mu_*^{\Phi_\lambda}$ zbiega do zera jednostajnie względem λ (lemat 4.5 w [H3]). Wreszcie, korzystając z powyższych obserwacji, możemy wnioskować o ciągłości (w topologii słabej zbieżności miar probabilistycznych) odwzorowania $\lambda\mapsto\mu_*^{\Phi_\lambda}$ (twierdzenie 5.2 w [H3]). W rezultacie, mając na uwadze wzajemną odpowiedniość miar $\mu_*^{\Phi_\lambda}$ i $\mu_*^{\Psi_\lambda}$, wykazaną w twierdzeniu 4.4 w [H2], otrzymujemy ciągłość odwzorowania $\lambda\mapsto\mu_*^{\Psi_\lambda}$ (twierdzenie 5.3 w [H3]).

Podczas gdy twierdzenia graniczne (takie jak SLLN czy CLT) stanowią teoretyczne podstawy odpowiedniej aproksymacji miar niezmienniczych poprzez obserwację lub symulację (wielu) próbkowych trajektorii badanych procesów, wyniki z artykułu [H3] potwierdzają stabilność tej procedury – przynajmniej lokalnie w przestrzeni parametrów. Jest to warunek wstępny dla rozwoju teorii bifurkacji. Co więcej, do zastosowań w teorii sterowania lub estymacji parametrów (zob. np. [GHLSG19]) potrzebna byłaby nawet silniejsza regularność tej zależności od parametru (tj. różniczkowalność w odpowiedniej normie w przestrzeni miar).

Dodajmy również, że ponieważ rozważany model matematyczny ma na celu opisanie pewnych zjawisk rzeczywistych (takich jak autoregulacja genów, ekspresja genów czy podział komórek; por. [H2], a także [LM99, MTKY13, HHS16]), pożądana jest ciągła zależność miary niezmienniczej od parametru modelu.

Natomiast w pracy [E3] rozważamy wersje procesów Φ i Ψ o przestrzeni stanów $X := Y \times I$, gdzie Y jest domkniętym (ale niekoniecznie ograniczonym, w przeciwieństwie do [BLBMZ15]) podzbiorem $\mathbb{R}^d$. Mechanizm skoków jest opisany przez jądro J, określone wzorem (4), gdzie Θ jest albo przedziałem w $\mathbb{R}$, albo zbiorem skończonym, a $\nu = \delta_0$. Głównym celem pracy [E3] jest **wskazanie pewnych, możliwych do sprawdzenia w praktyce, warunków, które implikowałyby absolutną ciągłość wszystkich stacjonarnych rozkładów PDMP Ψ, które odpowiadają ergodycznym rozkładom stacjonarnym powiązanego z nim łańcucha Φ** (zob. twierdzenie 3.2 w [E3]). Zaznaczmy, że mowa tu o absolutnej ciągłości względem miary produktowej $\bar{l}_d$, która jest iloczynem d-wymiarowej miary Lebesgue'a i miary liczącej na I. W praktyce problem sprowadza się do badania niezmienniczych rozkładów łańcucha Φ. Podsumowanie wyników z [E3].

Należy podkreślić, że założone w twierdzeniu 4.4 w [H2] warunki nie gwarantują absolutnej ciągłości jedynego (a więc ergodycznego) rozkładu stacjonarnego procesu Φ (bądź Ψ). Najprostszym kontrprzykładem może być tutaj układ z jedną transformacją $w_1 \equiv 0$, którego jedyny rozkład stacjonarny to oczywiście δ_0.

Z drugiej strony dobrze wiadomo, że gdy operator przejścia łańcucha Markowa zachowuje absolutną ciągłość miar, to każdy ergodyczny rozkład stacjonarny tego łańcucha musi być albo singularny, albo absolutnie ciągły (zob. [LM94, lemat 2.2, wraz z uwagą 2.1]; por. [BH12, twierdzenie 6]). Jak wyjaśniono w lemacie 3.1 w [E3], dzieje się tak w przypadku łańcucha Φ, o ile np. wszystkie transformacje w_θ i $S_i(t,\cdot)$ są niesingularne względem miary Lebesgue'a. Jednak, jak pokazano w przykładzie 5.2 w [E3], nawet przy takim założeniu warunki narzucone w [H2] nie gwarantują, że jedyna niezmiennicza miara probabilistyczna łańcucha Φ – a tym samym odpowiadająca jej jedyna niezmiennicza miara probabilistyczna procesu Ψ – będzie absolutnie ciągła. Należy również podkreślić, że singularność niektórych z transformacji w_θ niekoniecznie wyklucza absolutną ciągłość miar niezmienniczych (zob. np. [Löc18]).

Oczywiście wspomniana wyżej dychotomia pomiędzy absolutną ciągłością a singularnością miar znacznie upraszcza analizę, gdyż jeśli ma się ją na uwadze, wystarczy zagwarantować, że „ciągła część" danego ergodycznego rozkładu stacjonarnego μ_*^Φ łańcucha Φ jest nietrywialna. Można to zrobić np. poprzez wykazanie istnienia małego, względem miary $\bar{l}_d$, zbioru otwartego (w sensie [MT93b]), który jest *jednostajnie osiągalny* (ang. *uniformly accessible*) z pewnego mierzalnego podzbioru przestrzeni X z dodatnią miarą μ_*^Φ, w określonej liczbie kroków (zob. propozycję 3.1 w [E3]).

Robimy to, korzystając z pewnych pomysłów z pracy [BLBMZ15] (por. lemat 3.3 w [E3]). Jeśli łańcuch Φ jest asymptotycznie stabilny (co ma miejsce, np. gdy przyjmiemy założenia z [H2]) oraz gdy punkt (y_0, i_0) należy do nośnika miary μ_*^Φ, to twierdzenie Portmanteau (zob. np. [Kle13, twierdzenie 2.1]) implikuje, że każde otwarte otoczenie (y_0, i_0) jest jednostajnie osiągalne z innego (wystarczająco małego) otoczenia tego punktu z dodatnią miarą μ_*^Φ, w danej liczbie kroków (por. wniosek 3.1 w [E3]). Ogólnie rzecz ujmując, taką własność może być jednak trudno bezpośrednio zweryfikować, a argument działa tylko wtedy, gdy łańcuch jest asymptotycznie stabilny. Dlatego proponujemy również bardziej praktyczny warunek zapewnienia osiągalności (ang. *accessibility*) (por. lemat 3.4 w [E3]), który dotyczy określonych powyżej składowych modelu ($\{w_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ i $\{S_i\}_{i\in I}$).

CLT i LIL dla procesów Markowa wykładniczo ergodycznych w normie Forteta-Mouriera

Aby w pełni scharakteryzować pod kątem własności ergodycznych rozważaną klasę PDMPs i powiązanych z nimi łańcuchów opisujących ich lokalizacje tuż po skokach, pozostało nam wskazać warunki, które zagwarantują zachodzenie CLT i LIL.

Początkowo naiwnie zakładaliśmy, że wystarczy skorzystać z pewnych ogólnych wersji tych twierdzeń granicznych (tak jak w przypadku SLLN dla Φ w [H2]) dla procesów Markowa o wartościach w polskich przestrzeniach metrycznych i wykładniczo ergodycznych w metryce Wassersteina (por. np. [KW12, twierdzenie 2.1] i [BMS12, twierdzenie 1]). Jednakże **wersje CLT i LIL istniejące w tamtym momencie nie były (zgodnie z naszą wiedzą) odpowiednie dla badanych przez nas losowych układów dynamicznych (kwestię tę omówimy szerzej w dalszej części tego rozdziału). Stanowiło to silną motywację do zaproponowania nowych – w pewnym sensie bardziej ogólnych – wersji tych twierdzeń granicznych.**

CLT jest, obok SLLN, najbardziej fundamentalnym twierdzeniem granicznym dla procesów stochastycznych. Dla jednorodnego w czasie procesu Markowa $\psi := \{\psi(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (odpowiednio - łańcucha Markowa $\phi := \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$) o wartościach w polskiej przestrzeni metrycznej E, z dowolną półgrupą przejścia $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (funkcją przejścia P) i jedyną niezmienniczą miarą probabilistyczną μ_* (w zależności od kontekstu oznaczającą miarę niezmienniczą albo dla P, albo dla $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$), oraz dla dowolnej funkcji $g : E \to \mathbb{R}$, która jest lipschitzowska ograniczona, i $\bar{g} := g - \int_E g\, d\mu_*$ mówimy, że proces $\{\bar{g}(\psi(t))\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ($\{\bar{g}(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$) spełnia CLT, jeśli średnia

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \bar{g}\left(\psi(s)\right) ds \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{g}\left(\phi_i\right)\right)$$

zbiega według prawdopodobieństwa, gdy $t \to \infty$ ($n \to \infty$), do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą zero.

Na LIL można z kolei patrzeć jak na bardziej precyzyjną wersję SLLN, w której tempo zbieżności (w porównaniu z tym z SLLN) jest poprawione z $\mathcal{O}(t)$ do $\mathcal{O}(\ln(\ln(t)))$. Mówiąc dokładniej, LIL dostarcza precyzyjnych wartości dolnej i górnej granicy prawie wszystkich ciągów, które składają się z odpowiednio przeskalowanych całek (lub sum częściowych) z trajektorii próbkowych badanego procesu stochastycznego. Co więcej, LIL ilustruje różnicę pomiędzy stwierdzeniami mającymi w tezie zbieżność z prawdopodobieństwem 1 a tymi, które mówią o zbieżności według rozkładu – takimi jak CLT. Korzystając z notacji wprowadzonej powyżej, powiemy, że proces $\{\bar{g}(\psi(t))\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ($\{\bar{g}(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$) spełnia LIL, o ile

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \bar{g}(\psi(s))ds}{\sqrt{2t\ln(\ln(t))}} = \bar{\sigma}(\bar{g}) \quad \text{i} \quad \liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \bar{g}(\psi(s))ds}{\sqrt{2t\ln(\ln(t))}} = -\bar{\sigma}(\bar{g}) \quad \text{p.n.}$$
$$\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\bar{g}\left(\phi_i\right)}{\sqrt{2n\ln(\ln(n))}} = \sigma(\bar{g}) \quad \text{i} \quad \liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\bar{g}\left(\phi_i\right)}{\sqrt{2n\ln(\ln(n))}} = -\sigma(\bar{g}) \quad \text{p.n.}\right)$$

dla pewnej $0 < \bar{\sigma}(\bar{g}) < \infty$ ($0 < \sigma(\bar{g}) < \infty$).

Tło historyczne badań nad twierdzeniami granicznymi dla procesów Markowa.

CLT i LIL początkowo formułowano jedynie dla niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Następnie zaproponowano ich uogólnione wersje dla martyngałów (zob. np. CLT w [Lév35] i LIL w [HS73, HH80]), co pozwoliło dowodzić kolejnych twierdzeń granicznych – tym razem już dla procesów Markowa.

Omówmy najpierw wyniki dla procesów Markowa z czasem dyskretnym (łańcuchów). Pierwsze wyniki uzyskano dla łańcuchów stacjonarnych, dla których istnieje *rozwiązanie równania Poissona μ_*-całkowalne z kwadratem* (zob. wersje CLT w [GL78, GL81, DL01]; liczne wyniki związane z klasycznym LIL podsumowano natomiast w [Bin86]). W kolejnych latach podjęto wiele prób złagodzenia tego założenia. Przykładowo, [KV86] odnosi się do tak zwanych *odwracalnych łańcuchów Markowa* (ang. *reversible Markov chains*) i opiera się na pewnego rodzaju przybliżaniu rozwiązań równania Poissona (zob. również [Lim00], gdzie wykazano LIL dla odwracalnych procesów Markowa). Z kolei [MW00] i [ZW08] proponują pewne (w praktyce dość łatwe do sprawdzenia) warunki, dotyczące odpowiednio CLT i LIL oraz opierające się na zbieżności pewnych szeregów. Innym wartym odnotowania artykułem jest [JT20], w którym główna hipoteza [MW00] została udowodniona w przypadku jedynie subgeometrycznego tempa zbieżności (w metryce Wassersteina) rozkładu łańcucha Markowa do jego rozkładu stacjonarnego.

W ostatnim czasie uwaga badaczy skupia się jednak na *niestacjonarnych łańcuchach Markowa* (czyli takich, które niekoniecznie startują ze swojego rozkładu stacjonarnego). Pewne klasyczne wyniki dotyczące CLT i LIL dla takich łańcuchów można znaleźć w [MT93b]. Obejmują one te łańcuchy Markowa, które są *(dodatnio) powracające w sensie Harrisa i aperiodyczne* (ang. *positive Harris reccurent and aperiodic Markov chains*) (lub równoważnie *nieredukowalne* i ergodyczne w normie wahania całkowitego) i dla których spełniony jest warunek dryfu w kierunku małych zbiorów (co gwarantuje istnienie odpowiedniego rozwiązania równania Poissona). Takie wymagania są jednak praktycznie nieosiągalne, gdy rozważamy ogólne (niekoniecznie lokalnie zwarte) przestrzenie stanów. Dlatego w celu wykazania twierdzeń granicznych dla geometrycznie ergodycznych (w metryce Wassersteina) łańcuchów Markowa o wartościach w przestrzeniach polskich w kilku ostatnich pracach – w tym [BMS12] i [GHSZ19] – zaproponowano zupełnie nowe sposoby rozwiązania tego problemu. Co ważne, w żadnej z tych prac nie wymaga się istnienia rozwiązania równania Poissona. Nasze wyniki, zaprezentowane w artykułach [H4] i [H5], mają podobny charakter, aczkolwiek są pod pewnymi względami bardziej praktyczne (co uzasadniają odpowiednie przykłady w tych artykułach; por. sekcja 4 w [H4] i sekcja 5 w [H5]).

Podsumowanie wyników z [H4] i [H5].

W pracach [H4] i [H5] **dowodzimy odpowiednio pewnych wersji CLT i LIL (w przypadku LIL dowodzimy nawet jego wariantu funkcjonalnego, tj. *zasady niezmienniczości Strassena dla LIL*) dla podklasy niestacjonarnych łańcuchów Markowa ewoluujących w ogólnych (polskich) przestrzeniach metrycznych, przy czym wykorzystujemy w tym celu rodzaj geometrycznego mieszania w odległości Forteta-Mouriera (zob. definicję w [Hai02]) i warunek typu Fostera-Lapunowa („drugiego rzędu" dla CLT i „wyższego niż drugi rzędu" dla LIL).** Jak już wspomnieliśmy wyżej, podobne wyniki – choć oparte na geometrycznym mieszaniu w odległości Wassersteina – przedstawiono w [GHSZ19] i [BMS12]. Dodatkowo warunek mieszania założony w [GHSZ19] i [BMS12] ma nieco inny charakter niż ten w naszych pracach, a który w szczególności **nie wymaga zależności od odległości między miarami początkowymi**. Mówiąc dokładniej, w [H4] i [H5] dowody głównych wyników (tj. twierdzenia 3.2 w [H4] i twierdzenia 4.7 w [H5]) opierają się na następującym warunku: dla dowolnych dwóch borelowskich miar probabilistycznych μ_1 i μ_2 istnieje funkcja ciągła $V : E \to \mathbb{R}_+$ oraz pewne stałe $c > 0$ i $q \in (0, 1)$, takie że

$$d_{\mathrm{FM}}(\mu_1 P^n, \mu_2 P^n) \le cq^n \left(1 + \int_E V\, d(\mu_1 + \mu_2)\right) \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{11}$$

gdzie d_{FM} oznacza metrykę Forteta-Mouriera (co oczywiście odnosi się do pomysłów M. Hairera pochodzących z [Hai02]). Z kolei w [BMS12] i [GHSZ19] wymaga się, aby dla dowolnych dwóch borelowskich miar probabilistycznych μ_1 i μ_2 (o skończonych pierwszych momentach) istniały stałe $c > 0$ i $q \in (0, 1)$, takie że

$$d_{\mathrm{W}}(\mu_1 P^n, \mu_2 P^n) \le cq^n d_{\mathrm{W}}(\mu_1, \mu_2) \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{12}$$

gdzie d_{W} oznacza metrykę Wassersteina.

Motywacja do zastąpienia warunku (12) warunkiem (11) wynika z prowadzenia badań nad pewnymi losowymi układami dynamicznymi, omówionymi już wcześniej w tym autoreferacie (zob. rozdział 4.3.2: *PDMPs sterowane przez półpotoki przełączane losowo*, w tym definicje (3)-(5)), i wykorzystywanymi głównie w biologii molekularnej (por. [MTKY13, HHS16, LM99] i [H2]), do których nie byliśmy w stanie bezpośrednio zastosować ani [BMS12, twierdzenia 1], ani [GHSZ19, twierdzenia 5.1]. Wynika to przede wszystkim z faktu, że przy pewnych ogólnych warunkach nałożonych na rozważany model (które wydają się być rozsądne z punktu widzenia większości zastosowań) nierówność (12) okazuje się być trudna – lub nawet niemożliwa – do wykazania, podczas gdy te same warunki w naturalny sposób implikują (11) (co pokazano np. w twierdzeniu 4.1 w [H2]).

Warto także podkreślić, że w pracach [H4] i [H5] nie zakładamy bezpośrednio warunku (11), ponieważ zazwyczaj niełatwo udowodnić go wprost. Zamiast tego proponujemy zestaw warunków – stosunkowo łatwych do zweryfikowania – które prowadzą nie tylko do własności geometrycznego mieszania (11), lecz także do tego, że istnieje jedyna niezmiennicza miara probabilistyczna badanego procesu (co wynika z [KS20, twierdzenia 2.1]), jak również do pożądanych twierdzeń, tj. CLT (twierdzenie 3.2 w [H4]) i LIL (twierdzenie 4.7 w [H5]).

Klasę niestacjonarnych łańcuchów Markowa-Fellera, dla których dowodzimy CLT i LIL, możemy scharakteryzować przez dwie własności. Pierwsza z nich dotyczy istnienia odpowiedniego sprzężenia markowowskiego (a więc sparowanego łańcucha Markowa), którego funkcja przejścia może być rozbita na dwie części, z których jedna jest zwężająca i – w pewnym sensie – dominująca nad drugą. Konstrukcję takiego sprzężenia adaptujemy z prac [Cza18, KS20], które z kolei inspirowane są wynikami M. Hairera [Hai02]. W ramach tego podejścia możemy oszacować (z tempem geometrycznym) średnią odległość między sparowanymi kopiami badanego łańcucha. Wynik ten, przedstawiony w lematach 2.2 i 2.3 w [H4], nieco uogólnia własność geometrycznego mieszania pokazaną przez R. Kapicę i M. Ślęczkę w dowodzie [KS20, twierdzenie 2.1]. Dowody tych lematów są interesujące same w sobie, a ponadto wyjaśniają rozumowanie przedstawione w [KS20]. W rzeczywistości lematy 2.2 i 2.3 odgrywają kluczową rolę zarówno w [H4], jak i w [H5]. Drugą właściwością charakteryzującą wyróżnioną klasę łańcuchów Markowa-Fellera jest nieliniowy warunek typu Lapunowa. Jednymi z najprostszych klas łańcuchów Markowa spełniających obie wymagane własności są te generowane przez losowe IFSs z dowolną liczbą przekształceń, i względem których można przyjąć założenie, że są zwężające w średniej (zob. np. [Wer05, HS06, Ś11, KS20]).

W dowodzie twierdzenia 3.2 w [H4] korzystamy również z wyników [MW00] M. Maxwella i M. Woodroofa, które czynią go bardziej zwięzłym i mniej technicznym niż klasyczne dowody oparte bezpośrednio na metodach martyngałowych. Dowody w [D2] i [Hor16] przeprowadzono w tym samym duchu, chociaż tylko dla pewnych szczególnych przypadków łańcuchów Markowa. Warto także wspomnieć, że **zaproponowane w [H4] warunki są wystarczające do wykazania *zasady niezmienniczości Donskera dla CLT* (por. [Bil99]), o ile łańcuch Markowa jest stacjonarny**.

Należy przy tym wspomnieć, że niektóre techniki dowodowe zastosowane w [H5] adaptujemy z artykułów [BMS12] i [D1], które z kolei odnoszą się do wyników C.C. Heydego i D.J. Scotta [HS73] dla martyngałów. Na początku sekcji 4 w [H5] przedstawiamy również kilka ogólnych obserwacji dotyczących martyngałów (zob. lematy 3.2-3.5), które są przydatne w dowodzie głównego wyniku, tj. twierdzenia 4.7.

Aby uzasadnić przydatność nowo wprowadzonych ogólnych wersji CLT (twierdzenie 3.2 w [H4]) i LIL (twierdzenie 4.7 w [H5]), korzystamy z nich, dowodząc CLT (twierdzenie 4.1 w [H4]) i LIL (twierdzenie 5.2 w [H5]) dla konkretnego niestacjonarnego łańcucha Markowa Φ, którego funkcja prawdopodobieństwa przejścia jest

wyrażona przez wzór (5), a którego możliwe zastosowania omówiono w rozdziale 4.3.2: *PDMPs sterowane przez półpotoki przełączane losowo* tego autoreferatu.

Przejdźmy teraz do omówienia twierdzeń granicznych dla procesów Markowa z czasem ciągłym. Podobnie jak w przypadku dyskretnym, początkowo były one formułowane jedynie dla procesów stacjonarnych (np. dla procesów ergodycznych z *generatorami normalnymi* w [Hol05], jako rozszerzenie wyników z [GL81]; zob. również [OLK12]). Następnie uzyskano kilka wyników dotyczących niestacjonarnych procesów Markowa z czasem ciągłym. Prawdopodobnie najbardziej ogólnym (jak dotąd) wynikiem tego rodzaju jest [KW12, twierdzenie 2.1] (jego odpowiednik dotyczący przypadku czasu dyskretnego znajdziemy w [GHSZ19]).

W [E1] wykazujemy wersję CLT dla ciągłych w czasie procesów Markowa-Fellera (z polską przestrzenią stanów), które są wykładniczo ergodyczne w metryce Forteta-Mouriera i spełniają ciągłą wersję warunku typu Fostera-Lapunowa. Ponownie główną motywacją do sformułowania i udowodnienia takiego twierdzenia jest niemożność bezpośredniego zastosowania istniejącej wersji CLT (w tym przypadku [KW12, twierdzenia 2.1] T. Komorowskiego i A. Walczuka) do pewnej podklasy PDMPs, przynajmniej przy (względnie naturalnych) założeniach narzuconych w propozycji 7.2 w [H2] (por. rozdział 4.3.2: *PDMPs sterowane przez półpotoki przełączane losowo* tego autoreferatu).

Podsumowanie wyników z [E1].

Głównym problemem w omawianym przypadku jest trudność ustalenia, w jaki sposób pokazać wykładnicze mieszanie w sensie warunku (H1), zakładanego w [KW12], który wymaga pewnej formy lipschitzowskiej ciągłości (względem *metryki Wassersteina* d_{W}) każdego operatora $P(t)$. Dokładniej rzecz ujmując, autorzy zakładają istnienie stałych $\gamma > 0$ oraz $\bar{c} < \infty$, takich że dla dowolnych dwóch borelowskich miar probabilistycznych μ_1 i μ_2 (o skończonych pierwszych momentach) zachodzi warunek

$$d_{\mathrm{W}}\left(\mu_1 P(t), \mu_2 P(t)\right) \leq \bar{c} e^{-\gamma t} d_{\mathrm{W}}\left(\mu_1, \mu_2\right) \quad \text{dla każdego} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{13}$$

Zauważyliśmy zatem potrzebę zaproponowania nowego, nieco bardziej użytecznego (podobnie jak w przypadku dyskretnym) kryterium, które wymagałoby słabszej formy warunku (13). Dokładniej mówiąc, zamiast (13) wymagamy istnienia pewnej stałej $\gamma > 0$, takiej że dla dowolnych dwóch borelowskich miar probabilistycznych μ_1 i μ_2 istnieje funkcja ciągła $V : E \to [0, \infty)$ oraz stałe $\bar{c} > 0$, $\delta \in (0,1)$ o własności

$$d_{\mathrm{FM}}\left(\mu P(t), \nu P(t)\right) \leq \bar{c} e^{-\gamma t} \left(\int_E V \, d(\mu + \nu) + 1 \right)^{\delta} \quad \text{dla każdego} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{14}$$

Dodatkową zaletą naszego podejścia jest to, że metryka Forteta-Mouriera jest słabsza niż metryka Wassersteina – m.in. w tym sensie, że umożliwia wykorzystanie technik sprzęgania (wprowadzonych przez M. Hairera w [Hai02]) do wykazania wykładniczego mieszania w metryce d_{FM}. To podejście zawodziłoby w przypadku metryki d_{W}.

Jak wspomniano wcześniej, dowód naszego głównego wyniku, tj. twierdzenia 2.1 w [E1], pod wieloma względami opiera się na rozumowaniu przedstawionym w [KW12]. Jednak należy podkreślić, że bez założenia pewnego rodzaju lipschitzowskości półgrupy $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, takiej jak (13) (lub jej odpowiednik w przypadku dyskretnym, zakładany np. w [GHSZ19]; zob. również [BMS12]), udowodnienie głównych twierdzeń granicznych – takich jak CLT czy LIL – wymaga dużo bardziej subtelnych argumentów, co znajduje odzwierciedlenie również w pracach [H4], [H5] czy [KPS13]. Co najważniejsze, w przypadku warunku (14) tzw. *korektor* $\chi : E \to \mathbb{R}$, określony wzorem

$$\chi(x) = \int_0^\infty P(t)\bar{g}(x)\, dt \quad \text{dla dowolnego} \quad x \in E,$$

nie musi być lipschitzowski (co jest istotnym argumentem w dowodzie [KW12, twierdzenia 2.1]), a jedynie ciągły. Inny problem dotyczący naszego podejścia wynika z faktu, że słaba zbieżność rozkładu procesu (do jego rozkładu stacjonarnego), gwarantowana przez (14), daje zbieżność odpowiednich całek, o ile całkowane funkcje są nie tylko ciągłe, lecz także ograniczone – co oczywiście nie jest wymagane wtedy, gdy korzystamy z metryki Wassersteina. Pokonanie tej trudności jest możliwe (zob. lemat 3.9 w [E1]) dzięki zastosowaniu [Bog07, lematu 8.4.3], który pozwala zastąpić ograniczoność całkowanej funkcji jej jednostajną całkowalnością względem rodziny miar składających się na rozważany ciąg zbieżny.

W sekcji 4 w [E1] omawiamy szczegółowo reprezentację σ^2, czyli wariancji granicznej rozkładu normalnego występującego w twierdzeniu 2.1, a w sekcji 5 w [E1] uzasadniamy użyteczność udowodnionego kryterium (tj. twierdzenia 2.1), wykorzystując je do wykazania CLT dla PDMP Ψ rozważanego w [E2] (zob. wniosek 5.1 w [E1]).

Naszym przyszłym celem będzie natomiast wykazanie odpowiednika twierdzenia 2.1 w [E1], który dotyczyłby LIL dla procesów Markowa-Fellera z czasem ciągłym (z polską przestrzenią stanów), które są wykładniczo ergodyczne w odległości Forteta-Mouriera i spełniają ciągłą wersję warunku Fostera-Lapunowa. Pewnych inspiracji można szukać nie tylko w [E1], lecz także w [KPS13].

Podsumowanie wyników z [E4].

Na koniec podsumujmy krótko wyniki przedstawione w [E4]. **Głównym celem tej pracy jest udowodnienie LIL dla określonej klasy PDMP (omówionej szczegółowo w rozdziale 4.3.2: *PDMPs sterowane przez półpotoki przełączane losowo* tego autoreferatu). LIL dla Ψ** (zob. definicje (1) i (2)) **celowo dowodzimy w taki sposób, by wykorzystać (wykazane już w twierdzeniu 5.2 w [H5]) LIL dla odpowiadającego mu łańcucha Φ opisującego jego stany tuż po skokach.**

Zasadniczo wybrana przez nas metoda dowodowa pozwala podzielić główny problem na dwa pomniejsze zagadnienia, które analizujemy oddzielnie (odpowiednio w sekcjach 3.2 i 3.3 w [E4]). Pierwsze z nich rozwiązujemy, korzystając z wersji LIL dla martyngałów całkowalnych z kwadratem, której dowód w znacznej mierze opiera się na zastosowaniu [HS73, twierdzenia 1], a także technik sprzęgania – w podobny sposób, jak w dowodzie lematu 2.2 w [H4]. Rozwiązanie drugiego zagadnienia wymaga skorzystania z LIL dla łańcucha Φ powiązanego z PDMP Ψ.

Podsumowując ten i poprzednie rozdziały niniejszego autoreferatu, zwróćmy uwagę, że trudność naszych badań wynika z faktu, iż na przestrzeń fazową rozważanego procesu nie nakładamy żadnych istotnych restrykcji, takich jak np. zwartość. Założenie zwartości (czy nawet lokalnej zwartości) ograniczyłoby zakres stosowalności otrzymanych wyników jedynie do przestrzeni skończenie wymiarowych. Wiemy jednak, że modelowanie wielu zjawisk rzeczywistych możliwe jest tylko w ramach przestrzeni funkcyjnych, stanowiących uniwersa nieskończenie wymiarowe (np. w modelu autoregulacji genu rozpatruje się przestrzeń fazową złożoną z funkcji ciągłych określających koncentrację związków chemicznych w poszczególnych punktach cytoplazmy komórki).

Losowe homeomorfizmy określone na odcinku

Podsumowanie yników z [H6].

W [H6] **rozważamy IFS generowany przez homeomorfizmy zachowujące orientację na przedziale $[0, 1]$, wcześniej badany (między innymi) przez K. Czudka i T. Szarka w [CS20], i dowodzimy, że oprócz CLT (patrz [CS20, twierdzenie 4]), spełnia on także LIL.**

Przypomnijmy najpierw definicję *dopuszczalnego* (ang. *admissible*) IFS. Niech $f_1, \ldots, f_N$ będą rosnącymi homeomorfizmami przedziału $[0,1]$, takimi że dla każdego $x \in (0,1)$ istnieją indeksy $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, dla których $f_i(x) < x < f_j(x)$. Zakładamy, że wszystkie homeomorfizmy są różniczkowalne w 0 i 1 oraz mają pochodne różne od zera. Ponadto niech $(p_1, ..., p_N)$ będzie wektorem prawdopodobieństwa, takim że

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \log\left(f_i'(0)\right) > 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{N} p_i \log\left(f_i'(1)\right) > 0.$$

Wówczas rodzinę $(f_1, \ldots, f_N; p_1, \ldots, p_N)$ nazywamy ***dopuszczalnym IFS***.

Ustalmy dowolny dopuszczalny IFS $(f_1, \ldots, f_N; p_1, \ldots, p_N)$. Zauważmy, że generuje on jądro stochastyczne $P : [0,1] \times \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$ opisane wzorem

$$P(x, A) = \sum_{i=1}^{N} p_i \delta_x \left(f_i^{-1}(A)\right) \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in [0,1], \quad A \in \mathcal{B}([0,1]). \tag{15}$$

Ponadto odpowiadający mu regularny operator Markowa P jest fellerowski ze względu na ciągłość funkcji f_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$.

W dalszej części tego rozdziału przez $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będziemy oznaczać łańcuch Markowa z funkcją przejścia P, zdefiniowany na przestrzeni $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}([0,1]^{\mathbb{N}}))$ wyposażonej w odpowiedni zbiór $\{\mathbb{P}_\nu\}_\nu$ miar probabilistycznych na $\mathcal{B}([0,1]^{\mathbb{N}})$, takich że $\mathbb{P}_\nu(X_{n+1} \in A | X_n = x) = P(x, A)$ i $\mathbb{P}_\nu(X_1 \in A) = \nu(A)$ dla każdej borelowskiej miary probabilistycznej ν na $[0,1]$.

W artykule [CS20], oprócz dowodu CLT, znajduje się także prosty dowód jednoznacznej ergodyczności (ang. *unique ergodicity*) operatora Markowa P, określonego przez równość (15), w otwartym przedziale $(0,1)$. Dokładniej rzecz ujmując, [CS20, twierdzenie 1] mówi, że P posiada jedyną niezmienniczą miarę probabilistyczną μ_* na $(0,1)$, która jest bezatomowa, a [CS20, twierdzenie 2] daje asymptotyczną stabilność operatora P w przestrzeni miar probabilistycznych z nośnikiem $(0,1)$ (tzn. $\mu_*((0,1)) = 1$ i $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \varphi \, d(\mu P^n) = \int_{[0,1]} \varphi \, d\mu_*$ dla każdej funkcji ciągłej $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$).

Należy podkreślić, że historycznie takie zjawisko zostało po raz pierwszy udowodnione przez L. Alsedę i M. Misiurewicza dla pewnych układów funkcyjnych składających się z homeomorfizmów kawałkami liniowych (zob. [AM14]). Ogólniejsze IFSs były następnie rozważane przez M. Gharaei i A.J. Homburga w [GH17] ([CS20, twierdzenia 1 i 2] są jedynie powtórzeniem tych argumentów). Ostatnio D. Malicet również wykazał jednoznaczną ergodyczność jako konsekwencję własności zwężania dla jednorodnych w czasie spacerów losowych po grupie topologicznej homeomorfizmów zdefiniowanych na okręgu (zob. [Mal17]). Jego dowód z kolei opiera się na zasadzie niezmienniczości A. Avili i M. Viany (por. [AV10]).

Niech $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją lipschitzowską, taką że $\int_{[0,1]} \varphi \, d\mu_* = 0$, gdzie μ_* jest jedyną niezmienniczą miarą probabilistyczną operatora P na $(0,1)$, oraz niech $\{X_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie łańcuchem Markowa z funkcją przejścia P, określoną przez (15), startującym z rozkładu μ_* (a więc stacjonarnym łańcuchem Markowa z funkcją przejścia P).

Dowód CLT dla $\{\varphi(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ podany w pracy [CS20] opiera się na wykorzystaniu warunku Maxwella-Woodroofe'a [MW00] dla ergodycznych stacjonarnych łańcuchów Markowa. Bezpośrednie zastosowanie wyników z [MW00] pozwala udowodnić CLT dla stacjonarnego łańcucha Markowa $\{\varphi(X_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ – tak zwane *wyżarzone* (ang. *annealed*) CLT. Natomiast jeśli dodatkowo zastosujemy techniki sprzęgania do oceny odległości między transformatą Fouriera stacjonarnego łańcucha Markowa i transformatą Fouriera dowolnego niestacjonarnego łańcucha Markowa, to uzyskamy tak zwane *wygaszone* (ang. *quenched*) CLT.

Podobnie w [H6] najpierw udowadniamy LIL dla stacjonarnego łańcucha Markowa $\{\varphi(X_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (propozycja w [H6]). Argumenty w tym przypadku opierają się na wynikach O. Zhao i M. Woodroofe'a [ZW08]. Dokładniej mówiąc, aby pokazać LIL dla łańcucha $\{\varphi(X_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$, sprawdzamy warunek Zhao-Woodroofe'a w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{3/2}\left\|\sum_{k=1}^{n}P^k\varphi\right\|_{L^2(\mu_*)}<\infty,$$

gdzie $\|\cdot\|_{L^2(\mu_*)}$ oznacza normę w przestrzeni L^2 względem niezmienniczej miary probabilistycznej μ_* operatora P na $(0,1)$ (por. [ZW08, twierdzenie 1 i wniosek 1]). **Następnie, korzystając z obliczeń podanych w [CS20], wykazujemy wygaszone LIL (twierdzenie w [H6]).**

Ostatnio udowodniono twierdzenia graniczne (zarówno CLT, jak i LIL) w przypadku różnych niestacjonarnych procesów Markowa (zob. np. nasze prace [H4] i [H5], omówione w poprzedniej sekcji, a także artykuły [DL01, LS05, KW12, OLK12, BMS12, GHSZ19]). Większość z nich jest sformułowana dla procesów Markowa z prawdopodobieństwami przejścia spełniającymi własność luki spektralnej w normie całkowitego wahania lub przynajmniej w normie Wassersteina/Forteta-Mouriera. Nie jest jednak jasne, czy łańcuch Markowa $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ odpowiadający dopuszczalnemu IFS $(f_1,\dots,f_N;p_1,\dots,p_N)$ spełnia takie warunki. Ponadto w przypadku, gdy każda z funkcji f_i, $i\in 1,\dots,N$, ma punkty stałe w 0 i 1, nie jest możliwe, aby zaszedł którykolwiek z warunków zwężania (ani ten z prac [H4] i [H5], ani ten z [BMS12, GHSZ19], z których każdy implikuje geometryczną ergodyczność operatora P). Dlatego – o ile nam wiadomo – do rozważanego układu dynamicznego nie można bezpośrednio zastosować żadnego z istniejących kryteriów dla wygaszonego CLT czy LIL.

W przyszłości interesujące może być zbadanie walidacji zasady wielkich odchyleń (ang. *large deviations principle*) oparte na warunkach typu Maxwella-Woodroofe'a czy Zhao-Woodroofe'a. O ile nam wiadomo, nie ma dotąd literatury na ten temat, więc konieczne będzie opracowanie nowych metod.

4.3.3 Prezentacja głównych twierdzeń składających się na osiągnięcie naukowe

[H1] *E-własność w przypadku operatorów Markowa-Fellera, które są asymptotycznie stabilne*

Niech (E, ρ) będzie przestrzenią polską. Dwa główne wyniki z pracy [H1] brzmią następująco:

Twierdzenie 4.1 (twierdzenie 3.1 w [H1])**.** *Niech P będzie asymptotycznie stabilnym operatorem Markowa-Fellera o wartościach w przestrzeni E. Wówczas zbiór punktów, w których P nie spełnia e-własności w $\mathrm{C}_b(E)$, jest zbiorem pierwszej kategorii, podczas gdy zbiór punktów, w których P ma e-własność w $\mathrm{C}_b(E)$, jest gęsty w E.*

Twierdzenie 4.2 (twierdzenie 3.5 w [H1])**.** *Niech P będzie asymptotycznie stabilnym operatorem Markowa-Fellera o wartościach w przestrzeni E, a μ_* oznacza jego jedyną niezmienniczą miarę probabilistyczną. Wówczas P ma e-własność w $\mathrm{C}_b(E)$, o ile istnieje przynajmniej jeden punkt $z \in supp(\mu_*)$, w którym P ma e-własność w $\mathrm{C}_b(E)$.*

Twierdzenia 4.1 i 4.2 implikują następujący wynik, znany z pracy [HSZ17] S.C. Hillego, T. Szarka i M. Ziemlańskiej:

Twierdzenie 4.3 (por. [HSZ17, twierdzenie 2.3])**.** *Niech P będzie asymptotycznie stabilnym operatorem Markowa-Fellera o wartościach w przestrzeni E, a μ_* oznacza jego jedyną niezmienniczą miarę probabilistyczną. Jeśli $\mathtt{Int}(\mathrm{supp}(\mu_*)) \neq \emptyset$, to P spełnia e-własność w $\mathrm{C}_b(E)$.*

Rzeczywiście, zgodnie z twierdzeniem 4.1, jeśli wnętrze nośnika niezmienniczej miary probabilistycznej operatora Markowa-Fellera P (asymptotycznie stabilnego) jest niepuste, to istnieje przynajmniej jeden punkt w tym nośniku, w którym P ma e-własność. To z kolei oznacza, na mocy twierdzenia 4.2, że P ma e-własność w dowolnym punkcie.

Oznaczmy przez $\mathrm{Lip}_{b,1}(E)$ podprzestrzeń przestrzeni $\mathrm{Lip}_b(E)$ określoną wzorem

$$\mathrm{Lip}_{b,1}(E) := \{f \in \mathrm{Lip}_b(E) : \ \|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1\}, \tag{16}$$

gdzie norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$ jest zdefiniowana jako

$$\|f\|_{\mathrm{BL}} := \max\left\{\|f\|_\infty, \ \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)}\right\} \quad \text{dla dowolnej} \quad f \in \mathrm{Lip}_b(E). \tag{17}$$

W dowodzie twierdzenia 4.2 korzystamy z [HSZ17, lematu 2.4]; z kolei w dowodzie twierdzenia 4.1 wykorzystujemy następujący fakt:

Lemat 4.1 (lemat 3.4 w [H1])**.** *Każdy regularny operator Markowa P, który jest asymptotycznie stabilny i ma e-własność w $\mathrm{Lip}_{b,1}(E)$ w punkcie $z \in E$, ma również e-własność w $\mathrm{C}_b(E)$ w tym punkcie.*

W tym miejscu zwróćmy także uwagę na fakt, że dzięki lematowi 4.1 możemy natychmiast uogólnić [HSZ17, twierdzenie 2.3] względem jego pierwotnej wersji, która dotyczyła jedynie e-własności w $\mathrm{Lip}_b(E)$, do twierdzenia 4.3, mówiącego już o e-własności w $\mathrm{C}_b(E)$.

Na zakończenie warto zaznaczyć, że w sekcji 4 artykułu [H1] prezentujemy dwa istotne przykłady. W pierwszym z nich konstruujemy asymptotycznie stabilny operator Markowa-Fellera P o gęstym zbiorze punktów, w których nie zachodzi e-własność w $\mathrm{C}_b(S)$. Oczywiście jest to nietrywialny zbiór pierwszej kategorii. W ten sposób uzasadniamy ścisłość twierdzenia 4.1. W drugim przykładzie konstruujemy asymptotycznie stabilny operator Markowa-Fellera P tak, że zbiór punktów, w których nie zachodzi e-własność w $\mathrm{C}_b(S)$, ma dodatnią miarę Lebesgue'a, co oznacza, że jest to zbiór nieprzeliczalny.

Wyniki zaprezentowane w [H1] uzupełniają i precyzują opis zależności pomiędzy e-własnością a asymptotyczną stabilnością operatorów Markowa w ogólnych (polskich) przestrzeniach metrycznych. Warto zaznaczyć, że uogólniają one [HSZ17, twierdzenie 2.3].

[H2] *Własności ergodyczne pewnego PDMP, wykorzystywanego do modelowania ekspresji genów*

Niech (E, ρ) będzie przestrzenią polską. Przez $\mathcal{M}(E)$ i $\mathcal{M}_1(E)$ oznaczmy – odpowiednio – przestrzeń wszystkich skończonych i nieujemnych miar borelowskich na E oraz podprzestrzeń tej przestrzeni, składającą się z miar probabilistycznych. Ponadto dla danej funkcji borelowskiej $V : E \to \mathbb{R}_+$ i dowolnego $r > 0$ rozważmy podprzestrzeń $\mathcal{M}_{1,r}^V(E)$ przestrzeni $\mathcal{M}_1(E)$, składającą się ze wszystkich miar z r-tym momentem skończonym względem V, tzn.

$$\mathcal{M}_{1,r}^V(E) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(E) : \int_E V^r \, d\mu < \infty \right\}.$$

Do oszacowania odległości między miarami będziemy używać metryki Forteta-Mouriera, która na $\mathcal{M}(E)$ jest oczywiście dana wzorem

$$d_{\mathrm{FM}}(\mu, \nu) := \sup_{f \in \mathrm{Lip}_{b,1}(E)} \left| \int_E f \, d(\mu - \nu) \right| \quad \text{dla wszystkich} \quad \mu, \nu \in \mathcal{M}(E), \tag{18}$$

gdzie zbiór $\mathrm{Lip}_{b,1}(E)$ jest zdefiniowany przez (16).

Rozważmy ośrodkową przestrzeń Banacha $(H, \|\cdot\|)$ oraz zbiór $Y \subset H$ domknięty w tej przestrzeni (zwróćmy uwagę, że o Y możemy myśleć jak o polskiej przestrzeni metrycznej z metryką indukowaną przez normę $\|\cdot\|$ w H). Ponadto ustalmy przestrzeń topologiczną z miarą $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \vartheta)$, gdzie ϑ jest miarą borelowską skończoną, a także zbiór skończony I z metryką d daną jako $d(i, j) = 0$, jeśli $i = j$, oraz $d(i, j) = 1$ w przypadku przeciwnym.

W artykule [H2] badamy PDMP $\Psi = \{(Y(t), \xi(t))\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, ewoluujący poprzez skoki występujące w losowych momentach τ_n, $n \in \mathbb{N}$, które to momenty pokrywają się z czasami skoków procesu Poissona o danej intensywności $\lambda > 0$. Zbiór $\{S_i\}_{i \in I}$ półpotoków, gdzie $S_i : \mathbb{R}_+ \times Y \to Y$, decyduje o deterministycznym zachowaniu układu pomiędzy skokami, a losowo wybierane transformacje ciągłe $w_\theta : Y \to Y$, $\theta \in \Theta$, określają, jakie stany osiąga układ tuż po skokach (bardziej szczegółowy opis znajduje się w sekcji 2 w [H2], sekcji 4 w [H4], sekcji 5 w [H5] lub sekcji 4.3.2: *PDMPs sterowane przez półpotoki przełączane losowo* w niniejszym autoreferacie).

W przestrzeni $X := Y \times I$ zadajmy metrykę $\rho_{\hat{c}}$ w następujący sposób:

$$\rho_{\hat{c}}((y_1, i_1), (y_2, i_2)) = \|y_1 - y_2\| + \hat{c}\, d(i_1, i_2) \quad \text{dla} \quad (y_1, i_1), (y_2, i_2) \in X,$$

gdzie $\hat{c} \geq 1$ jest pewną dostatecznie dużą stałą (zdefiniowaną w [H2]).

Formalnie rozważamy:

- jednorodny w czasie łańcuch Markowa $\Phi := \{(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ o wartościach w X (por. (2) lub równania (2.3) i (2.4) w [H2]) z funkcją przejścia $P : X \times \mathcal{B}(X) \to [0,1]$ zadaną wzorem (5), gdzie $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest ciągiem zmiennych losowych, o wartościach w I, opisujących indeksy „aktualnie aktywnych" półpotoków,
- oraz jednorodny w czasie proces Markowa $\Psi := \{(Y(t), \xi(t))\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ o wartościach w X zdefiniowany poprzez interpolację Φ za pomocą (1) (półgrupę przejścia procesu Ψ będziemy oznaczać symbolem $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$).

Doprecyzujmy teraz warunki, jakie narzucamy na składowe modelu, a więc półpotoki S_i, $i \in I$, macierze $[\pi_{ij}]_{i,j\in I}$ ich prawdopodobieństw (zależnych od położenia), ciągłe przekształcenia w_θ, $\theta \in \Theta$, decydujące o stanach układu po skokach, a także związany z nimi zbiór $\{p_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ funkcji gęstości prawdopodobieństw (również zależnych od położenia) względem miary ϑ. Zakładamy, że istnieją $\bar{y} \in Y$, funkcja $\mathcal{L} : Y \to \mathbb{R}_+$ ograniczona na zbiorach ograniczonych oraz stałe $\alpha \in \mathbb{R}$, L, L_w, L_π, L_p, c_π, $c_p > 0$, takie że

$$LL_w + \alpha/\lambda < 1, \tag{19}$$

a ponadto, dla dowolnych $i, i_1, i_2 \in I$, $y_1, y_2 \in Y$, $t \in \mathbb{R}_+$, zachodzą następujące warunki:

$$\sup_{y\in Y} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_\Theta \|w_\theta(S_i(t,\bar{y})) - \bar{y}\| \, p_\theta\left(S_i(t,y)\right) \vartheta(d\theta)\, dt < \infty, \tag{M1}$$

$$\|S_{i_1}(t,y_1) - S_{i_2}(t,y_2)\| \le Le^{\alpha t} \|y_1 - y_2\| + t\mathcal{L}(y_2)\, d(i_1,i_2), \tag{M2}$$

$$\int_\Theta \|w_\theta(y_1) - w_\theta(y_2)\| \, p_\theta\left(y_1\right) \, d\theta \le L_w \|y_1 - y_2\|, \tag{M3}$$

$$\sum_{j\in I} |\pi_{ij}(y_1) - \pi_{ij}(y_2)| \le L_\pi \|y_1 - y_2\|, \quad \int_\Theta |p_\theta\left(y_1\right) - p_\theta\left(y_2\right)| \, d\theta \le L_p \|y_1 - y_2\|, \tag{M4}$$

$$\sum_{j\in I} \pi_{i_1 j}(y_1) \wedge \pi_{i_2 j}(y_2) \ge c_\pi, \quad \int_{\Theta(y_1,y_2)} p_\theta\left(y_1\right) \wedge p_\theta\left(y_2\right) \, d\theta \ge c_p, \tag{M5}$$

gdzie $\Theta(y_1,y_2) := \{\theta \in \Theta : \|w_\theta(y_1) - w_\theta(y_2)\| \le L_w\|y_1 - y_2\|\}$.

Zainteresowanych czytelników odsyłamy do sekcji 3 w [H2], gdzie omawiamy zasadność powyższych założeń. Pokazujemy tam m.in., że warunek (M2) jest spełniony przez obszerną klasę półpotoków działających w przestrzeniach refleksywnych, będących przestrzeniami Banacha (w szczególności w przestrzeniach Hilberta). Dodatkowo szczegółowo opisujemy, w jaki sposób można generować takie półpotoki za pomocą konkretnych równań różniczkowych z operatorami dyssypatywnymi (ang. *differential equations involving dissipative operators*; por. [IK02, CK19]). Zauważamy też, że warunek (M1) można w wielu przypadkach łatwo wyprowadzić z dwóch innych warunków – a mianowicie (M2) i (M3).

Ponadto zauważamy, że dość naturalne są warunki (M3)-(M5), które zapewniają, że układ transformacji $\{w_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ jest zwężający w średniej, i nakładają pewne dodatkowe ograniczenia na prawdopodobieństwa i gęstości w modelu. Takich warunków wymaga się powszechnie np. w twierdzeniach dotyczących własności asymptotycznych klasycznych losowych IFSs (por. [LY94] lub [Sza03]), które stanowią szczególny przypadek naszego modelu dyskretnego. W przykładzie w pracy [Ste01] podkreślono natomiast, że założeń sformułowanych w sposób podobny do (M4) nie można pominąć, nawet w najprostszych scenariuszach. Mówiąc dokładniej, autor pracy [Ste01] zauważa, że układ $\{(S_1, p), (S_2, 1-p)\}$ składający się z dwóch operatorów zwężających S_1 i S_2 oraz funkcji p dodatniej i ciągłej może posiadać więcej niż jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną (chyba że funkcja p spełnia co najmniej warunek ciągłości Diniego).

W dalszej części tego rozdziału niech $V : X \to \mathbb{R}_+$ będzie dana wzorem $V(y,i) = \|y - \bar{y}\|$ dla dowolnego $(y,i) \in X$. Głównym celem artykułu [H2] jest pokazanie, że łańcuch Φ jest geometrycznie ergodyczny (w metryce d_{FM}).

Twierdzenie 4.4 (twierdzenie 4.1 w [H2])**.** *Przypuśćmy, że warunki* (M1)-(M5) *zachodzą ze stałymi spełniającymi nierówność* (19)*. Wówczas operator Markowa P wyznaczony przez funkcję przejścia P łańcucha Φ, określoną wzorem* (5)*, posiada jedyną niezmienniczą miarę probabilistyczną μ_*^{Φ}, taką że $\mu_*^{\Phi} \in \mathcal{M}_{1,1}^V(X)$. Ponadto istnieje $\bar{x} \in X$ i stałe $c \in (0,\infty)$, $q \in [0,1)$, dla których*

$$d_{\mathrm{FM}}(\mu P^n, \mu_*^{\Phi}) \le c \left(\int_X \rho_{\hat{c}}(\bar{x}, \cdot)\, d\left(\mu + \mu_*^{\Phi}\right) + 1 \right) q^n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich $\mu \in \mathcal{M}_{1,1}^V(X)$.

W dowodzie twierdzenia 4.4 korzystamy z techniki sprzęgania asymptotycznego wprowadzonej w [Hai02]. Dokładniej: używamy [KS20, twierdzenia 2.1], które dostarcza warunków wystarczających (w kontekście sprzęgania markowowskiego), aby ogólny łańcuch Markowa był geometrycznie ergodyczny w sensie opisanym powyżej.

Twierdzenie 4.4 pozwala nam następnie pokazać SLLN dla łańcucha Φ. Możemy to zrobić, odwołując się do ogólnego wyniku A. Shirikyana [Shi03] (zob. twierdzenie 6.2 w [H2], które stanowi odpowiednią modyfikację [Shi03, twierdzenia 2.1], bezpośrednio wykorzystywaną w dowodzie twierdzenia 4.5).

Twierdzenie 4.5 (SLLN dla Φ; twierdzenie 4.3 w [H2])**.** *Przypuśćmy, że warunki* (M1)-(M5) *zachodzą ze stałymi spełniającymi* (19)*. Wówczas dla każdego $g \in \mathrm{Lip}_b(X)$ i dowolnego stanu początkowego $x \in X$ otrzymujemy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(Y_k, \xi_k) = \int_X g\, d\mu_*^{\Phi} \quad \mathbb{P}_x\text{- p.n.},$$

gdzie μ_*^{Φ} jest jedyną niezmienniczą miarą probabilistyczną operatora Markowa P (której istnienie i jednoznaczność wynikają z twierdzenia 4.4).

Odtąd będziemy zakładać, że Θ, czyli zbiór indeksów przekształceń $y \mapsto w_\theta(y)$, jest wyposażony w miarę skończoną ϑ.

Kolejny wynik dotyczy jednoznacznej odpowiedniości niezmienniczych miar probabilistycznych operatora P (opisującego ewolucję rozkładu łańcucha Φ) i niezmienniczych miar probabilistycznych półgrupy $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}+}$ (opisującej ewolucję rozkładu procesu Ψ).

Twierdzenie 4.6 (twierdzenie 4.4 w [H2])**.** *Niech P dana wzorem* (5) *będzie funkcją przejścia łańcucha Markowa Φ, oraz niech $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ będzie półgrupą Markowa opisującą ewolucję rozkładu PDMP Ψ określonego przez* (1)*. Ponadto niech jądra stochastyczne G i W będą odpowiednio zadane wzorami* (6) *i* (7)*. Wówczas zachodzą następujące implikacje:*

(1) Jeśli μ_*^{Φ} jest niezmienniczą miarą probabilistyczną operatora Markowa P, to $\mu_*^{\Psi} := \mu_*^{\Phi} G$ jest niezmienniczą miarą probabilistyczną półgrupy Markowa $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ i $\mu_*^{\Psi} W = \mu_*^{\Phi}$.

(2) Jeśli μ_*^{Ψ} jest niezmienniczą miarą probabilistyczną półgrupy Markowa $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, to $\mu_*^{\Phi} := \mu_*^{\Psi} W$ jest niezmienniczą miarą probabilistyczną operatora Markowa P oraz $\mu_*^{\Phi} G = \mu_*^{\Psi}$.

Połączenie twierdzeń 4.4 i 4.6 natychmiast prowadzi do następującego wyniku:

Wniosek 4.1 (wniosek 4.5 w [H2]). *Przypuśćmy, że warunki* (M1)-(M5) *zachodzą ze stałymi spełniającymi* (19). *Wówczas półgrupa Markowa* $\{P(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$*, opisująca dynamikę rozkładu PDMP* Ψ *określonego przez* (1)*, posiada dokładnie jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną.*

Następnie twierdzenia 4.5 i 4.6 pozwalają nam wykazać SLLN dla Ψ.

Twierdzenie 4.7 (SLLN dla Ψ; twierdzenie 4.7 w [H2]). *Przypuśćmy, że warunki* (M1)-(M5) *zachodzą z ograniczoną (lub – równoważnie – stałą) funkcją* $\mathcal{L}: Y \to \mathbb{R}_+$*, oraz że spełniona jest nierówność* (19). *Wówczas dla dowolnej funkcji* $g \in \mathrm{Lip}_b(X)$ *i dowolnego stanu początkowego* $(y, i) \in X$ *otrzymujemy*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t g\left(Y(s), \xi(s)\right) ds = \int_X g \, d\mu_*^{\Psi} \quad \mathbb{P}_{(y,i)}\text{-}p.n., \tag{20}$$

gdzie μ_*^{Ψ} *oznacza jedyny niezmienniczy rozkład procesu* Ψ *(którego istnienie i jednoznaczność zostały wykazane we wniosku 4.1).*

Dodatkowe założenie dotyczące funkcji $\mathcal{L}$ zapewnia, że operator $g \mapsto Gg$ zachowuje lipschitzowską ciągłość. Jest ona konieczna z punktu widzenia metody zastosowanej w dowodzie twierdzenia 4.7, gdyż pozwala na zastosowanie twierdzenia 4.5 do łańcucha Markowa $\{Gg(Y_n, \xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wspomniane wyżej wymaganie jest oczywiście spełnione, gdy deterministyczną ewolucję procesu Ψ określa tylko jeden półpotok.

W sekcji 5 artykułu [H2] zwracamy uwagę na ogólność badanego modelu abstrakcyjnego. Pokazujemy, że jest on wystarczająco elastyczny, aby uchwycić co najmniej dwa zupełnie różne układy dynamiczne: pierwszy – odnoszący się do modelu (z czasem ciągłym) opisującego ekspresję genów prokariotycznych (por. [MTKY13]); drugi – odnoszący się do modelu (dyskretnego) autoregulacji genu u bakterii (por. [HHS16]). Choć pierwszy z nich ewoluuje w przestrzeni skończenie wymiarowej (a zatem można go analizować za pomocą nieco prostszych narzędzi matematycznych), wierzymy, że połączenie tych dwóch przykładów pokazuje uniwersalność prezentowanego podejścia.

[H3] *Ciągła zależność miary niezmienniczej pewnego PDMP od wskaźnika intensywności skoków tego procesu*

Prezentując wyniki z artykułu [H3], będziemy korzystać z notacji wprowadzonej już w poprzednich rozdziałach, gdzie omówiono główne twierdzenia z prac [H1] i [H2]. Ponadto przez $\mathrm{Lip}_b(Y)^*$ oznaczymy przestrzeń dualną do przestrzeni $(\mathrm{Lip}_b(Y), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$, gdzie norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}$ jest określona wzorem (17). Normę operatorową $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$ w $\mathrm{Lip}_b(Y)^*$ zdefiniujmy jako

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BL}}^* := \sup\left\{|\varphi(f)| : \ f \in \mathrm{Lip}_b(Y), \ \|f\|_{\mathrm{BL}} \le 1\right\} \quad \text{dla każdego} \quad \varphi \in \mathrm{Lip}_b(Y)^*.$$

Zgodnie z [Dud66, lematem 6]), odwzorowanie $\mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y) \ni \mu \mapsto I\mu \in \mathrm{Lip}_b(Y)^*$ jest różnowartościowe, a zatem przestrzeń $(\mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(X), \|\cdot\|_{\mathrm{TV}})$ można zanurzyć w przestrzeni $(\mathrm{Lip}_b(Y)^*, \|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*)$.

Dzięki temu możemy utożsamiać każdą miarę $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y)$ z funkcjonałem $I_\mu \in \mathrm{Lip}_b(Y)^*$. To z kolei oznacza, że $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$ indukuje normę w przestrzeni $\mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y)$. Normę tę, nazywaną normą Forteta-Mouriera i oznaczaną symbolem $\|\cdot\|_{\mathrm{FM}}$, możemy więc określić w następujący sposób:

$$\|\mu\|_{\mathrm{FM}} := \|I_\mu\|_{BL}^* = \sup\left\{\left|\int_Y f\,d\mu\right| : \ f \in \mathrm{Lip}_b(Y),\ \|f\|_{\mathrm{BL}} \le 1\right\} \quad \text{dla każdej} \quad \mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y).$$

Dla dowolnej dodatniej intensywności skoku λ badamy wersję PDMP Ψ_λ określoną wzorami (1) i (2), której zachowanie deterministyczne pomiędzy losowymi skokami jest kierowane przez jeden półpotok S, a mechanizm skoków jest określony przez konkretne jądro J zdefiniowane wzorem (8). Stany, które Ψ_λ osiąga tuż po skokach, można opisać za pomocą łańcucha Φ_λ z funkcją przejścia P_λ zdefiniowaną tak jak w (9).

Założenia przyjęte w modelu są bardzo podobne do tych w pracy [H2] (w szczególności podkreślmy, że zachodzi twierdzenie 4.4). Dla ścisłości wymieniamy je jednak poniżej (czytelników zainteresowanych zasadnością wymaganych warunków odsyłamy do poprzedniego rozdziału lub do sekcji 3 w [H3]). Przyjmijmy, że istnieje punkt $\bar{y} \in Y$, funkcja borelowska $\mathcal{J} : Y \to [0,\infty)$ i stałe $\alpha \in \mathbb{R}$, $L, L_w, L_p, \lambda_{\min}, \lambda_{\max}, \overline{p} > 0$, takie że

$$LL_w + \frac{\alpha}{\lambda} < 1 \quad \text{dla każdej} \quad \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], \tag{21}$$

oraz, dla dowolnych $y_1, y_2 \in Y$, zachodzą następujące warunki:

$$\sup_{y\in Y} \int_0^\infty e^{-\lambda_{\min} t} \int_\Theta p_\theta\left(S(t,y)\right) \|w_\theta\left(S(t,\bar{y})\right)\|\, d\theta\, dt < \infty, \tag{Λ1}$$

$$\|S\left(t,y_1\right) - S\left(t,y_2\right)\| \le Le^{\alpha t}\|y_1 - y_2\| \quad \text{dla} \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{Λ2}$$

$$\|S\left(t,y_1\right) - S\left(s,y_1\right)\| \le (t-s)e^{\max\{\alpha s,\alpha t\}}\mathcal{J}\left(y_1\right) \quad \text{dla} \quad 0 \le s \le t, \tag{Λ3}$$

$$\int_\Theta p_\theta\left(y_1\right)\|w_\theta\left(y_1\right) - w_\theta\left(y_2\right)\|\, d\theta \le L_w\|y_1 - y_2\|, \tag{Λ4}$$

$$\int_\Theta |p_\theta\left(y_1\right) - p_\theta\left(y_2\right)|\, d\theta \le L_p\|y_1 - y_2\|, \tag{Λ5}$$

$$\int_{\Theta(y_1,y_2)} \min\left\{p_\theta\left(y_1\right), p_\theta\left(y_2\right)\right\} d\theta \ge \overline{p}, \tag{Λ6}$$

gdzie $\Theta(y_1,y_2) := \{\theta \in \Theta : \ \|w_\theta(y_1) - w_\theta(y_2)\| \le L_w\|y_1 - y_2\|\}$.

Zauważmy, że zakładając (21), natychmiast otrzymujemy $\lambda > \max\{0,\alpha\}$ dla każdej $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. Określmy również podzbiór $\mathcal{M}_{\mathrm{sig},\mathcal{J}}(Y)$ zbioru $\mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y)$ jako

$$\mathcal{M}_{\mathrm{sig},\mathcal{J}}(Y) = \left\{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y) : \ \int_Y \mathcal{J}\,d|\mu| < \infty\right\}, \quad \text{gdzie } \mathcal{J} \text{ jest zadana przez warunek } (\Lambda 3).$$

W sekcji 4 artykułu [H3] analizujemy pewne właściwości operatora Markowa P_λ, $\lambda > 0$, indukowanego przez funkcję przejścia P_λ łańcucha Φ_λ. W dalszej części tego rozdziału niech odwzorowanie $\Pi_{(t)}$ będzie określone przez (10) dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$.

Lemat 4.2 (lemat 4.1 w [H3]). *Przyjmijmy, że spełnione są warunki* (Λ3)-(Λ5). *Wówczas dla każdej $\lambda > 0$ i dowolnej $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sig},\mathcal{J}}(Y)$ funkcja $t \mapsto e^{-\lambda t}\mu\Pi(t)$ jest całkowalna w sensie Bochnera (wszystkie niezbędne definicje i podstawowe właściwości całki Bochnera są zebrane w sekcji 2 w* [H3]*) jako odwzorowanie z $\mathbb{R}_+$ w $(\mathtt{Cl}(\mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y)), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*|_{\mathtt{Cl}(\mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y))})$. Ponadto zachodzi równość*

$$\mu P_\lambda = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\mu\Pi_{(t)}\,dt.$$

Lemat 4.3 (lemat 4.2 w [H3]). *Niech* $f \in \mathrm{Lip}_b(Y)$. *Przy założeniach* ($\Lambda2$), ($\Lambda4$) *i* ($\Lambda5$) *otrzymujemy*

$$\left\|\mu\Pi_{(t)}\right\|_{\mathrm{FM}} \leq \left(1+(L_w+L_p)\,Le^{\alpha t}\right)\|\mu\|_{\mathrm{FM}} \quad \textit{dla dowolnych} \quad \mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y),\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Lemat 4.4 (lemat 4.4 w [H3]). *Załóżmy, że przestrzeń* $\mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y)$ *jest wyposażona w topologię indukowaną przez normę* $\|\cdot\|_{\mathrm{FM}}$. *Ponadto przypuśćmy, że warunki* ($\Lambda2$)-($\Lambda5$) *są spełnione. Wówczas odwzorowanie*

$$(\max\{0,\alpha\},\infty)\times\mathcal{M}_{\mathrm{sig},\mathcal{J}}(Y) \ni (\lambda,\mu) \mapsto \mu P_\lambda \in \mathcal{M}_{\mathrm{sig}}(Y)$$

jest wspólnie ciągłe.

Lemat 4.5 (lemat 4.5 w [H3]). *Przypuśćmy, że warunki* ($\Lambda1$), ($\Lambda2$) *i* ($\Lambda4$)-($\Lambda6$) *zachodzą ze stałymi spełniającymi nierówność* (21). *Dla dowolnej* $\lambda \in [\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$ *oznaczmy przez* $\mu_*^{\Phi_\lambda}$ *rozkład stacjonarny łańcucha* Φ_λ *(którego istnienie i jednoznaczność wynikają z twierdzenia 4.4). Wówczas zbieżność*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mu P_\lambda^n - \mu_*^{\Phi_\lambda}\right\|_{\mathrm{FM}} = 0$$

jest jednostajna ze względu na λ, *o ile miara* $\mu \in \mathcal{M}_1(Y)$ *jest taka, że* $\int_Y \|\cdot\|\,d\mu < \infty$.

Korzystając z powyższych lematów, a także z [Rud76, twierdzenia 7.11], możemy wykazać pierwszy z głównych wyników w artykule [H3], który ma następujące brzmienie:

Twierdzenie 4.8 (twierdzenie 5.2 w [H3]). *Przypuśćmy, że warunki* ($\Lambda1$)-($\Lambda6$) *zachodzą ze stałymi spełniającymi nierówność* (21). *Ponadto dla dowolnej* $\lambda \in [\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$ *przez* $\mu_*^{\Phi_\lambda}$ *oznaczmy rozkład stacjonarny procesu* Φ_λ *(którego istnienie i jednoznaczność wynikają z twierdzenia 4.4). Wówczas dla każdej* $\bar{\lambda} \in [\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$ *zachodzi*

$$\mu_*^{\Phi_\lambda} \stackrel{w}{\to} \mu_*^{\Phi_{\bar{\lambda}}}, \quad \textit{gdy} \quad \lambda \to \bar{\lambda},$$

gdzie „$\stackrel{w}{\to}$*" oznacza słabą zbieżność, tzn.* $\lim_{\lambda\to\bar{\lambda}}\int_Y f\,d\mu_*^{\Phi_\lambda} = \int_Y f\,d\mu_*^{\Phi_{\bar{\lambda}}}$ *dla każdej* $f \in \mathrm{C}_b(Y)$.

Drugi główny wynik w [H3] jest niemal natychmiastowym następstwem twierdzeń 4.8 i 4.6.

Twierdzenie 4.9 (twierdzenie 5.3 w [H3]). *Niech* ϑ *będzie skończoną miarą borelowską określoną na zbiorze* Θ. *Przypuśćmy, że warunki* ($\Lambda1$)-($\Lambda6$) *zachodzą ze stałymi spełniającymi nierówność* (21). *Ponadto dla dowolnej* $\lambda \in [\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$ *przez* $\mu_*^{\Psi_\lambda}$ *oznaczmy rozkład stacjonarny procesu* Ψ_λ *(którego istnienie i jednoznaczność wynikają z wniosku 4.1). Wówczas dla dowolnej* $\bar{\lambda} \in [\lambda_{\min},\lambda_{\max}]$ *zachodzi*

$$\mu_*^{\Psi_\lambda} \stackrel{w}{\to} \mu_*^{\Psi_{\bar{\lambda}}}, \quad \textit{gdy} \quad \lambda \to \bar{\lambda}.$$

Dzięki wynikom przedstawionym w [H3] (twierdzenia 4.8 i 4.9 powyżej) możemy stwierdzić, że niewielkie zmiany parametru λ w analizowanym modelu będą miały znikomy wpływ na rozkład stacjonarny tego modelu. Cecha ta sprawia, że proponowany model abstrakcyjny doskonale nadaje się do opisu różnych zjawisk rzeczywistych.

[H4] *Wersja CLT dla ogólnej klasy łańcuchów Markowa*

Niech (E,ρ) będzie przestrzenią metryczną polską, oraz niech d_{FM} oznacza metrykę Forteta-Mouriera określoną w (18). Główne wyniki w pracy [H4] dotyczą:

- **kryterium mieszania geometrycznego (w metryce d_{FM}) dla ogólnej klasy łańcuchów Markowa** (sekcja 2 w [H4]),
- wersji **CLT dla ogólnej klasy łańcuchów Markowa** (sekcja 3 w [H4]),
- **CLT dla abstrakcyjnego modelu ekspresji genów rozważanego w** [H2] (sekcja 4 w [H4]).

W sekcji 2 w [H4] korzystamy z pewnych pomysłów wykorzystanych wcześniej w pracach [Hai02, Ś11, Cza18, KS20] i [D3]. Kluczowymi wynikami są tam lematy 2.2 i 2.3, z których drugi nieco wzmacnia własność mieszania geometrycznego (w d_{FM}), udowodnioną i wykorzystaną w dowodzie [KS20, twierdzenia 2.1]. Lemat 2.3 (który wynika z lematu 2.2) stanowi istotne narzędzie w dowodzie głównego wyniku w naszej pracy [H4], tj. twierdzenia 3.2.

Niech $P : E\times\mathcal{B}(E)\to[0,1]$ i $P:\mathcal{M}(E)\to\mathcal{M}(E)$ oznaczają odpowiednio jądro stochastyczne i operator Markowa indukowany przez to jądro. Nakładamy następujące warunki na P:

(B0) Operator Markowa P ma własność Fellera.

(B1) Istnieje funkcja Lapunowa $V:E\to\mathbb{R}_+$ oraz stałe $a\in(0,1)$ i $b\in(0,\infty)$, takie że

$$PV(x)\le aV(x)+b\quad\text{dla każdego}\quad x\in E.$$

Ponadto wymagamy, aby istniało jądro podstochastyczne $Q:E^2\times\mathcal{B}(E^2)\to[0,1]$ o następującej własności:

$$Q((x,y),A\times E)\le P(x,A),\quad Q((x,y),E\times A)\le P(y,A)\quad\text{dla}\quad x,y\in E,\ A\in\mathcal{B}(E),\tag{22}$$

oraz takie że:

(B2) Istnieją $F\subset E^2$ i $\delta\in(0,1)$, dla których

$$\operatorname{supp} Q((x,y),\cdot)\subset F\ \text{ oraz }\ \int_{E^2}\rho(u,v)\,Q((x,y),du\times dv)\le\delta\rho(x,y)\ \text{ dla }\ (x,y)\in F.$$

(B3) Dla $U(r):=\{(u,v)\in F:\rho(u,v)\le r\}$, $r>0$, zachodzi

$$\inf_{(x,y)\in F} Q\left((x,y),U\left(\delta\rho(x,y)\right)\right)>0.$$

(B4) Istnieją stałe $\beta\in(0,1]$ i $c_\beta>0$, takie że

$$Q\left((x,y),E^2\right)\ge 1-c_\beta\rho^\beta(x,y)\quad\text{dla każdego}\quad (x,y)\in F.$$

(B5) Istnieje sprzężenie markowowskie $\{(\phi_n^{(1)}, \phi_n^{(2)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ operatora P o funkcji przejścia $C \geq Q$ (por. sekcja 1.3 w [H4]), takie że dla pewnej wartości $\Gamma > 0$ i zbioru

$$K := \left\{(x,y) \in E^2 : \; (x,y) \in F \text{ oraz } V(x) + V(y) < \Gamma\right\}$$

możemy wybrać stałe $\gamma \in (0,1)$ i $c_\gamma > 0$, dla których

$$\mathbb{E}_{x,y}(\gamma^{-\rho_K}) \leq c_\gamma, \quad \text{o ile} \quad V(x) + V(y) < 4b(1-a)^{-1},$$

gdzie

$$\rho_K = \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \; (\phi_n^{(1)}, \phi_n^{(2)}) \in K\right\}$$

oraz $\mathbb{E}_{x,y}$ oznacza operator wartości oczekiwanej względem miary $\mathbb{C}_{x,y}$, tzn. odpowiedniej miary probabilistycznej określonej na $\mathcal{B}(E^2)$, spełniającej

$$\mathbb{C}_{x,y}\left(\left(\phi_n^{(1)}, \phi_n^{(2)}\right) \in A \times E \,\middle|\, \phi_{n-1}^{(1)} = x\right) = P(x, A),$$
$$\mathbb{C}_{x,y}\left(\left(\phi_n^{(1)}, \phi_n^{(2)}\right) \in E \times A \,\middle|\, \phi_{n-1}^{(1)} = y\right) = P(y, A),$$

dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(E)$.

Pożądany lemat brzmi następująco:

Lemat 4.6 (lemat 2.3 w [H4]). *Przypuśćmy, że $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ jest jądrem stochastycznym, takim że warunki (B0)-(B5) zachodzą z pewnym jądrem podstochastycznym $Q : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0,1]$ spełniającym (22). Wówczas istnieją stałe $q \in (0,1)$ i $c > 0$, takie że*

$$\mathbb{E}_{x,y}\left|g\left(\phi_n^{(1)}\right) - g\left(\phi_n^{(2)}\right)\right| \leq c\|g\|_{\mathrm{BL}}\, q^n(1 + V(x) + V(y)) \tag{23}$$

dla dowolnych $(x,y) \in E^2$, $g \in \mathrm{Lip}_b(E)$ i $n \in \mathbb{N}_0$.

Przejdźmy teraz do omówienia części artykułu poświęconej CTG dla niestacjonarnych łańcuchów Markowa ewoluujących w przestrzeniach polskich.

Przyjmijmy, że $\mu_* \in \mathcal{M}_1(E)$ jest jedyną niezmienniczą miarą probabilistyczną operatora Markowa P (która istnieje przy założeniach [KS20, twierdzenia 2.1]). Dla danej funkcji borelowskiej $g : E \to \mathbb{R}$, takiej że $\int_E g^2\, d\mu_* < \infty$, mówimy, że ciąg zmiennych losowych $\{\bar{g}(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, gdzie $\bar{g} = g - \int_E g\, d\mu_*$, spełnia CLT, jeśli

$$\sigma^2(\bar{g}) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mu_*}\left(\left(\frac{\bar{g}(\phi_1) + \ldots + \bar{g}(\phi_n)}{\sqrt{n}}\right)^2\right) < \infty, \tag{24}$$

oraz średnie $n^{-1/2}(\bar{g}(\phi_1) + \ldots + \bar{g}(\phi_n))$, $n \in \mathbb{N}$, zbiegają według rozkładu do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z parametrami 0 i $\sigma^2(\bar{g})$.

Niech $D[0,1]$ oznacza przestrzeń Skorochoda, a więc zbiór wszystkich funkcji cádlág na przedziale $[0,1]$ (por. [Bil99]). Dla dowolnej funkcji borelowskiej $g : E \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy następującym wzorem proces $\{B_n(g)\}_{n\in\mathbb{N}}$ o wartościach w $D[0,1]$:

$$B_n(g)(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(g\left(\phi_1\right) + \ldots + g\left(\phi_{\lceil nt\rceil}\right)\right) \quad \text{dla} \quad 0 \leq t < 1 \quad \text{oraz} \quad B_n(g)(1) = B_n(g)(1-),$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\lceil a \rceil$ oznacza „sufit” liczby $a \in \mathbb{R}$. Dla danej funkcji borelowskiej $g : E \to \mathbb{R}$, takiej że $\int_E g^r\, d\mu_* < \infty$ dla pewnego $r > 2$, mówimy, że $\{\bar{g}(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ spełnia *zasadę niezmienniczość Donskera dla CLT* (funkcjonalne CLT), jeśli $\sigma^2(\bar{g}) < \infty$ oraz $\{B_n(\bar{g})\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega słabo do $\sigma(\bar{g})B$ w przestrzeni $D[0,1]$, gdzie B jest standardowym ruchem Browna określonym na przedziale $[0,1]$.

Zanim sformułujemy główne twierdzenie pracy [H4], musimy wzmocnić warunek (B1) do następującej postaci:

(B1)′ Istnieje funkcja Lapunowa $V : E \to \mathbb{R}_+$ oraz stałe $a \in (0,1)$ i $b \in (0,\infty)$, takie że

$$PV^2(x) \le (aV(x)+b)^2 \quad \text{dla każdego} \quad x \in E.$$

Korzystając z nierówności Höldera, możemy z łatwością pokazać, że hipoteza (B1)′ implikuje warunek (B1).

Twierdzenie 4.10 (CLT; twierdzenie 3.2 w [H4]). *Przypuśćmy, że $P : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ jest jądrem stochastycznym, takim że warunki (B0)-(B5) z (B1) wzmocnionym do (B1)′ zachodzą z pewnym jądrem podstochastycznym $Q : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0,1]$ spełniającym (22). Niech V będzie funkcją Lapunowa, dla której zachodzi warunek (B1)′. Przez $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ oznaczmy łańcuch Markowa jednorodny w czasie i o wartościach w E, dla którego P i $\mu \in \mathcal{M}_{1,1}^V(E)$ są odpowiednio funkcją przejścia i miarą początkową. Wówczas $\{\bar{g}(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ spełnia CLT, o ile $g \in \mathrm{Lip}_b(E)$. Ponadto jeśli μ jest jedyną niezmienniczą miarą probabilistyczną operatora Markowa P, to $\{\bar{g}(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ spełnia zasadę niezmienniczości Donskera dla CLT.*

Ważny krok w dowodzie twierdzenia 4.10 wynika z [MW00, wniosku 1] i [MW00, wniosku 4] z pracy M. Maxwella i M. Woodroofe'a (por. lemat 3.1 w [H4]).

Podkreślmy, że dokładna analiza dowodu twierdzenia 4.10 pozwala zauważyć, że jego teza zachodzi również przy dwóch ogólniejszych (i jednocześnie znacznie bardziej abstrakcyjnych) założeniach, a mianowicie:

(i) **spełniony jest warunek (B0), a ponadto zachodzi (B1)′ (lub warunek (B1) zachodzi zarówno dla V, jak i dla V^2);**

(ii) **istnieje sprzężenie markowowskie $\{(\phi_n^{(1)}, \phi_n^{(1)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jądra stochastycznego P, spełniające nierówność (23).**

W sekcji 4 artykułu [H4] udowadniamy użyteczność twierdzenia 4.10, stosując je do wykazania CLT dla łańcucha Φ badanego wcześniej w pracy [H2]. Co ważne, żadna z wcześniej istniejących wersji CLT (bądź LIL), łącznie z tymi z prac [GHSZ19] i [BMS12], nie ma zastosowania w tym kontekście.

[H5] *Zasada niezmienniczości Strassena dla LIL dla pewnych niestacjonarnych łańcuchów Markowa-Fellera*

Główne wyniki artykułu [H5] prezentujemy w sekcji 3, która jest podzielona na dwie części. W pierwszej z nich omawiamy pewne własności martyngałów zdefiniowanych na przestrzeni trajektorii danego ergodycznego łańcucha Markowa, podczas gdy w drugiej – dowodzimy zasady niezmienniczości Strassena dla LIL dla ogólnej klasy niestacjonarnych łańcuchów Markowa-Fellera. Poniżej przedstawiamy zarys jedynie tej drugiej części.

Niech $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ będzie wybrana w sposób dowolny. Przypuśćmy, że $P : E\times\mathcal{B}(E) \to [0,1]$ jest jądrem stochastycznym spełniającym warunki (B0) i (B1) z funkcją $V : E \to \mathbb{R}_+$ o postaci $V(x) = \rho(x, \bar{x})$ dla $x \in E$, gdzie $\bar{x}$ jest dowolnie ustalonym punktem przestrzeni E. W dalszej części tego rozdziału przez $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ będziemy oznaczać łańcuch Markowa z funkcją przejścia P i miarą początkową μ. Dodatkowo przyjmijmy, że istnieje jądro podstochastyczne $Q : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0,1]$ spełniające (22) i takie, że warunki (B2)-(B5) zachodzą dla pewnego zbioru $F \subset E^2$. Z [KS20, twierdzenia 2.1] wiemy, że P ma jedyną niezmienniczą miarę probabilistyczną μ_*, taką że $\mu_* \in \mathcal{M}_{1,1}^V(E)$ – a ponadto z lematu 4.6 wiemy, że nierówność (23) jest spełniona dla pewnych stałych $q \in (0,1)$ i $c \in (0,\infty)$.

Zdefiniujmy teraz przestrzeń $\mathcal{C}$ jako przestrzeń Banacha wszystkich funkcji rzeczywistych i ciągłych, określonych na $[0,1]$, z normą supremum. Przez $\mathcal{K}$ oznaczmy natomiast podprzestrzeń $\mathcal{C}$ składającą się ze wszystkich funkcji f absolutnie ciągłych i takich, że $\int_0^1 (f'(t))^2\,dt \le 1$. Ponadto dla dowolnej funkcji $g \in \mathrm{Lip}_b(E)$ i $\bar{g} = g - \int_E g\,d\mu_*$ rozważmy ciąg zmiennych losowych $\{r_n(\bar{g})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ o wartościach w przestrzeni $\mathcal{C}$ określonych wzorami

$$\begin{aligned} r_n(\bar{g})(t) &:= \frac{\sum_{i=0}^{k-1}\bar{g}(\phi_i) + (nt-k)\bar{g}(\phi_k)}{\sigma(\bar{g})\sqrt{2n\ln(\ln(n))}} \quad \text{dla wszystkich} \quad n > e,\ t \in (0,1] \\ &\qquad\qquad \text{oraz } k \in \{1,\dots,n-1\}, \quad \text{takich że} \quad k \le nt \le k+1, \\ r_n(\bar{g})(t) &:= 0 \quad \text{dla} \quad n \le e \quad \text{lub} \quad t = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Dla danej funkcji $g \in \mathrm{Lip}_b(E)$ mówimy, że łańcuch Markowa $\{\bar{g}(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ spełnia *zasadę niezmienniczości Strassena dla LIL*, jeśli

$$0 < \sigma^2(\bar{g}) := \mathbb{E}_{\mu_*}\left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} P^i\bar{g}(\phi_1) - \sum_{i=1}^{\infty} P^i\bar{g}(\phi_0)\right)^2\right) < \infty,$$

rodzina $\{r_n(\bar{g})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest relatywnie zwarta w $\mathcal{C}$, a zbiór jej punktów granicznych pokrywa się ze zbiorem $\mathcal{K}$ $\mathbb{P}_\mu$-p.n.

Główny wynik pracy [H5] jest sformułowany w duchu podobnym do [KS20, twierdzenia 2.1] oraz twierdzenia 3.2 w pracy [H4]. Chociaż hipotezy (B0)-(B5), wraz z równaniem (19), są wystarczające do tego, aby operator Markowa P był geometrycznie ergodyczny w metryce d_{FM}, nasz dowód zasady niezmienniczości Strassena dla LIL wymaga dodatkowego warunku:

(B1*) Istnieją stałe $a^* \in (0,1)$ i $b^* \in (0,\infty)$, takie że dla dowolnej miary $\nu \in \mathcal{M}_{1,2+r}^V(E)$ zachodzi nierówność

$$\left(\int_E V^{2+r}\,d(P\nu)\right)^{1/(2+r)} \le a^*\left(\int_E V^{2+r}\,d\nu\right)^{1/(2+r)} + b^*.$$

W tym miejscu dokonajmy krótkiego porównania warunku (B1*) z warunkiem (B1$'$), który został wykorzystany w pracy [H4] do udowodnienia twierdzenia CLT i jest silniejszą wersją warunku (B1). Warunek (B1*) jest tego samego rodzaju, ale w ogólności nie musi implikować warunku (B1). W związku z tym w twierdzeniu 4.7 w pracy [H5] zakładamy zarówno (B1), jak i (B1*).

Twierdzenie 4.11 (*Zasada niezmienniczości Strassena* dla LIL; twierdzenie 4.7 w [H5]). *Przypuśćmy, że $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest łańcuchem Markowa przyjmującym wartości w przestrzeni E i jednorodnym w czasie, z funkcją przejścia P i miarą początkową μ taką, że $\mu \in \mathcal{M}^V_{1,2+r}(E)$ dla pewnego $r \in (0,2)$. Ponadto załóżmy, że istnieje jądro podstochastyczne $Q : E^2 \times \mathcal{B}(E^2) \to [0,1]$, spełniające (22) i takie, że P oraz Q spełniają warunki (B0)-(B5) i (B1*) z pewnym zbiorem $F \subset E^2$. Wtedy dla dowolnej funkcji $g \in \mathrm{Lip}_b(E)$, takiej że $\sigma^2(\bar{g}) > 0$ (np. $g \in \mathrm{Lip}_b(E)$, która nie jest stała μ_*-p.n.; skończoność $\sigma^2(\bar{g})$ wykazaliśmy w lematach 4.9 i 4.10 w [H5]), łańcuch $\{\bar{g}(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ spełnia zasadę niezmienniczości Strassena dla LIL.*

Techniki, których używamy do udowodnienia twierdzenia 4.11, nawiązują głównie do tych zastosowanych w pracach [BMS12] i [D1], które z kolei odwołują się do wyniku C.C. Heydego i D.J. Scotta[HS73] dla martyngałów.

Podkreślmy, że dokładna analiza dowodu twierdzenia 4.11 pozwala zauważyć, że jego teza zachodzi również przy dwóch ogólniejszych (i jednocześnie znacznie bardziej abstrakcyjnych) założeniach, a mianowicie:

(i) **spełnione są warunki (B0) i (B1*);**

(ii) **istnieje sprzężenie markowowskie $\{(\phi_n^{(1)}, \phi_n^{(1)})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ jądra stochastycznego P, spełniające nierówność (23).**

Warto jednak zauważyć, że zamiast bezpośrednio weryfikować warunek (ii), często znacznie łatwiej jest zweryfikować założenia twierdzenia 4.11 (lub założenia twierdzenia 4.10). W rzeczywistości dla jawnie zdefiniowanych losowych układów dynamicznych (takich jak te w pracach [H2] i [KS20]) to, w jaki sposób zdefiniować jądro podstochastyczne Q, jest kwestią dość intuicyjną (por. równanie (6.9) w [H2] lub dowód [KS20, twierdzenia 3.1]).

W sekcji 5 w artykule [H5] przedstawiamy również dowód funkcjonalnej wersji LIL dla łańcucha Φ badanego wcześniej w pracy [H2].

[H6] *LIL dla losowych homeomorfizmów określonych na odcinku*

Niech $(f_1, \ldots, f_N; p_1, \ldots, p_N)$ będzie dowolnym dopuszczalnym (ang. *admissible*) IFS. Ponadto niech $\Sigma := \{1, \ldots, N\}^{\mathbb{N}}$ będzie wyposażona w topologię produktową indukowaną przez topologię dyskretną na $\{1, \ldots, N\}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$f^n_\omega = f_{\omega_n} \circ \ldots \circ f_{\omega_1} = f_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)} \quad \text{dla} \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Sigma.$$

Przez $\mathbb{P}$ będziemy oznaczać miarę na Σ będącą miarą produktową wektora prawdopodobieństw $(p_1, \ldots, p_N)$. Tego samego symbolu użyjemy, by oznaczyć miarę produktową wektora prawdopodobieństw $(p_1, \ldots, p_N)$ na zbiorach $\Sigma_n = \{1, \ldots, N\}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ będzie łańcuchem Markowa z funkcją przejścia P daną wzorem (15), odpowiadającym dopuszczalnemu IFS $(f_1, \ldots, f_N; p_1, \ldots, p_N)$ i określonym na przestrzeni $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}([0,1]^{\mathbb{N}}))$ wyposażonej w odpowiedni zbiór $\{\mathbb{P}_\nu\}_{\nu\in\mathcal{M}([0,1])}$ miar probabilistycznych na $\mathcal{B}([0,1]^{\mathbb{N}})$, takich że $\mathbb{P}_\nu(X_{n+1} \in A | X_n = x) = P(x, A)$ i $\mathbb{P}_\nu(X_0 \in A) = \nu(A)$ dla każdej $\nu \in \mathcal{M}([0,1])$. W przypadku, gdy $\nu = \delta_x$, $x \in [0,1]$, użyjemy zapisu $\mathbb{P}_x$ (zamiast $\mathbb{P}_{\delta_x}$).

Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}([0,1])$ mamy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\left((X_1, \ldots, X_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n\right) \\
&\qquad = \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Sigma_n} \mathbb{1}_{A_1\times\ldots\times A_n}\left(f_{\omega_1}(x), \ldots, f_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(x)\right) p_{\omega_1}\ldots p_{\omega_n} \\
&\qquad = \int_{\Sigma_n} \mathbb{1}_{A_1\times\ldots\times A_n}\left(f_{\omega_1}(x), \ldots, f_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)}(x)\right) \mathbb{P}\left(d\omega_1 \times \ldots \times d\omega_n\right) \\
&\qquad = \int_{\Sigma} \mathbb{1}_{A_1\times\ldots\times A_n}\left(f^1_\omega(x), \ldots, f^n_\omega(x)\right) \mathbb{P}\left(d\omega\right).
\end{aligned}$$

Z [CS20, twierdzeń 1 i 2] wiemy, że regularny operator Markowa P (indukowany przez (15)) ma jedyną niezmienniczą miarę probabilistyczną μ_* na odcinku otwartym $(0,1)$. W przypadku, gdy rozkład początkowy łańcucha $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ będzie jego rozkładem stacjonarnym μ_*, użyjemy notacji $\{X^*_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Dwa główne wyniki wykazane w pracy [H6], a więc kolejno wyżarzone (ang. *annealed*) LIL i wygaszone (ang. *quenched*) LIL, brzmią następująco:

Propozycja 4.1 (propozycja w [H6])**.** *Jeśli $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską o własności $\int_{[0,1]} \varphi\, d\mu_* = 0$, to istnieje stała $\sigma \in [0,\infty)$, taka że*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi\left(X^*_1\right) + \ldots + \varphi\left(X^*_n\right)}{\sqrt{2n\ln(\ln(n))}} = \sigma \quad \mathbb{P}_{\mu_*}\text{-p.w.}$$

Twierdzenie 4.12 (twierdzenie w [H6])**.** *Jeśli $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską o własności $\int_{[0,1]} \varphi\, d\mu_* = 0$, to istnieje stała $\sigma \in [0,\infty)$, taka że dla każdego $x \in (0,1)$*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi\left(f^1_x(x)\right) + \ldots + \varphi\left(f^n_x(x)\right)}{\sqrt{2n\ln(\ln(n))}} = \sigma \quad \mathbb{P}\text{-p.w.}$$

W kontekście szeroko zakrojonych badań wielu matematyków nad modelem omawianym w [H6] warto zwrócić uwagę na znaczenie wyniku fundamentalnego, jakim jest LIL.

Literatura

[AHVG15] T. Alkurdi, S.C. Hille, and O. Van Gaans. Persistence of stability for equilibria of map iterations in Banach spaces under small perturbations. *Potential Anal.*, 42(11):175–201, 2015.

[AM14] L. Alsedá and M. Misiurewicz. Random interval homeomorphisms. *Publ. Mat.*, 58:15–36, 2014.

[AV10] A. Avila and M. Viana. Extremal Lyapunov exponents: an invariance principle and applications. *Invent. Math.*, 181:115–178, 2010.

[BD85] M.F. Barnsley and S.G. Demko. Iterated function systems and the global construction of fractals. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 399(1817):243–275, 1985.

[BDEG88] M.F. Barnsley, S.G. Demko, J.H. Elton, and J.S. Geronimo. Invariant measures for Markov processes arising from iterated function systems with place dependent probabilities. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 24(3):367–394, 1988.

[BH12] Y. Bakhtin and T. Hurth. Invariant densities for dynamical systems with random switching. *Nonlinearity*, 25(10):2937–2952, 2012.

[BHS18] M. Benaïm, T. Hurth, and E. Strickler. A user-friendly condition for exponential ergodicity in randomly switched environments. *Electron. Commun. Probab.*, 23:1–12, 2018.

[Bil99] P. Billingsley. *Convergence of probability measures.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[Bin86] N. Bingham. Variants on the law of the iterated logarithm. *Lond. Math. Soc.*, 18(5):433–467, 1986.

[BKKP05] O. Boxma, H. Kaspi, O. Kella, and D. Perry. On/off storage systems with state-dependent inpout. *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 19(1):1–14, 2005.

[BL16] M. Benaïm and C. Lobry. Lotka Volterra with randomly fluctuationg environments or 'how switching between benefcial environments can make survival harder'. *Ann. Appl. Probab.*, 26(6):3754–3785, 2016.

[BLBMZ12] M. Benaïm, S. Le Borgne, F. Malrieu, and P.-A. Zitt. Quantitative ergodicity for some switched dynamical systems. *Electron. Commun. Probab.*, 17(0):1–14, 2012.

[BLBMZ15] M. Benaïm, S. Le Borgne, F. Malrieu, and P.-A. Zitt. Qualitative properties of certain piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 51(3):1040–1075, 2015.

[BMS12] W. Bołt, A.A. Majewski, and T. Szarek. An invariance principle for the law of the iterated logarithm for some Markov chains. *Studia Math.*, 212:41–53, 2012.

[Bog07] V.I. Bogachev. *Measure theory*, volume II. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[BS19] M. Benaïm and E. Strickler. Random switching between vector fields having a common zero. *Ann. Appl. Probab.*, 29(1):326–375, 2019.

[BTK16] W. Biedrzycka and M. Tyran-Kamińska. Existence of invariant densities for semiflows with jumps. *J. Math. Anal. Appl.*, 435(1):61–84, 2016.

[CD99] O.L.V. Costa and F. Dufour. Stability of piecewise deterministic Markov processes. *SIAM J. Control Optim.*, 37(5):1483–1502, 1999.

[CD08] O.L.V. Costa and F. Dufour. Stability and ergodicity of piecewise deterministic Markov processes. In *2008 47th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2008.

[CDMR12] A. Crudu, A. Debussche, A. Muller, and O. Radulescu. Convergence of stochastic gene networks to hybrid piecewise deterministic processes. *Ann. Appl. Probab.*, 22(5):1822–1859, 2012.

[CH14] D. Czapla and K. Horbacz. Equicontinuity and stability properties of Markov chains arising from iterated function systems on Polish spaces. *Stoch. Anal. Appl.*, 32(1):1–29, 2014.

[CH15] B. Cloez and M. Hairer. Exponential ergodicity for Markov processes with random switching. *Bernoulli*, 21(1):505 – 536, 2015.

[CK19] D. Czapla and J. Kubieniec. Exponential ergodicity of some Markov dynamical systems with application to a Poisson driven stochastic differential equation. *Dyn. Syst.*, 34(1):130–156, 2019.

[Cos90] O.L.V. Costa. Stationary distributions for piecewise-deterministic Markov processes. *J. Appl. Prob.*, 27(1):60–73, 1990.

[CS20] K. Czudek and T. Szarek. Ergodicity and central limit theorem for random interval homeomorphisms. *Isr. J. Math.*, 239:75–98, 2020.

[Cza12] D. Czapla. A criterion of asymptotic stability for Markov-Feller e-chains on Polish spaces. *Ann. Polon. Math.*, 105(3):267–291, 2012.

[Cza18] D. Czapla. A criterion on asymptotic stability for partially equicontinuous Markov operators. *Stoch. Process Their. Appl.*, 128(11):3656–3678, 2018.

[Dav84] M.H.A. Davis. Piecewise-deterministic Markov processes: A general class of non-diffusion stochastic models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 46(3):353–388, 1984.

[Dav93] M.H.A. Davis. *Markov models and optimization*. Chapman and Hall, London, 1993.

[Dav06] M.H.A. Davis. *Point process theory and applications: Marked point and piecewise deterministic processes*. Birkhäuser-Verlag, Boston, 2006.

[DF99] P. Diaconis and D. Freedman. Iterated random functions. *SIAM Rev.*, 41(1):45–76, 1999.

[DHT84] O. Diekmann, H.J. Heijmans, and H.R. Thieme. On the stability of the cells size distribution. *J. Math. Biol.*, 19:227–248, 1984.

[DL01] Y. Derriennic and M. Lin. The central limit theorem for Markov chains with normal transition operators, started at a point. *Probab. Theory Related Fields*, 119(4):508–528, 2001.

[DMS14] D. Douc, E. Moulines, and D. Stoffer. *Nonlinear time series: theory, methods and applications with R examples*. Chapman and Hall/CRC, New York, 2014.

[DU77] J. Diestel and J.J. Uhl, Jr. *Vector measures*. American Mathematical Society, Mathematical Surveys, vol. 15, Providence, Rhode Island, 1977.

[Dud66] R. Dudley. Convergence of Baire measures. *Studia Math.*, 27:251–268, 1966.

[Dyn65] E.B. Dynkin. *Markov processes I*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[Dyn00] E.B. Dynkin. *Selected papers of E.B. Dynkin with commentary*. American Mathematical Society, RI; International Press, Cambridge, MA, 2000.

[EHM15] J.H.M. Evers, S.C. Hille, and A. Muntean. Mild solutions to a measure-valued mass evolution problem with flux boundary conditions. *J. Differ. Equ.*, 259(3):1068–1097, 2015.

[EK86] N.E. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov processes. Characterization and convergence*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 1986.

[GH17] M. Gharaei and A.J. Homburg. Random interval diffeomorphisms. *Discrete Contin. Dyn. Syst. - S.*, 10(2):241—-272, 2017.

[GHLSG19] P. Gwiazda, S.C. Hille, K. Łyczek, and A. Świerczewska-Gwiazda. Differentiability in perturbation parameter of measure solutions to perturbed transport equation. *Kinet. Relat. Mod.*, 12(5):1093–1108, 2019.

[GHSZ19] J. Gulgowski, S.C. Hille, T. Szarek, and M.A. Ziemlańska. Central limit theorem for some non-stationary Markov chains. *Studia Math.*, 246:109–131, 2019.

[GL78] M.I. Gordin and B.A. Lifšic. Central limit theorem for stationary Markov processes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 239(4):766–767, 1978.

[GL81] M.I. Gordin and B.A. Lifšic. A remark about a Markov process with normal transition operator. *Third Vilnius Conf. Proba. Stat., Akad. Nauk Litovsk, Vilnius*, 1:147–148, 1981.

[GR09] C. Graham and P. Robert. Interacting multi-class transmissions in large stochastic networks. *Ann. Appl. Probab.*, 19(6):2334–2361, 2009.

[Hai02] M. Hairer. Exponential mixing properties of stochastic PDEs through asymptotic coupling. *Probab. Theory Related Fields*, 124, 2002.

[HH80] P. Hall and C.C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Elsevier, New York, 1980.

[HHS16] S.C. Hille, K. Horbacz, and T. Szarek. Existence of a unique invariant measure for a class of equicontinuous Markov operators with application to a stochastic model for an autoregulated gene. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 23(2):171–217, 2016.

[HM08] M. Hairer and J.C. Mattingly. Spectral gaps in Wasserstein distances and the 2D stochastic Navier–Stokes equations. *Ann. Probab.*, 36(6):2050–2091, 2008.

[HM11] M. Hairer and J.C. Mattingly. *Yet another look at Harris' ergodic theorem for Markov chains. In: Dalang, R., Dozzi, M., Russo, F. (eds) Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI. Progress in Probability, vol. 63.* Springer, Basel, 2011.

[Hol05] H. Holzmann. The central limit theorem for stationary Markov processes with normal generator – with applications to hypergroups. *Stochastics*, 77(4):371–380, 2005.

[Hor02] K. Horbacz. Invariant measures related with randomly connected Poisson driven differential equations. *Ann. Polon. Math.*, 79(1):31–44, 2002.

[Hor08] K. Horbacz. Invariant measures for random dynamical systems. *Dissertationes Math.*, 451:1–63, 2008.

[Hor16] K. Horbacz. The central limit theorem for random dynamical systems. *J. Stat. Phys.*, 164(6):1261–1291, 2016.

[HS73] C.C. Heyde and D.J. Scott. Invariance principles for the law of the iterated logarithm for martingales and processes with stationary increments. *Ann. Probab.*, 1(3):428–436, 1973.

[HS06] K. Horbacz and T. Szarek. Irreducible Markov systems on Polish spaces. *Studia Math.*, 177(3):285–295, 2006.

[HS16] K. Horbacz and M. Ślęczka. Law of large numbers for random dynamical systems. *J. Stat. Phys.*, 162:671–684, 2016.

[HSWZ21] S.C. Hille, T. Szarek, D. Worm, and M.A. Ziemlańska. Equivalence of equicontinuity concepts for Markov operators derived from a Schur-like property for spaces of measures. *Stat. Probab. Lett.*, 169(108964), 2021.

[HSZ17] S.C. Hille, T. Szarek, and M. Ziemlańska. Equicontinuous families of Markov operators in view of asymptotic stability. *C. R. Math.*, 355(12):1247–1251, 2017.

[IK02] K. Ito and F. Kappel. *Evolution equations and approximations, vol. 61 of Ser. Adv. Math. Appl. Sci.* World Scientific, New Jersey, 2002.

[Jam64] B. Jamison. Asymptotic behaviour of succesive iterates of continuous functions under a Markov operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 9(2):203–214, 1964.

[JT20] R. Jin and A. Tan. Central limit theorems for Markov chains based on their convergence rates in Wasserstein distance. *Preprint available at https://arxiv.org/abs/2002.09427*, 2020.

[Kaz13] J. Kazak. Piecewise-deterministic Markov processes. *Ann. Polon. Math.*, 109(3):279–296, 2013.

[Kle13] A. Klenke. *Probability theory: a comprehensive course.* Springer, London, 2013.

[KPS10] T. Komorowski, S. Peszat, and T. Szarek. On ergodicity of some Markov processes. *Ann. of Probab.*, 38(4):1401–1443, 2010.

[KPS13] T. Komorowski, S. Peszat, and T. Szarek. Passive tracer in a flow corresponding to two-dimensional stochastic Navier-Stokes equations. *Nonlinearity*, 26(7):1999–2026, 2013.

[KS11] R. Kapica and M. Szarek, T. Ślęczka. On a unique ergodicity of some Markov processes. *Potential Anal.*, 36(4):589–606, 2011.

[KS14] T. Komorowski and T. Szarek. The law of the iterated logarithm for passive tracer in a two-dimensional flow. *J. London Math. Soc.*, 89(2):482–498, 2014.

[KS20] R. Kapica and M. Ślęczka. Random iteration with place dependent probabilities. *Probab. Math. Statist.*, 40(1):119–137, 2020.

[KV86] C. Kipnis and S.R.S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions. *Comm. Math. Phys.*, 104:1–19, 1986.

[KW12] T. Komorowski and A. Walczuk. Central limit theorem for Markov processes with spectral gap in the Wasserstein metric. *Stoch. Proc. Appl.*, 122(5):2155–2184, 2012.

[Las95] A. Lasota. From fractals to stochastic differential equations. In P. Garbaczewski, M. Wolf, and A. Weron, editors, *Chaos – The interplay between stochastic and deterministic behaviour (Proceedings of the XXXIst Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland, 13-24 Feb 1995)*, volume 457 of *Lecture Notes in Physics*, pages 235–255, Berlin, 1995. Lecture Notes in Physics 457, Springer Verlag.

[Lév35] P. Lévy. Propriétés asymptotiques des sommes de variables indépendantes ou enchainées. *Journal des mathématiques pures et appliquées. Series 9.*, 14(4):347–402, 1935.

[Lim00] W. Liming. Functional law of iterated logarithm for additive functionals of reversible Markov processes. *Acta Math. Appl. Sin.*, 16(2):149–161, 2000.

[Lin02] T. Lindvall. *Lectures on the coupling method.* Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2002.

[LL23] Y. Liu and Z. Liu. Relation between the eventual continuity and the e-property for Markov-Feller semigroups. *available as a preprint at https://arxiv.org/abs/2302.08755*, 2023.

[LM94] A. Lasota and J. Myjak. Generic properties of fractal measures. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 42(4):283–296, 1994.

[LM98] A. Lasota and J. Myjak. Semifractals on Polish spaces. *Bull. Pol. Ac. Math.*, 46(2):179–196, 1998.

[LM99] A. Lasota and M.C. Mackey. Cell division and the stability of cellular populations. *J. Math. Biol.*, 38(3):241–261, 1999.

[Löc18] E. Löcherbach. Absolute continuity of the invariant measure in piecewise deterministic Markov Processes having degenerate jumps. *Stoch. Process. their Appl.*, 128(6):1797–1829, 2018.

[LS05] A.N. Lagerås and Ö. Stenflo. Central limit theorems for contractive Markov chains. *Nonlinearity*, 18:1955–1965, 2005.

[LS06] A. Lasota and T. Szarek. Lower bound technique in the theory of a stochastic differential equation. *J. Differ. Equ.*, 231(2):513–533, 2006.

[LT03] A. Lasota and J. Traple. Invariant measures related with Poisson driven stochastic differential equation. *Stoch. Proc. Appl.*, 106(1):81–93, 2003.

[LY94] A. Lasota and J. Yorke. Lower bound technique for Markov operators and iterated function systems. *Rand. Comput. Dynam.*, 2(1):41–77, 1994.

[Mal17] D. Malicet. Random walks on Homeo(S^1). *Commun. Math. Phys.*, 356:1083–1116, 2017.

[Mat02] J.C. Mattingly. Exponential convergence for the stochastically forced Navier-Stokes equations and other partially dissipative dynamics. *Commun. Math.*, 230:421–462, 2002.

[MT93a] S.P. Meyn and R. Tweedie. Criteria for stability of Markovian processes III: Foster–Lyapunov criteria for continuous time processes, with examples. *Adv. in Appl. Probab.*, 25(3):518–548, 1993.

[MT93b] S.P. Meyn and R.L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[MTKY13] M.C. Mackey, M. Tyran-Kamińska, and R. Yvinec. Dynamic behavior of stochastic gene expression models in the presence of bursting. *SIAM J. Appl. Math.*, 73(5):1830–1852, 2013.

[MW00] M. Maxwell and M. Woodroofe. Central limit theorems for additive functionals of Markov chains. *Ann. Probab.*, 28:713–724, 2000.

[MZ10] C. Marinelli and G. Ziglio. Ergodicity for nonlinear stochastic evolution equations with multiplicative Poisson noise. *Dyn. Partial Differ. Equ.*, 7(1):1–23, 2010.

[OLK12] S. Olla, C. Landim, and T. Komorowski. *Fluctuations in Markov processes. Time symmetry and martingale approximation.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.

[Pic19] B. Piccoli. Measure differential equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 233(3):1289–1317, 2019.

[RTK17] R. Rudnicki and M. Tyran-Kamińska. *Piecewise deterministic processes in biological models.* SpringerBr. Appl. Sci. Technol., Cham, 2017.

[RTW12] M.G. Riedler, M. Thieullen, and G. Wainrib. Limit theorems for infinite-dimensional piecewise deterministic Markov processes. Applications to stochastic excitable membrane models. *Electron. J. Probab.*, 17(55):1–48, 2012.

[Rud76] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill, Inc., New York, 1976.

[Ś11] M. Ślęczka. The rate of convergence for iterated function systems. *Studia Math.*, 205:201–214, 2011.

[Shi03] A. Shirikyan. A version of the law of large numbers and applications. *In: Probabilistic Methods in Fluids, Proceedings of the Swansea Workshop held on 14 - 19 April 2002, World Scientific, New Jersey*, pages 263–271, 2003.

[Sny75] D. Snyder. *Random point processes.* Wiley, New York, 1975.

[SSU10] T. Szarek, M. Ślęczka, and M. Urbański. On stability of velocity vectors for some passive tracer models. *Bull. London Math. Soc.*, 42(5):923–936, 2010.

[Ste94] Ł. Stettner. Remarks on ergodic conditions for Markov processes on Polish spaces. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 42:103–114, 1994.

[Ste01] Ö. Stenflo. A note on a theorem of Karlin. *Stat. Probab. Lett.*, 54(2):183–187, 2001.

[SW11] T. Szarek and D.T.H. Worm. Ergodic measures of Markov semigroups with the e-property. *Ergod. Theory Dyn. Syst.*, 32(3):1117–1135, 2011.

[Sza03] T. Szarek. Invariant measures for nonexpansive Markov operators on Polish spaces. *Dissertationes Math.*, 415:1–62, 2003.

[Sza06] T. Szarek. Feller processes on nonlocally compact spaces. *Ann. Probab.*, 34(5):1849–1863, 2006.

[Sza13] T. Szarek. Lower bound technique and its applications to function systems and stochastic partial differential equations. *Mat. Stos.*, 41(2):185–198, 2013.

[Wer05] I. Werner. Contractive Markov systems. *J. London Math. Soc.*, 71(1):236–258, 2005.

[Wor10] D.T.H. Worm. *Semigroups on spaces of measures*. PhD. thesis, Mathematical Institute, Faculty of Science, Leiden University, The Netherlands, available at: https://math.leidenuniv.nl/scripties/WormThesis.pdf, 2010.

[WW18] S. Wędrychowicz and A. Wiśnicki. On some results on the stability of Markov operators. *Studia Math.*, 241(1):41–55, 2018.

[ZW08] O. Zhao and M. Woodroofe. Law of the iterated logarithm for stationary processes. *Ann. Probab.*, 36(1):127 – 142, 2008.

4.4 Opis wkładu w prace składające się na osiągnięcie naukowe

Artykuł [H1]

R. Kukulski, H. Wojewódka-Ściążko,
The e-property of asymptotically stable Markov-Feller operators**,**
Colloq. Math. 165 (2021), 269-283

Wyniki opisane w pracy [H1] otrzymaliśmy w czasie, gdy mój współautor R. Kukulski przygotowywał pracę magisterską (pod moją opieką naukową). Zaproponowałam temat badań, a R. Kukulski skonstruował przykłady opisane w sekcji 4 artykułu. Oboje w równym stopniu przyczyniliśmy się do udowodnienia głównych twierdzeń. Pierwszą wersję pracy zredagował R. Kukulski, a następnie ja przygotowałam sekcję 1 i dokonałam istotnych poprawek w dalszej części artykułu.

Artykuł [H2]

D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko,
Ergodic properties of some piecewise deterministic Markov process with application to gene expression modelling**, Stoch. Proc. Appl. 130 (2020), no. 5, 2851-2885**

Inicjatorką projektu była K. Horbacz, która zaproponowała ogólną postać rozważanego modelu. Dzięki wiedzy zdobytej podczas studiów doktoranckich byłam w stanie dokładnie zrozumieć dowód kryterium R. Kapicy i M. Ślęczki [KS20, twierdzenie 2.1], i w rezultacie pomóc D. Czapli w wykazaniu jednego z głównych wyników tej pracy – tj. twierdzenia 4.1, którego dowód w dużej mierze opiera się na wykorzystaniu tego właśnie kryterium. Wniosłam również znaczący wkład w dowody twierdzeń 4.2-4.7. Sekcję 3, dotyczącą słuszności przyjętych założeń, opracował D. Czapla. Przykład 5.1, opisujący ekspresję genów prokariotycznych (bakteryjnych), zaproponowała K. Horbacz, podczas gdy przykład 5.2, dotyczący autoregulacji genów u bakterii, został zaproponowany przeze mnie. Po konsultacji z S.C. Hille ulepszyłam interpretację biologiczną w przykładzie 5.1, podkreślając, że geny u prokariotów mogą być (i często są) zorganizowane w tzw. *operony*. D. Czapla sporządził wstępny szkic artykułu, który następnie został uzupełniony przez K. Horbacz i przeze mnie. Jestem również autorką wstępu.

Artykuł [H3]

D. Czapla, S.C. Hille, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko,
Continuous dependence of an invariant measure on the jump rate of a piecewise deterministic Markov process**, Math. Biosci. Eng. 17 (2020), no. 2, 1059-1073**

Opisane w artykule wyniki otrzymaliśmy podczas realizacji mojego projektu badawczego *Mathematical Modelling with Measures* finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki pod numerem rejestracyjnym 2018/02/X/ST1/01518. Projekt ten umożliwił mi wizytę badawczą w Instytucie Matematyki Uniwersytetu w Lejdzie w grudniu 2018 r. Główne pomysły zrodziły się podczas mojego pobytu w Lejdzie, gdzie współpracowałam z S.C. Hille. Wspólnie sformułowaliśmy hipotezę badawczą i przygotowaliśmy szkic dowodu. Po powrocie, we współpracy z D. Czaplą i K. Horbacz, dopracowałam wszystkie szczegóły, a następnie zredagowałam artykuł (z pomocą D. Czapli).

Artykuł [H4]

D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko,
***A useful version of the central limit theorem for a general class of Markov chains*, J. Math. Anal. Appl. 484 (2020), no. 1, 123725**

Byłam główną koordynatorką i motorem napędowym projektu. Przygotowałam szkic dowodu głównego wyniku pracy. Korzystając z moich wcześniejszych doświadczeń, zauważyłam, że pożądaną wersję centralnego twierdzenia granicznego można udowodnić poprzez kreatywne zastosowanie technik sprzęgania asymptotycznego, wprowadzonych i rozwijanych przez M. Hairera (od 2002 r.). Lemat niezbędny do dowodu tego twierdzenia wykazał (z moją pomocą) D. Czapla. Napisałam artykuł, a D. Czapla i K. Horbacz dokonali niezbędnych poprawek merytorycznych i językowych.

Artykuł [H5]

D. Czapla, K. Horbacz, H. Wojewódka-Ściążko,
***The Strassen invariance principle for certain non-stationary Markov-Feller chains*, Asymptot. Anal. 121 (2021), no. 1, 1-34**

Główne idee przedstawione w tym artykule są mojego pomysłu. Niemożność bezpośredniego zastosowania wersji prawa logarytmu iterowanego autorstwa W. Bołta, A.A. Majewskiego i T. Szarka [BMS12] do szerokiej klasy losowych układów dynamicznych, które badaliśmy w naszych poprzednich pracach, i które mogą mieć zastosowanie np. w biologii molekularnej, zmotywowała mnie do sformułowania i wykazania nowego kryterium. Zasugerowałam, by oprócz metody martyngałowej zastosować w dowodzie pewną technikę opartą na sprzęganiu asymptotycznym łańcuchów Markowa. Przygotowałam wstępną wersję artykułu, która następnie została ulepszona przez D. Czaplę i K. Horbacz. D. Czapla uzupełnił niektóre dowody – zwłaszcza te odnoszące się do ogólnych własności martyngałów.

Artykuł [H6]

K. Czudek, T. Szarek, H. Wojewódka-Ściążko,
***The law of the iterated logarithm for random interval homeomorphisms*, Isr. J. Math. 246 (2021), 47-53**

Praca była redagowana w okresie, gdy K. Czudek przygotowywał rozprawę doktorską pod kierunkiem T. Szarka. Po udowodnieniu centralnego twierdzenia granicznego dla pewnych *dopuszczalnych* (ang. *admissible*) iterowanych układów funkcyjnych [CS20] K. Czudek i T. Szarek postanowili w dalszej kolejności wykazać dla tych układów prawo iterowanego logarytmu. Wykorzystując moje doświadczenie i znajomość literatury dotyczącej prawa iterowanego logarytmu, zasugerowałam (podczas dyskusji naukowej z T. Szarkiem), że odpowiednie wykorzystanie kryterium O. Zhao i M. Woodroofe'a [ZW08] może dać oczekiwany wynik. Razem zweryfikowaliśmy ten pomysł. Co ważne, K. Czudek przedstawił uzasadnienie, dlaczego rozważany proces można rozszerzyć dwukierunkowo. Wstępną wersję artykułu przygotował K. Czudek. Następnie wraz z T. Szarkiem dokonaliśmy niezbędnych poprawek i uzupełniliśmy szczegóły dowodu.

5 Opis wyników z prac niezwiązanymi z tematyką osiągnięcia naukowego

5.1 Lista artykułów naukowych

Najnowszy wynik (praca w recenzji)

[R1] H. Wojewódka-Ściążko, Z. Puchała, K. Korzekwa, *Resource engines*, w recenzji w Quantum, arXiv:2304.09559 [quant-ph] (2023), DOI 10.48550/arXiv.2304.09559.

Wyniki dotyczące wzmacniania losowości (prace powstałe podczas stażu podoktorskiego w Krajowym Centrum Informatyki Kwantowej w Gdańsku)

[Q1] H. Wojewódka, F.G.S.L. Brandão, A. Grudka, K. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki, M. Pawłowski, R. Ramanathan, M. Stankiewicz, *Amplifying the randomness of weak sources correlated with devices*, IEEE Trans. Inf. Theory. **63** (2017), no. 11, 7592–7611, DOI 10.1109/TIT. 2017.2738010.

[Q2] R. Ramanathan, F.G.S.L. Brandão, K. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki, H. Wojewódka, *Randomness amplification under minimal fundamental assumptions on the devices*, Phys. Rev. Lett. **117** (2016), no. 23, 230501, DOI 10.1103/PhysRevLett.117. 230501.

[Q3] F.G.S.L. Brandão, R. Ramanathan, A. Grudka, K. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki, T. Szarek, H. Wojewódka, *Realistic noise-tolerant randomness amplification using finite number of devices*, Nat. Commun. **7** (2016), no. 11345, DOI 10.1038/ncomms11345.

5.2 Omówienie wyników

5.2.1 Wstęp

W związku z realizacją interdyscyplinarnych projektów badawczych, dotyczących głównie teorii informacji kwantowej, czyli:

- europejskiego grantu *Randomness and Quantum Entanglement* (realizowanego podczas stażu w Krajowym Centrum Informatyki Kwantowej w Gdańsku w latach 2013-2016)
- oraz projektu FNP TEAM-NET pt. *Komputery kwantowe w najbliższej przyszłości: wyzwania, optymalne implementacje i zastosowania praktyczne* (realizowanego podczas stażu w Instytucie Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk w Gliwicach w latach 2020-2023),

moje zainteresowania badawcze obejmują również zastosowanie pewnych metod probabilistycznych w teorii informacji kwantowej – m.in. do generowania liczb losowych i wzmacniania losowości (obie te kwestie są istotne w kontekście kryptografii kwantowej), a także w teorii zasobów kwantowych czy w termodynamice kwantowej.

W kolejnym rozdziale opiszę najnowsze wyniki moich badań dotyczących silników zasobów (ang. *resoruce engines*) [R1] (pojęcie silników zasobów zostało niedawno wprowadzone do literatury przedmiotu przeze mnie, prof. dr. hab. Zbigniewa Puchałę i dr. hab. Kamila Korzekwę, z którymi nadal prowadzę badania dotyczące tego tematu) oraz wzmacniania losowości (ang. *randomness amplification*) (seria artykułów [Q1]-[Q3], poświęcona temu zagadnieniu, została przygotowana we współpracy z zespołem naukowców pod kierunkiem prof. dr. hab. Michała Horodeckiego, z którym wciąż pozostajemy w kontakcie naukowym i planujemy przyszłe badania – tym razem w dziedzinie termodynamiki kwantowej).

5.2.2 Przegląd wyników

Wyniki dotyczące silników zasobów

Biorąc pod uwagę, że inspiracje z dziedziny termodynamiki w teorii zasobów kwantowych dotychczas okazywały się być bardzo owocne, w artykule [R1] dążymy do posunięcia analogii między tymi dziedzinami o krok dalej. W literaturze przedmiotu znajdziemy liczne scenariusze z jednym zestawem ograniczonych operacji swobodnych (ang. *constrained free operations*), inspirowane dostępem do jednej łaźni cieplnej. Dla odmiany w [R1] proponujemy zbadanie wydajności ***silników zasobów***, które uogólniają pojęcie silników cieplnych, zastępując dostęp do dwóch łaźni cieplnych o różnych temperaturach dwoma dowolnymi ograniczeniami dotyczącymi przekształceń stanów.

Dokładniej mówiąc, rozważymy dwoje agentów (tradycyjnie określanych jako Alicja i Bob), z których każde stoi w obliczu innego ograniczenia. Oznacza to, że każde z nich może przygotować tylko pewien zbiór stanów swobodnych (od ang. *free states*) – odpowiednio F_A i F_B – oraz że każde z nich może wykonywać operacje kwantowe tylko z określonego zbioru operacji swobodnych – odpowiednio $\mathcal{F}_A$ i $\mathcal{F}_B$. Pomysł na naśladowanie działania dwusuwowego silnika cieplnego jest następujący: zamiast kolejno łączyć układ z gorącą i zimną łaźnią, wysyła się go na zmianę do Alicji i Boba, a oni mogą wykonywać dowolne operacje z ich ograniczonych zbiorów $\mathcal{F}_A$ i $\mathcal{F}_B$. Ponieważ stany i operacje, do których ma dostęp Alicja, będą na ogół stanowić pewien zasób w odniesieniu do ograniczeń Boba (i odwrotnie), odpowiednia liczba rund komunikacyjnych z lokalnie ograniczonymi operacjami (czyli suwów silnika zasobów) może generować stany kwantowe spoza zbiorów F_A i F_B. W związku z tym – łącząc dwie teorie zasobów, opisane przez $(F_A, \mathcal{F}_A)$ i $(F_B, \mathcal{F}_B)$ – można otrzymać nową teorię zasobów: z operacjami swobodnymi $\mathcal{F}_{AB} \supseteq \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B$ oraz stanami swobodnymi $F_{AB} \supseteq F_A \cup F_B$.

Naturalnie pojawia się wówczas wiele pytań, z których pierwsze brzmi: *Czy silnik zasobów zdefiniowany przez dane dwa ograniczenia może wygenerować pełny zbiór operacji kwantowych – lub przynajmniej zbliżać się dowolnie blisko do każdego elementu tego zbioru – gdy liczba suwów dąży do nieskończoności?*. Alternatywnie: *Czy przy pomocy takiego silnika zasobów możemy osiągnąć wszystkie możliwe stany końcowe, jeśli na starcie mamy dostęp tylko do stanów należących do F_A lub F_B?*. Jeśli odpowiedź na którekolwiek z tych pytań brzmi „tak”, to pojawiają się kolejne pytania: *Czy możemy oszacować lub ograniczyć liczbę suwów silnika zasobów potrzebnych do wygenerowania każdej operacji lub stanu?*, a także: *Jeśli istnieje stan, który jest maksymalnie zasobny (ang. maximally resourceful) w odniesieniu do ograniczeń zarówno Alicji, jak i Boba, to jaka minimalna liczba suwów jest potrzebna, aby go wygenerować?*. Należy zauważyć, że – biorąc pod uwagę, iż każdy suw trwa przez określony czas – w rzeczywistości odpowiada to badaniu optymalnej mocy silnika zasobów. Można też zapytać o odpowiednik sprawności silnika: mianowicie ilekroć Bob otrzymuje stan od Alicji i przekształca go za pomocą operacji z $\mathcal{F}_B$, nieuchronnie zmniejsza zawartość zasobów stanu, jaką dysponuje ze względu na swoje ograniczenie – ale może ją zwiększyć w odniesieniu do ograniczenia Alicji. Dlatego można zbadać optymalny kompromis: wydajność przekształcania zasobu Boba w zasób Alicji.

Główną motywacją wprowadzenia i badania silnika zasobów było to, że stanowi on naturalny sposób łączenia dwóch (lub więcej) teorii zasobów w duchu niedawnych prac nad teoriami wielu zasobów [1]. W pewnym sensie pozwala to na badanie kompatybilności różnych ograniczeń dotyczących dozwolonych przekształceń. W [R1] dopiero rozpoczynamy tego rodzaju badania, wprowadzając pomysły i analizując przykłady, ale mamy nadzieję, że dzięki temu będziemy w stanie opracować formalne ramy matematyczne umożliwiające fuzję dowolnych teorii zasobów. Dwie potencjalne metody realizacji tego celu mogą polegać na rozszerzeniu na wiele zasobów ramy ogólnej teorii zasobów wypukłych [2] lub na oszacowaniu złożoności kanałów kwantowych w zależności od zasobów [3].

W sekcji II w pracy [R1] analizujemy **perspektywę teorii zasobów w standardowych silnikach cieplnych**. Alicja i Bob mają ograniczony dostęp do łaźni cieplnych o różnych temperaturach α i β ($\beta < \alpha$). Zatem $\mathcal{F}_A$ i $\mathcal{F}_B$ są w tym przypadku zbiorami operacji termicznych z odwrotnymi temperaturami, a odpowiadające im zbiory stanów swobodnych są zbiorami jednopunktowymi $F_A = \{\gamma\}$ i $F_B = \{\mathbf{\Gamma}\}$, takimi że

$$\gamma_k = \frac{e^{-\alpha E_k}}{\sum_{i=1}^d e^{-\alpha E_i}}, \qquad \Gamma_k = \frac{e^{-\beta E_k}}{\sum_{i=1}^d e^{-\beta E_i}},$$

gdzie $\{E_i\}_i$ jest rodziną poziomów energetycznych układu. Najpierw podajemy pełny opis przykładu elementarnego układu dwupoziomowego. Następnie – dla silnika atermicznego z dowolnymi układami d-wymiarowymi – **szacujemy dolną i górną granicę zbioru F_{AB} stanów osiągalnych** (zob. wniosek 2 i twierdzenie 5 w pracy [R1]). Na koniec natomiast **pokazujemy, że zbiór F_{AB} stanów swobodnych powstały w wyniku połączenia dwóch teorii zasobów z zakresu termodynamiki – jednej o skończonej temperaturze β, a drugiej o nieskończonej temperaturze α – jest równy pełnemu sympleksowi prawdopodobieństwa. Ponadto zbieżność do pełnego sympleksu (wraz z rosnącą liczbą suwów) jest wykładnicza**.

Sekcja III poświęcona jest koncepcji **unitarnych silników koherencyjnych** (ang. *unitary coherence engines*). Przyjmijmy, że na Alicję i Boba nałożono ograniczenie, w myśl którego mogą wykonywać jedynie operacje unitarne diagonalne w swoich ustalonych bazach, tak więc koherencja względem tych baz jest dla nich zasobem. Zbiory stanów swobodnych określa się przez:

$$F_A = \{|i\rangle\}_{i=1}^d, \qquad F_B = \{U^\dagger |i\rangle\}_{i=1}^d,$$

gdzie U jest ustaloną macierzą unitarną nad ciałem $\mathbb{C}$ opisującą wzajemne położenie dwóch baz względem siebie. Zbiory $\mathcal{F}_A$ i $\mathcal{F}_B$ operacji swobodnych składają się zatem z macierzy unitarnych diagonalnych w wyróżnionych bazach. Ponownie zaczynamy od badania najprostszego przypadku układu dwupoziomowego. Odwołując się do prac [4, 5, 6] dotyczących generowania grupy obrotów, zauważamy, że Alicja i Bob mogą wygenerować dowolną macierz unitarną rzędu 2 za pomocą **silnika zasobów**, i że potrzebują do tego minimalnie $\lceil \pi/\alpha \rceil + 1$ suwów tego silnika. Podobnie – mogą wygenerować dowolny stan kwantowy, co z kolei wymaga $\lceil \pi/2\alpha \rceil + 1$ suwów silnika zasobów. Następnie przechodzimy do ogólnego przypadku układu o d poziomach i **omawiamy warunki, które zapewniają, że Alicja i Bob będą w stanie wygenerować każdą operację unitarną – tj. takie, że wówczas $\mathcal{F}_{AB}$ będzie pełnym zbiorem operacji unitarnych**. Mianowicie w twierdzeniu 9 w [R1] dowodzimy, że jeśli dla macierzy U, pojawiającej się w definicji zbioru $\mathcal{F}_B$, istnieje taka stała $M \in (0, \infty)$, że odpowiadająca jej macierz $(P_U^T P_U)^M$, gdzie $P_U = [p_{ij}]_{i,j=1}^d$ oraz

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{for } u_{ij} = 0 \\ 1 & \text{for } u_{ij} \neq 0 \end{cases},$$

ma wszystkie elementy różne od zera, to dowolna macierz unitarna może być przedstawiona jako iloczyn macierzy unitarnych z $\mathcal{F}_A$ i z $\mathcal{F}_B$. W dowodzie odwołujemy się do wyników dotyczących podgrup grupy unitarnej, które zawierają grupę macierzy diagonalnych (por. [7]). Później, w propozycjach 11 i 12, **analizujemy liczbę N suwów silnika, potrzebną do uzyskania wszystkich tych operacji, przedstawiając zarówno dolne, jak i górne ograniczenia dla** N. Na koniec omawiamy problem wykorzystania silnika zasobów do wytworzenia stanu, który jest jednocześnie maksymalnie zasobny zarówno dla Alicji, jak i dla Boba (por. sekcja III E).

Podsumowując, zauważmy, że wprowadzenie do teorii zasobów kwantowych pojęcia silnika zasobów inspirowanego podejściem termodynamicznym może zapewnić jednolite ramy do badania pozornie niezwiązanych ze sobą problemów z zakresu informacji kwantowej. Nasz – dość prosty – przykład unitarnych silników koherencyjnych można bezpośrednio powiązać z problemem kompilacji uniwersalnych układów kwantowych poprzez kontrolę hamiltonianów (zob. np. [8, 9, 10]). Wyniki dotyczące silników można więc stosować do optymalizacji kontroli kwantowej i kompilacji układów. Co więcej, w podobny sposób można spojrzeć na problem polegający na wykonaniu dowolnej liniowej transformacji optycznej [11, 12]: np. ograniczenie dla Alicji może zakładać używanie tylko masek fazowych (ang. *phase masks*), podczas gdy Bob może używać tylko transformaty Fouriera lub dzielnika wiązki (ang. *beam splitter*). Więcej przykładów podajemy w sekcji IV w [R1].

Wyniki dotyczące wzmacniania losowości

Losowość jest fundamentalnym pojęciem, mającym liczne implikacje dla wielu dziedzin – od bezpieczeństwa nowoczesnych systemów danych, przez fundamentalne prawa przyrody, aż po filozofię nauki. Losowość jest uważana za certyfikowaną (ang. *certified*), jeśli opisuje zdarzenia, których przeciwnik zewnętrzny nie może z góry określić. Tradycyjne generatory liczb losowych opierają się na fizyce klasycznej, która jest deterministyczna. Dlatego też nie możemy uznać losowości generowanej przez te urządzenia za wiarygodną – przynajmniej bez dodatkowych założeń lub przesłanek.

W związku z tym informatycy rozważają słabsze zadanie, jakim jest ***wzmacnianie losowości*** (ang. *randomness amplification*). W ujęciu ogólnym pomysł polega na wykorzystaniu danych wejściowych pochodzących ze źródła częściowo losowego – choć potencjalnie może być ono niemal deterministyczne – w celu uzyskania „w pełni losowych” bitów wyjściowych (gdzie przez „w pełni losowe” rozumiemy bity generowane niezależnie od siebie z rozkładem jednostajnym). W klasycznej teorii informacji wzmacnianie losowości z pojedynczego słabego źródła (tj. nie „w pełni losowego”) jest niemożliwe (zob. [13]) – jednak staje się możliwe, jeśli przyjmujemy zasadę braku sygnalizacji i stosujemy korelacje zaczerpnięte z mechaniki kwantowej (zob. [14]). Takie korelacje są operacyjnie ujawniane poprzez naruszenie nierówności Bella.

Jako model słabego źródła losowości do wzmacniania rozważamy ***źródło ε-SV*** (nazwane tak na cześć M. Santhy i U. Vaziraniego [13]), gdzie ε jest parametrem wskazującym, jak daleko jesteśmy od „pełnej losowości”. Źródło ε-SV jest określone przez rozkład prawdopodobieństwa $\mathbb{P}$ na ciągach bitów, taki że

$$\begin{aligned}&(0.5-\varepsilon) \leq \mathbb{P}(\varphi_1 = x_1|e) \leq (0.5+\varepsilon),\\&(0.5-\varepsilon) \leq \mathbb{P}(\varphi_{i+1} = x_{i+1}|\varphi_1 = x_1, \ldots, \varphi_i = x_i, e) \leq (0.5+\varepsilon)\end{aligned} \tag{26}$$

dla każdego $i \geq 1$ i wszystkich $x_1, \ldots, x_{i+1} \in \{0,1\}$, gdzie e jest dowolną zmienną losową opisującą stan wiedzy przeciwnika przed wygenerowaniem pierwszego bitu. Zauważmy, że kiedy

$\varepsilon = 0$, bity są „w pełni losowe”, podczas gdy dla $\varepsilon = 0.5$ bity są generowane w sposób deterministyczny.

Przez długi czas nie było jasne, czy wzmacnianie losowości znajdzie rzeczywiste zastosowanie, ponieważ istniejące wcześniej protokoły takiego wzmacniania albo nie tolerowały szumu (ang. *noise*), albo wymagały użycia nieskończonej liczby urządzeń.

W artykule [Q3] prezentujemy protokół odporny na szum i wykorzystujący tylko skończoną liczbę urządzeń do wzmacniania dowolnie słabego źródła losowości tak, że stanie się ono źródłem generującym bity niemal „w pełni losowe”, które są odporne na działanie przeciwnika respektującego jedynie zasadę braku sygnalizacji. Poprawność protokołu można ocenić poprzez naruszenie nierówności Bella (ang. *the Bell inequality violation*), przy czym stopień naruszenia określa próg tolerancji na zakłócenia. W dowodach łączymy wyniki z klasycznej teorii ekstraktorów (por. [15, 16, 17]), niedawno odkryte podejście do twierdzenia de Finettiego wywiedzione z teorii informacji [18] oraz nierówność Azumy-Hoeffdinga [19].

Podsumowanie wyników z [Q3].

Nasz artykuł [Q3] był cytowany 37 razy i stał się inspiracją dla kilku istotnych osiągnięć. Na przykład autorzy pracy [20], opierając się głównie na naszych pomysłach przedstawionych w [Q3] oraz tych zawartych w [21], opracowali niedawno kompleksowy i praktyczny protokół wzmacniania losowości i prywatności oparty na testach Bella. Co ważne, przetestowali oni ten protokół na różnych komputerach kwantowych, mimo że nie były one specjalnie przystosowane do tego celu. To podejście (częściowo niezależne od urządzenia; ang. *semi-device-independent*) pozwoliło na generowanie niemal „w pełni losowych” i „prywatnych” (tj. niezależnych od osób trzecich) liczb na współczesnych komputerach kwantowych.

Natomiast **z praktycznego punktu widzenia istotne jest pytanie, czy można wygenerować kryptograficznie bezpieczne bity losowe, jeśli zachodzą minimalne warunki niezbędne do wykonania tego zadania. Inaczej: czy możemy to osiągnąć, wykorzystując tylko dwa komponenty niesygnalizujące, i w sytuacji, w której naruszenie nierówności Bella gwarantuje jedynie, że niektóre dane wyjściowe z urządzenia dla określonych wejść wykazują losowość. Odpowiedź na to pytanie brzmi „tak” i znajduje się w artykule [Q2].** Precyzyjniej mówiąc, w [Q2] prezentujemy protokół (niezależny od urządzenia, ang. *device-independent*) do wzmacniania losowości źródeł ε-SV, korzystając z urządzenia składającego się z dwóch komponentów niesygnalizujących. Wykazujemy, że ten protokół jest w stanie wzmacniać dowolne źródło, które nie jest w pełni deterministyczne, tak, że staje się ono źródłem, które jest „w pełni losowe”, a jednocześnie – tolerować stały poziom szumu, i dowodzimy, że procedura ta jest bezpieczna wobec ataku ogólnych przeciwników niesygnalizujących. Naszą główną innowacją jest przedstawienie dowodu, że nawet częściowa losowość potwierdzana przez dwuosobowy test Bella (jedna para wejście-wyjście $(\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^*)$, dla której prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(\mathbf{x}^*|\mathbf{u}^*)$ jest oddzielone od 1 dla wszystkich strategii niesygnalizujących, które optymalnie naruszają nierówność Bella) może zostać wykorzystana do wzmacniania. Wprowadzamy metodologię częściowej procedury tomograficznej na podstawie statystyk empirycznych uzyskanych w teście Bella, co zapewnia, że dane wyjściowe stanowią liniowe źródło losowości o minimalnej entropii (ang. *a linear min-entropy source of randomness*).

Podsumowanie wyników z [Q2].

W [Q1] koncentrujemy się na kwestii możliwości wzmacniania losowości źródeł za pomocą urządzeń od nich zależnych (mamy świadomość, że w praktyce trudno zapewnić całkowitą niezależność urządzenia od źródła). Zamiast wymagać, aby źródło i urządzenie były niezależne, ograniczamy korelacje między nimi jedynie za pomocą jednego warunku, który

Podsumowanie wyników z [Q1].

nazywamy ***warunkiem SV dla pudeł*** (szczegóły można znaleźć w sekcji IV B w [Q1]). **Dowodzimy bezpieczeństwa zaproponowanego protokołu (zob. sekcja VII i rysunek 6 w [Q1]) przeciwko pewnej klasie ataków wykorzystujących korelacje między źródłem a urządzeniem (przy założeniu, że przeciwnik przestrzega zasady niesygnalizowania).** Precyzyjniej mówiąc – dowodzimy, że najbardziej złośliwe korelacje (między źródłem a urządzeniem) są niedozwolone ze względu na założenie, że źródło ε-SV pozostaje źródłem ε-SV nawet po uzyskaniu danych wejściowych i wyjściowych z pudeł. Dlatego wzmacnianie losowości nadal jest możliwe. Nasza nowa metoda dowodu pozwala zatem analizować atak, w którym przeciwnik wysyła uczciwym stronom te pudła, które są dostosowane dokładnie do ich ustawień pomiarowych, a także do zastosowanej funkcji haszującej (ang. *hashing function*). Zagrożenia wynikające z takich ataków omawiamy na konkretnym przykładzie w sekcji III w [Q1].

Zauważmy tutaj, że inni również próbowali osłabić założenie niezależności. W pracy [22] podejście to jest przedstawione w formalizmie kwantowym, podczas gdy w pracy [23], która została ogłoszona później niż pierwsza wersja naszego artykułu, także dowiedziono (w podobnym duchu) bezpieczeństwa wobec ataku przeciwników niesygnalizujących, jednak przy użyciu większej liczby urządzeń. Nasze podejście różni się od zaproponowanego w [22] i [23]. Uważamy, że wyniki uzyskane w ramach artykułu [Q1] rzucają nowe światło na badania nad wzmacnianiem losowości i – ze względu na klarowność założeń – są również istotne dla bardziej ogólnego zadania uzyskiwania bezpiecznych bitów klucza w kryptografii.

Literatura

[1] C. Sparaciari, L. Del Rio, C. M. Scandolo, P. Faist, J. Oppenheim, *The first law of general quantum resource theories*, Quantum **4** (2020), no. 259.

[2] R. Takagi, B. Regula, *General resource theories in quantum mechanics and beyond: operational characterization via discrimination tasks*, Phys. Rev. X **9** (2019), no. 031053.

[3] R. Araiza, Y. Chen, M. Junge, and P. Wu, *Resource-dependent complexity of quantum channels*, arXiv:2303.11304 [quant-ph] (2023).

[4] F. Lowenthal, *Uniform finite generation of the rotation group*, Rocky Mt. J. Math. **1** (1971), no. 575.

[5] F. Lowenthal, *Uniform finite generation of SU(2) and SL(2, R)*, Canad. J. Math. **24** (1972), no. 713.

[6] M. Hamada, *The minimum number of rotations about two axes for constructing an arbitrarily fixed rotation*, R. Soc. Open Sci.**1** (2014), no. 3.

[7] Z. Borevich and S. Krupetskij, *Subgroups of the unitary group that contain the group of diagonal matrices*, J. Sov. Math. **17** (1981), 1951–1959.

[8] S. Lloyd, *Almost any quantum logic gate is universal*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 346.

[9] N. Weaver, *On the universality of almost every quantum logic gate*, J. Math. Phys. **41** (2000), no. 240.

[10] V. Ramakrishna, K. L. Flores, H. Rabitz, R. J. Ober, *Quantum control by decompositions of SU(2)*, Phys. Rev. A **62** (2000), 053409.

[11] V.L. Pastor, J. Lundeen, F. Marquardt, *Arbitrary optical wave evolution with Fourier transforms and phase masks*, Opt. Express **29** (2021), no. 23, 38441–38450.

[12] L. Pereira, A. Rojas, G. Cañas, G. Lima, A. Delgado, A. Cabello, *Minimum optical depth multi-port interferometers for approximating any unitary transformation and any pure state*, arXiv:2303.11304 [quant-ph] (2023).

[13] M. Santha, U.V. Vazirani, *Generating quasi-random sequences from slightly-random sources*, Proc. 25th IEEE Symp. Found. Comput. Sci. (FOCS'84) (1984), 434–440.

[14] R. Colbeck, R. Renner, *Free randomness can be amplified* Nat. Phys. **8** (2012), 450–453.

[15] E. Chattopadhyay, D. Zuckerman, *Explicit two-source extractors and resilient functions*, Electronic colloquium on computational complexity, Revision 1 of Report No 119 (2015).

[16] B. Chor, O. Goldreich, *Unbiased bits from sources of weak randomness and probabilistic communication complexity*, IEEE 26th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. (1985), 429–442.

[17] X. Li, *Extractors for a constant number of independent sources with polylogarithmic min-entropy*, IEEE 54th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. (FOCS) (2013), 100–109.

[18] F.G.S.L. Brandão, A.W. Harrow, *Quantum de Finetti theorems under local measurements with applications*, Proc. 45th Annu. ACM Symp. Theory Comput. (STOC'13) (2013), 861–870.

[19] S. Pironio, S. Massar, *Security of practical private randomness generation*, Phys. Rev. A **87** (2013), no. 012336.

[20] C. Foreman, S. Wright, A. Edgington, M. Berta, F.J. Curchod, *Practical randomness amplification and privatisation with implementations on quantum computers*, Quantum **7** (2023), no. 969.

[21] M. Kessler, R. Arnon-Friedman, *Device-independent randomness amplification and privatization*, IEEE Journal on Selected Areas in Information Theory **1** (2020), no. 2, 568–584.

[22] K.-M. Chung, Y. Shi, X. Wu, *Physical randomness extractors: generating random numbers with minimal assumptions*, arXiv:1402.4797 [quant-ph] (2014).

[23] K.-M. Chung, Y. Shi, X. Wu, *General randomness amplification with non-signaling security*, Available at https://api.semanticscholar.org/CorpusID:17461712 (2016).

6 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej, w szczególności zagranicznej

Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (stałe zatrudnienie)

W październiku 2016 r. podjęłam zatrudnienie w **Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach** (IM UŚ), gdzie do dzisiaj pracuję na stanowisku adiunkta (pracownik naukowo-dydaktyczny) i prowadzę badania dotyczące asymptotyki i własności ergodycznych pewnych markowowskich układów dynamicznych (zob. np. prace [H2]-[H5] lub [E2]-[E4]).

Potwierdzeniem dobrej rozpoznawalności mojej działalności naukowej w kraju i za granicą są zaproszenia do wygłoszenia referatów i wykładów podczas licznych konferencji, m.in.:

- międzynarodowej konferencji ***Mathematical Modeling with Measures: Where Applications, Probability and Determinism Meet*** (Lejda, 3-7.12.2018, **referat wygłoszony na zaproszenie** pt. *Useful versions of limit theorems for certain non-stationary Markov chains*),
- ***XVII Konferencji z Probabilistyki*** (Będlewo, 22-26.05.2023, **wykład plenarny** pt. *Centralne twierdzenie graniczne dla procesów Markowa wykładniczo ergodycznych w normie Forteta–Mouriera*),

a także podczas seminariów Instytutu Matematyki Polskiej Akademii Nauk (IM PAN) w Warszawie (z *Równań Różniczkowych Cząstkowych* w dniu 15.04.2019 i *Procesów Stochastycznych* w dniu 28.03.2023). **Łącznie wygłosiłam referaty na dziesięciu międzynarodowych konferencjach matematycznych, w tym na *Bernoulli-IMS 10th World Congress in Probability and Statistics*** (Seoul, 19-23.07.2021).

W okresie 2.03.2020-31.05.2021 miałam **przerwę w działalności naukowej** – najpierw spowodowaną niezdolnością do pracy, a następnie urlopami: macierzyńskim i rodzicielskim.

W dniach 1.10.2021-30.06.2023 przebywałam na urlopie bezpłatnym w UŚ w Katowicach (w tym czasie byłam zaangażowana w realizację projektów badawczych w Instytucie Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk w Gliwicach).

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk (staż podoktorski)

We wrześniu 2019 r. zostałam zaproszona przez prof. dr. hab. Zbigniewa Puchałę, lidera grupy *Quantum Machine Learning* w projekcie ***Komputery kwantowe w najbliższej przyszłości: wyzwania, optymalne implementacje i zastosowania praktyczne*** (numer grantu: POIR.04.04.00-00-17C1/18-00, TEAM-NET, Fundacja na Rzecz Nauki Polskiej), do współrealizacji tego projektu. W grudniu 2019 r. podjęłam dodatkowe zatrudnienie (na pół etatu) w **Instytucie Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk** (IITiS PAN) w Gliwicach.

W okresie, kiedy przebywałam na urlopie bezpłatnym w UŚ w Katowicach, zwiększono mój wymiar czasu pracy w projekcie TEAM-NET do pełnego etatu i dodatkowo zatrudniono mnie w projekcie dr. hab. Bartłomieja Gardasa zatytułowanym *Symulacje układów fizycznych za pomocą technologii wyżarzania niedalekiej przyszłości* (numer grantu: 2020/38/E/ST3/00269, Sonata BIS 10, Narodowe Centrum Nauki).

W tym czasie szczególnie zainteresowałam się teorią zasobów kwantowych i nawiązałam współpracę z dr. hab. Kamilem Korzekwą z **Wydziału Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego**. Efektem tej współpracy jest wspólny artykuł [R1], który promowałam już na międzynarodowych konferencjach

- *Quantum Resources: from Mathematical Foundations to Operational Characterisation* (Singapur, 5-8.12.2022),
- *Near Term Quantum Computing 2020(+3)* (Warszawa, 22-24.03.2023)
- oraz *14TH KCIK-ICTQT Symposium on Quantum Information* (Sopot, 18-20.05.2023, **referat wygłoszony na zaproszenie**).

Nasze pomysły zostały entuzjastycznie przyjęte przez uczestników tych konferencji.

Instytut Matematyki Uniwersytetu w Lejdzie (długoterminowa współpraca międzynarodowa i staże zagraniczne)

W dniach 09-14.12.2013 i 15-19.12.2014 odbyłam swoje pierwsze wyjazdy studyjne do Holandii do **Instytutu Matematyki Uniwersytetu w Lejdzie** (MI LU), dzięki którym nawiązałam intensywną współpracę naukową z dr. Sandrem C. Hille. Wspólne badania zaowocowały publikacjami [D1] i [D2], a także kolejnymi zaproszeniami do MI LU. W terminach 18.06-18.07.2017 oraz 30.01-01.03.2018 zrealizowałam dwa **miesięczne staże**, z których drugi został sfinansowany ze *Stypendium Wyjazdowego* przyznanego mi w ramach programu START FNP 2017. Kolejne, już krótsze, wizyty w MI LU zrealizowałam w dniach 2-18.12.2018 i 3-12.02.2019 – w ramach realizacji odpowiednio projektu Miniatura NCN i *Małego Grantu* Rektora Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach.

Efektem współpracy naukowej z dr. Sandrem C. Hille w latach 2017-2019 są publikacje [H3] i [E4], w których dowodzimy kolejno pewnych własności miar niezmienniczych i prawa iterowanego logarytmu dla rozważanych procesów Markowa kawałkami deterministycznych.

Wreszcie w okresie 31.08-30.11.2022 odbyłam **trzymiesięczny staż zagraniczny** w MI LU, podczas którego wspólnie z dr. Sandrem C. Hille rozpoczęliśmy zupełnie nowy projekt, dotyczący badania tempa zbieżności do rozkładu stacjonarnego w pewnych symulacjach Monte Carlo. Do współpracy zaprosiliśmy również dr. Jorisa Bierkensa z **Uniwersytetu Technicznego w Delft**, którego poznałam podczas minisympozjów organizowanych w czasie mojego pobytu w Lejdzie. Badania są kontynuowane do dziś.

Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki Uniwersytetu Gdańskiego, Krajowe Centrum Informatyki Kwantowej w Gdańsku (staż podoktorski)

W październiku 2013 r., jeszcze jako doktorantka, rozpoczęłam pracę jako asystent (pracownik naukowy) w **Instytucie Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki Uniwersytetu Gdańskiego** (IFTiA UG), skąd zostałam oddelegowana do pracy w **Krajowym Centrum Informatyki Kwantowej w Gdańsku** (KCIK), gdzie pod kierunkiem prof. dr. hab. Michała Horodeckiego realizowałam **europejski grant *Randomness and Quantum Entanglement*** (akronim RAQUEL, numer projektu 323970, Siódmy Program Ramowy Unii Europejskiej). Po ukończeniu studiów doktoranckich i uzyskaniu stopnia naukowego doktora (w lipcu 2015 r.) kontynuowałam zatrudnienie w IFTiA UG (oraz KCIK), już jako adiunkt, do końca września 2016 r.

W tym okresie zajmowałam się problemem generacji losowości, istotnym m.in. z punktu widzenia kryptografii. Efektem moich badań są trzy publikacje: [Q1]-[Q3].

Udział w projekcie *Randomness and Quantum Entanglement* umożliwił mi pracę w międzynarodowym i interdyscyplinarnym zespole, składającym się z fizyków, matematyków i informatyków. W latach 2013-2015 wykonawcy projektu, tj. pracownicy Uniwersytetu Masaryka w Brnie, Politechniki Federalnej w Zurychu, Wolnego Uniwersytetu w Berlinie, Uniwersytetu Autonomicznego w Barcelonie, Uniwersytetu Łotewskiego i Uniwersytetu Gdańskiego, spotykali się co roku na konferencjach ***RAQUEL Scientific Meeting*, organizowanych kolejno w Brnie, Barcelonie oraz Sopocie** (ostatnią konferencję organizowałam wspólnie z dr. Piotrem Ćwiklińskim), prezentując swoje wyniki i prowadząc dyskusje na temat otwartych problemów badawczych.

W tym okresie miałam również możliwość odbyć szereg wizyt naukowych (zarówno krajowych, jak i zagranicznych), m.in. do **Instytu Fizyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu** (w dniach 12-16.05.2014 i 8-11.09.2014, w celu współpracy z prof. dr. hab. Andrzejem Grudką, której efektem są prace [Q1] i [Q3]) czy **Instytutu Fizyki Teoretycznej Politechniki Federalnej w Zurychu** (w dniach 6-12.12.2015, w celu konsultacji naukowej z prof. dr. Renato Rennerem i jego grupą badawczą, dotyczącej pracy [Q1]), a także wziąć udział w licznych międzynarodowych konferencjach, m.in. w Sydney, Barcelonie, Seefeld, Waszyngtonie czy Berlinie, podczas których promowałam swoje wyniki.

Przygotowując publikacje [Q1]-[Q3], nawiązałam współpracę naukową z prof. Fernandem G.S.L. Brandão z **Kalifornijskiego Instytutu Technicznego** (Caltech) (pracującym wcześniej w *Microsoft* oraz Kolegium Uniwersyteckim w Londynie).

Pod koniec stażu podoktorskiego w KCIK w Gdańsku zostałam wyróżniona zaproszeniem do wygłoszenia referatu pt. *Towards realistic randomness amplification* podczas *Symposium KCIK* (Sopot, 22-24.05.2016). Do zaprezentowania wyników z cyklu prac [Q1]-[Q3] zostałam również **zaproszona przez komitet programowy *44. Zjazdu Fizyków Polskich*** (Wrocław, 10-15.09.2017), a także przez prowadzących seminarium *Chaos i Informacja Kwantowa* Zakładu Optyki Kwantowej Uniwersytetu Jagiellońskiego (Kraków, 13.11.2017), i wreszcie – przez organizatorów konferencji *Quantum Foundations and Beyond* (Sopot, 8-9.12.2017).

W 2017 r. otrzymałam **zagraniczne stypendium od Instytutu Henriego Poincaré (IHP) w Paryżu**, dzięki czemu mogłam wziąć udział w programie zatytułowanym *T3-2017 Analysis in Quantum Information Theory*, realizowanym właśnie w IHP (stypendium pozwoliło mi odbyć **miesięczną wizytę studyjną** do Paryża w dniach 19.11-17.12.2017; w tym czasie brałam udział w wykładach i dyskusjach naukowych, a także prezentowałam swoje wyniki podczas *Main Conference Quantum Information Theory, IHP Trimester*).

Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego (studia doktoranckie)

Środowiskowe Studia Doktoranckie z Matematyki i Informatyki w **Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego** rozpoczęłam w październiku 2011 r., a ukończyłam w lipcu 2015 r. W tym okresie moje zainteresowania były skupione wokół analizy losowego układu dynamicznego, wykorzystywanego m.in. do opisu procesu podziału komórki (zob. [D1]-[D3]). Swoje wyniki promowałam, wygłaszając referaty, m.in. na międzynarodowych konferencjach *CNRS-PAN Mathematics Summer Institute* w Krakowie w 2013 i 2015 r.

7 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

Osiągnięcia dydaktyczne

Prowadzenie wykładów i ćwiczeń

- W roku akademickim 2021/2022 prowadziłam w trybie online wykład *Probability and statistics* (w języku angielskim) dla studentów **studiów magisterskich (na kierunku *Quantum Information Technology*) w Uniwersytecie Gdańskim**.
- Od października 2016 r. do lutego 2020 r. prowadziłam liczne **wykłady i ćwiczenia na Wydziale Nauk Ścisłych i Technicznych Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach** (zgodnie z obowiązującym mnie pensum 210 godzin zajęć dydaktycznych rocznie), m.in. *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, *Rachunek prawdopodobieństwa*, *Elementy statystyki*, *Podstawy metod probabilistycznych i statystyki*, *Wstęp do informatyki*, a także *Warsztaty problemowe*, *Seminaria dyplomowe* czy *Pracownię magisterską*.
- W roku akademickim 2015/2016 prowadziłam wykłady *Stochastyczne równania różniczkowe* i *Zastosowania procesów semi-markowskich* dla studentów matematyki w Katedrze Rachunku Prawdopodobieństwa i Biomatematyki na **Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej**.

Opieka nad studentami

- **Promotorka prac magisterskich** obronionych w 2019 r. (Pauliny Lewandowskiej – praca pt. *Norma bazowa w problemie rozróżniania pomiarów kwantowych* oraz Ryszarda Kukulskiego – praca pt. *Pewne asymptotyczne własności operatorów Markowa*, obroniona **z wyróżnieniem**).
- **Promotorka prac licencjackich** obronionych w 2019 r. (Pauliny Gamrat, Małgorzaty Kubickiej i Natalii Czerniszew) oraz w 2017 r. (Agaty Dytkowskiej, Katarzyny Chmury, Ryszarda Kukulskiego i Agaty Malisz).

Osiągnięcia organizacyjne

- Współorganizacja (wraz z prof. dr hab. Katarzyną Horbacz i dr. Dawidem Czaplą) dwóch edycji ***Mikrokonferencji z procesów stochastycznych*** (Katowice, 6-7.06.2023 oraz 20-22.06.2022).
- Członkostwo w **Radzie Naukowej Instytutu Matematyki** w Uniwersytecie Śląskim w Katowicach w roku akademickim 2020/2021 oraz 2021/2022.
- Członkostwo w **Radzie Dydaktycznej Kierunku Matematyka** na Wydziale Nauk Ścisłych i Technicznych Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach w roku akademickim 2019/2020.
- Współprowadzenie (wraz z dr. Pawłem Mazurkiem) **strony internetowej Krajowego Centrum Informatyki Kwantowej** w Gdańsku w latach 2015-2016.
- Współorganizacja (wraz z dr. Piotrem Ćwiklińskim) międzynarodowej konferencji ***3rd RAQUEL scientific meeting*** (Sopot, 8-9.10.2015).

Osiągnięcia popularyzujące naukę

- Przygotowanie i prowadzenie dwoch edycji ***Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków*** (Szczyrk, 6-9.06.2019 i 14-17.06.2018).
- Wygłoszenie referatu pt. *Co to jest losowość i czy można ją wzmacniać?* podczas ***XII Święta Liczby Pi***, tj. wydarzenia popularyzatorskiego organizowanego co roku na Wydziale Nauk Ścisłych i Technicznych Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach (Katowice, 14.08.2018).
- Prowadzenie warsztatów dla młodzieży licealnej i gimnazjalnej w ramach cyklu spotkań akademickich, będącego elementem programu ***Zdolni z Pomorza***, tworzonego we współpracy Fundacji Rozwoju Uniwersytetu Gdańskiego i Uniwersytetu Gdańskiego, w latach 2012 i 2013.
- Zdobycie **I nagrody w konkursie *Bajka Matematyczna***, organizowanym przez Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego i Fundację Wspólnoty Gdańska w 2011 r., za bajkę pt. *Przyjaciele z Gdańska.*
- Prowadzenie imprezy festiwalowej pt. *What mathematics has to do with love?* podczas ***VIII Bałtyckiego Festiwalu Nauki*** (Gdańsk, Sopot, 27.05.2010).

8 Inne informacje, dotyczące kariery zawodowej

Wybrane stypendia i nagrody

2018

Nagroda Indywidualna Rektora III Stopnia za działalność naukowo-badawczą, przyznana przez JM Rektora Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach.

2017

Stypendium START przyznawane przez Fundację na rzecz Nauki Polskiej najlepszym młodym badaczom poniżej 30 r.ż. reprezentującym wszystkie dziedziny nauki.

Stypendium im. Barbary Skargi przyznawane przez Fundację na rzecz Nauki Polskiej osobie, której „badania wyróżniają się odważnym przekraczaniem granic pomiędzy różnymi dziedzinami nauki, otwierają nowe perspektywy badawcze i tworzą nowe wartości w nauce" (cyt. za oficjalną stroną www FNP).

Stypendium wyjazdowe START przyznawane przez Fundację na rzecz Nauki Polskiej wybranym laureatom programu START, umożliwiające czterotygodniowy staż naukowy w wybranym przez stypendystę ośrodku badawczym – w moim przypadku w Instytucie Matematyki Uniwersytetu w Lejdzie w Holandii.

Zagraniczne stypendium Instytutu Henriego Poincaré w Paryżu, umożliwiające udział w programie *T3-2017 Analysis in Quantum Information Theory* (*IHP Trimester*).

Kierowanie projektami badawczymi

2018-2019

Modelowanie matematyczne z wykorzystaniem rachunku na miarach
(grant **MINIATURA** Narodowego Centrum Nauki
o numerze 2018/02/X/ST1/01518).

Własności i zastosowania pewnych losowych markowowskich układów dynamicznych
(**MAŁY GRANT** finansowany ze środków JM Rektora Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach w ramach programu wspierającego inicjatywy grantowe i zwiększającego możliwości i szanse pracowników Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach na pozyskanie projektów w konkursach zewnętrznych).

Hanna Wojewódka-Ściążko