dr hab. Mirosława Zima, prof. UR
Instytut Matematyki
Kolegium Nauk Przyrodniczych
Uniwersytet Rzeszowski

Rzeszów, 20 lipca 2023 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgra Marka Morawiaka
pod tytułem
Problemy regularności układów równań różniczkowych linearyzowanych w otoczeniu torusa

1 Informacje wstępne

Rozprawa doktorska mgra Marka Morawiaka liczy 96 stron, składa się ze wstępu, trzech rozdziałów i bibliografii obejmującej 38 pozycji. Została napisana w języku polskim. Promotorem pracy jest prof. dr hab. Viktor Kulyk. Rozprawa jest poświęcona zagadnieniom związanym z liniowymi rozszerzeniami układów równań różniczkowych na torusie.

2 Omówienie głównych wyników

Rozdział pierwszy rozprawy poświęcony jest omówieniu wyników dotyczących liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie czyli układów równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $a = (a_1, \ldots, a_m)$ są funkcjami wektorowymi, A jest macierzą kwadratową stopnia n, przy czym a jest funkcją ciągłą i 2π-okresową względem każdej zmiennej φ_i, natomiast elementami macierzy A są funkcje ciągłe 2π-okresowe względem każdej zmiennej φ_i (w symbolicznym zapisie $a(\varphi) \in C^0(T_m)$, $A(\varphi) \in C^0(T_m)$, gdzie T_m jest m-wymiarowym torusem).

Wraz z układem (1) rozważany jest układ

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $f(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Autor na wstępie przypomina pojęcie funkcji Greena-Samojlenki (definicja 1.1.2) układu (1) oraz omawia jej związek z istnieniem inwariantnego (niezmienniczego) torusa dla układu

(2). W definicji 1.1.3 podaje też klasyfikację regularności układów postaci (1) związaną z istnieniem funkcji Greena-Samojlenki. Należy zaznaczyć, że definicja ta jest nieprecyzyjnie sformułowana, gdyż warunek (1.1.0.9) jest zawarty w definicji funkcji Greena-Samojlenki. W dalszej części rozdziału Autor zajmuje się zastosowaniem tzw. uogólnionej funkcji Lapunova do badania regularności układów postaci (1), czyli zagadnienia istnienia jedynej funkcji Greena-Samojlenki. Metoda ta polega na wykazaniu istnienia uogólnionej funkcji Lapunova, to jest niezdegenerowanej, mogącej zmieniać znak, formy kwadratowej, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu jest dodatnio określona.

Ciekawszymi wynikami przedstawionymi w tym rozdziale są twierdzenia o regularności układów pochodzące głównie z artykułów [24] i [25]. Autor przedstawia szereg warunków wystarczających na to aby układ postaci (1) był regularny. Są to interesujące wyniki, jednak odnoszę wrażenie, że część z nich jest jedynie nieznaczną modyfikacją rezultatów przedstawionych w [21]. Na przykład, układ (1.2.2.1) jest modyfikacją układu (7.1) rozpatrywanego w [21, str. 76]. Warunki wystarczające nałożone na macierze B i C w twierdzeniu 1.2.5 są identyczne do tych podanych w [21]. Wydaje się, że naturalną kwestią powinno być odniesienie się w rozprawie do tych wyników i podkreślenie podobieństw i różnic. Z kolei przykład (1.1.9), stanowiący istotną motywację do badania klas układów regularnych o zdegenerowanej, zmiennej macierzy współczynników, można znaleźć w [21, str. 22], co w rozprawie nie jest odnotowane. Jest to ogólna krytyczna uwaga do treści rozprawy. Autor w znikomym stopniu porównuje swoje wyniki z rezultatami prac innych autorów.

W rozdziale drugim Autor zajmuje się badaniem regularności liniowych układów równań różniczkowych postaci $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, gdzie A jest macierzą kwadratową n wymiarową, której elementami są funkcje ciągłe i ograniczone na $\mathbb{R}$. Podobnie jak w rozdziale pierwszym, podstawowym narzędziem jest uogólniona funkcja Lapunova. Główne twierdzenia tego rozdziału pochodzą z publikacji [26]. Niestety trudno je uznać za oryginalne rozwiązanie problemu naukowego przez Autora rozprawy. Twierdzenie 2.2.1 i jego dowód są bardzo zbliżone do wyników zawartych w artykule

- D. Pączko, V. Kulyk, *Some conditions of regularity of linear extensions of dynamical systems with respect to selected variables*, Nonlinear Analysis, Modelling and Control 19 (2014), 602–610.

Z kolei twierdzenie 2.2.3 jak i jego dowód są w zasadzie identyczne z wynikami przedstawionymi w artykule

- I. M. Hrod, V. L. Kulyk, *Construction of Lyapunov Functions in the Form of Pencils of Quadratic Forms.* J. Math. Sci. 243 (2019), 183—191.

Podkreślam, że żadna z tych publikacji nie została zamieszczona przez Autora rozprawy w bibliografii.

Ostatni rozdział pracy jest poświęcony istnieniu okresowych rozwiązań nierówności różniczkowych. Autor pokazuje, że warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia okresowych, nieprzyjmujących wartości zero, rozwiązań rozważanych nierówności różniczkowych jest regularność odpowiedniego liniowego rozszerzenia układu dynamicznego. Znowu głównym narzędziem jest uogólniona funkcja Lapunowa.

3 Uwagi szczegółowe

Pojawiający się w wielu miejscach rozprawy termin *równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych*, czy też *nierówność o pochodnych cząstkowych* (np. str. 26, str. 28, str. 29, str. 31, str. 87) nie jest zgodny z nazewnictwem stosowanym w języku polskim. W kilku miejscach rozprawy (m. in. w przykładach 1.1.8, 2.1.4) używane jest z kolei sformułowanie *Niech dany jest układ równań różniczkowych*, które nie jest poprawne gramatycznie. Zauważyłam też błędy językowe m. in. na str. 33, 37, 56, 68, 76.

W całej rozprawie, dla niewiadomych funkcji wektorowych x i φ zmiennej t w rozważanych układach równań, stosowana jest notacja $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in T_m$, która nie jest precyzyjna. To wartości funkcji x i φ należą odpowiednio do $\mathbb{R}^n$ i T_m.

Twierdzenie 1.2.1 należało raczej podać jako wniosek z ogólniejszego twierdzenia 1.2.2. Wniosek 1.2.3 nie jest precyzyjnie sformułowany, gdyż warunek w nim podany jest ogólniejszy od (1.2.1.28).

Słabą stronę pracy stanowi duża liczba usterek technicznych (literówek), która wprawdzie nie ma wpływu na zawartość merytoryczną, ale utrudnia, zwłaszcza w dowodach twierdzeń i przykładach, prześledzenie rozumowań prowadzonych przez Autora. Poniżej wykaz wybranych tego typu błędów:

- str. 13, we wzorze (1.1.0.15) i nierówności (1.1.0.16) należy zastąpić τ przez φ
- str. 19, ostatnia linia: zamiast $(6 + \cos\varphi)$ powinno być $(6 - 2\cos\varphi)$
- str. 30, literówki w (1.2.1.17)-(1.2.1.19),
- str. 34, linia 10 od dołu: zbędny jeden składnik $\langle x, x\rangle$,
- str. 38, linia 5: brak wyrażenia $\cos^2(\varphi_1)$, ostatnia linia $f(\sigma) = ...\|S\|\sigma...$,
- str. 39, linia 5: $... - 2\|SB\|_0\|x_1\|...$,
- str. 39, linia 9 od dołu: $\|x_0^2\| = 1$,
- str. 39, linia 8: od dołu $M_2 = 2...$,
- str. 66, linia 4: powinno być $4p$,

- str. 72, ostatnia linia: brak określenia macierzy $C^{-1}(t)$,
- str. 79, linia 2: kilka usterek w zapisie dwóch składników,
- str. 83, we wzorze (3.0.0.7) powinno być $\frac{2}{3}$.

4 Konkluzja

W mojej ocenie rozprawa niestety nie spełnia wszystkich wymogów stawianych ustawowo i zwyczajowo rozprawom doktorskim, w szczególności przez art. 187, ust. 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. Główną przyczyną jest brak oryginalności wyników zawartych w rozdziale drugim rozprawy. Z tego powodu wnioskuję o niedopuszczenie Pana mgra Marka Morawiaka do kolejnych etapów przewodu doktorskiego.