UNIWERSYTET ŚLĄSKI W KATOWICACH
WYDZIAŁ NAUK ŚCISŁYCH I TECHNICZNYCH
INSTYTUT MATEMATYKI

Problemy regularności układów równań różniczkowych linearyzowanych w otoczeniu torusa

Marek Morawiak

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Viktora Kulyka

KATOWICE 2023

Spis treści

Wstęp

Ciągły rozwój wielu działów matematyki znacząco wpływa na uzyskiwanie nowych wyników teorii równań różniczkowych, zarówno zwyczajnych jak i cząstkowych. Właśnie to wzajemne przenikanie się wielu działów matematyki wyższej, czyni je tak atrakcyjną dziedziną do prowadzenia badań. Pomimo szybkiego rozwoju oraz uzyskiwanych nowych wyników, teoria równań różniczkowych ciągle dostarcza nowych problemów otwartych. W poniższej pracy chciałbym zaprezentować nowe wyniki dotyczące jakościowej analizy równań różniczkowych związanych z teorią nieliniowych drgań.

Prace Henri Poincare'a z przełomu XIX i XX wieku dotyczące badań nad ruchem okresowym przyczyniły się do rozwoju teorii nieliniowych drgań. W swojej pracy [36] Poincare przedstawił strukturę rozwiązań równań różniczkowych w przestrzeni fazowej na dwuwymiarowym torusie. Miało to wpływ na dalsze badania dotyczące struktury krzywych całkowych na m-wymiarowym torusie. Równie duży wpływ na rozwój badań dotyczących nieliniowych drgań miał Aleksandr Lapunow. Jego prace związane z zachowaniem rozwiązań równań różniczkowych w otoczeniach punktów równowagi [22] stały się podstawą współczesnej teorii stabilności. Lapunow wprowadził uniwersalną metodę badania stabilności rozwiązań wykorzystującą funkcję Lapunowa, którą można wykorzystać w badaniu układów autonomicznych oraz nieautonomicznych [30].

Znaczący wpływ na rozwój teorii układów dynamicznych miały prace N. M. Krylowa oraz N. N. Bogolubowa [4, 5, 6] z lat 30-tych i 40-tych XX wieku. W pracach tych autorzy wprowadzili asymptotyczną metodę przybliżeń, zwaną metodą Krylowa-Bogolubowa, która jest stosowana do badania drgań układów nieliniowych. Wprowadzone zostało pojęcie inwariantnej, toroidalnej rozmaitości nazywanej zwykle torusem. W latach 60-tych w wyniku intensywnych badań nad nieliniowymi układami równań różniczkowych powstała teoria quasi-okresowych drgań [10]. Badania nad nimi prowadzili m.in. Yu. A. Mitropolski, N. N. Bogolubow, A. M. Samoilenko. Pokazały one, że drgania te bardzo łatwo przechodzą w drgania okresowe nawet przy nieznacznych zaburzeniach układu. Sprawiło to, że zaczęto poszukiwać nowych obiektów badań teorii drgań nieliniowych, które byłyby mniej wrażliwe na zaburzenia. Obiektem takim stał się zbiór minimalny. Obecnie najlepiej poznane są zbiory toroidalne. Praca N. N. Bogolubowa i N. M. Kryłowa [7] dotycząca analizy inwariantnych, toroidalnych rozmaitości dla układów nieliniowych, przyczyniła się do wprowadzenia przez Yu. A. Mitropolskiego metody całkowych rozmaitości w nieliniowej mechanice.

Prace w tym kierunku kontynuowali m.in.: S. Diliberto, D. Chiejł, E. A. Griebennikow, J. A. Rabiow, O. B. Łykowa oraz Yu. A. Mitropolski. Istotnym okazało się twierdzenie Kołmogorowa-Arnolda-Mosera (twierdzenie KAM) dotyczące zachowań quasi-okresowych rozwiązań układów hamiltonowskich [1, 2, 16, 17, 27]. Ważna była także praca K. O. Fridrichsa [14] dotycząca badań symetrycznych, dodatnio określonych, liniowych układów równań różniczkowych o okresowych rozwiązaniach oraz liniowych rozszerzeniach tych układów. Niezależnie od metody całkowych rozmaitości, J. Moser stosując metodę iteracyjną [28] do nieliniowych uogólnień dodatnio-symetrycznych układów otrzymał nowe wyniki o zachowaniu inwariantnego torusa przy zaburzeniach.

Przełomowymi okazały się prace A. M. Samoilenki z 1970 roku [37, 38], które zapoczątkowały nowe badania nad teorią zaburzeń i stabilności inwariantnych rozmaitości liniowego rozszerzenia układu dynamicznego na m-wymiarowym torusie. Wprowadzona została funkcja Greena-Samojlenki $G_0(\tau, \varphi)$ zadania o inwariantnym torusie liniowego rozszerzenia układu dynamicznego postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \end{cases} \tag{0.0.0.1}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in T_m$, $a(\varphi) = (a_1(\varphi), a_2(\varphi), \dots, a_m(\varphi))$ to funkcja wektorowa 2π-okresowa względem każdej zmiennej spełniająca warunek Lipschitza, $A(\varphi)$ jest macierzą kwadratową stopnia n-tego, której elementami są funkcje ciągłe, 2π-okresowe względem każdej zmiennej. Wprowadzenie funkcji Greena-Samojlenki $G_0(\tau, \varphi)$ umożliwiło zapisanie inwariantnego torusa układu (0.0.0.1) w postaci całkowej:

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau.$$

Dzięki zastosowaniu metod iteracyjnych można było wyznaczyć warunki istnienia torusa układu nieliniowego:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, x), \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi, x)x + f(\varphi), \end{cases}$$

gdzie funkcja $f(\varphi)$ odpowiada małym zaburzeniom. Szczególnie ważnymi w tych badaniach okazały się prace A. M. Samoilenki oraz V. L. Kulyka [18, 19]. Odpowiedź na pytanie dotyczące warunków istnienia funkcji Greena-Samojlenki okazała się niezwykle trudnym zadaniem. W pracy V. L. Kulyk [20] udowodnił istnienie jedynej funkcji Greena-Samojlenki dla układów, w których iloczyn macierzy $JA(\varphi)$, gdzie $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$[1],

[1] I_n jest $n \times n$-wymiarową macierzą jednostkową

jest dodatnio określony. Podana została także jej struktura oraz wykazano, że zamiana zmiennych $x = L(\varphi)y$ w układzie (0.0.0.1) może doprowadzić go do postaci blokowo-diagonalnej:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} B_1(\varphi) & 0 \\ 0 & B_2(\varphi) \end{pmatrix} y + \overline{f}(\varphi). \end{cases} \tag{0.0.0.2}$$

Prace B. F. Byłowa, R.E Winogarda [8] oraz J. S. Bogdanowa [3] pokazały, że układ (0.0.0.1) nie zawsze może zostać sprowadzony do postaci (0.0.0.2). Przyczyniło się to do poszukiwania ogólniejszych warunków istnienia funkcji Greena-Samojlenki. Jak się okazało warunkiem koniecznym i wystarczającym [18] istnienia funkcji Greena-Samojlenki układu (0.0.0.1) jest istnienie uogólnionej funkcji Lapunowa o zmiennym znaku w postaci formy kwadratowej:

$$V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x \rangle, \quad \det S(\varphi) \neq 0, \tag{0.0.0.3}$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań układu:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \end{cases} \tag{0.0.0.4}$$

jest dodatnio określona:

$$\dot{V} = \left\langle \left[\dot{S}(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) \right] x, x \right\rangle \geqslant \|x\|^2.$$

Macierz $S(\varphi)$ formy kwadratowej (0.0.0.3) jest symetryczna i niezdegenerowana. W odróżnieniu od funkcji Lapunowa spotykanej w badaniu stabilności rozwiązań w otoczeniu punktów równowagi, forma kwadratowa (0.0.0.3) może zmieniać znak. Niezwykle pomocny w badaniach własności układu (0.0.0.4) jest układ do niego sprzężony względem zmiennej normalnej:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} = -A^T(\varphi)y. \end{cases} \tag{0.0.0.5}$$

Okazuje się, że jeśli dla układu sprzężonego (0.0.0.5) istnieje forma kwadratowa:

$$W(\varphi, y) = \left\langle \overline{S}(\varphi)y, y \right\rangle,$$

której pochodna wzdłuż jego rozwiązań jest dodatnio określona:

$$\dot{W} = \left\langle \left[\dot{\overline{S}}(\varphi) - A(\varphi)\overline{S}(\varphi) - \overline{S}(\varphi)A^T(\varphi) \right] y, y \right\rangle \geqslant \|y\|^2,$$

to układ (0.0.0.4) będzie posiadać funkcję Greena-Samojlenki. W przypadku gdy macierz symetryczna $\overline{S}(\varphi)$ będzie niezdegenerowana dla dowolnego φ, to funkcja ta będzie jedyna. Natomiast gdy macierz będzie zdegenerowana dla pewnego φ_0, wówczas układ (0.0.0.4) będzie posiadać nieskończenie wiele różnych funkcji Greena-Samojlenki. Warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden fakt a mianowicie, że istnienie jedynej funkcji Greena-Samojlenki jest ściśle związane z własnością wykładniczej dychotomii układu liniowego równań różniczkowych:

$$\dot{x} = A(\varphi(t, \varphi_0))x. \tag{0.0.0.6}$$

Otrzymujemy stąd, że badania prowadzone dla układu (0.0.0.6) mogą podpowiadać jakie rezultaty uzyska się podczas badań układu (0.0.0.4) i odwrotnie. Przykładowo w pracy A. N. Kulyk, V. L. Kulyk [21] wykazane zostało, że gdy układ (0.0.0.6) jest wykładniczo-dychotomiczny tylko na półosiach $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$, to stosując zamianę zmiennych Lapunowa może on zostać uproszczony do postaci blokowo-trójkątnej. Postać ta pozwala uzyskać warunki konieczne i dostateczne do istnienia ograniczonego na całej osi $\mathbb{R}$ rozwiązania układu niejednorodnego:

$$\dot{x} = A(\varphi(t, \varphi_0))x + f(t),$$

dla każdej funkcji f ciągłej i ograniczonej na całej osi $\mathbb{R}$. Szybki rozwój teorii związanej z badaniem inwariantnych rozmaitości przyczynił się do wprowadzenia pojęcia funkcji Greena także dla układów postaci (0.0.0.6), dzięki czemu można badać istnienie ograniczonych rozwiązań.

Cele pracy

Celami pracy były opracowanie nowych metod doboru uogólnionej funkcji Lapunowa w postaci formy kwadratowej dla pewnych klas liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie, a także uzyskanie metod dołączenia słabo regularnych układów liniowych do układów regularnych.

Rozdział pierwszy dotyczy liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie. Rozpoczyna się od wprowadzenia teoretycznego, w którym przedstawione zostały najważniejsze definicje oraz wiadomości potrzebne do zrozumienia uzyskanych wyników. Wstęp teoretyczny zawiera także przykłady ułatwiające zrozumienie materiału. W drugiej części rozdziału przedstawione zostały wyniki prac, podczas których udało się wydzielić pewne klasy układów regularnych, dla których zaprezentowane zostały metody doboru uogólnionej funkcji Lapunowa w postaci formy kwadratowej. Podczas badań udało się znaleźć układy równań różniczkowych zachowujące regularność przy dowolnych zaburzeniach fazowych. Wydzielone zostały także klasy układów regularnych o zdegenerowanych macierzach współczynników.

Rozdział drugi poświęcony jest zagadnieniu dołączenia układów słabo regularnych do układów regularnych. Rozpoczyna się od wprowadzenia teoretycznego, które zawiera liczne przykłady ukazujące różne podejścia do badania regularności układów liniowych. W drugiej części rozdziału przedstawione zostały wyniki, jakie udało się uzyskać w badaniach nad dołączeniem słabo regularnych układów liniowych do układów regularnych.

W rozdziale trzecim zaprezentowane zostało w jaki sposób można zastosować teorię regularności w badaniach nad istnieniem okresowych rozwiązań pewnych klas nierówności różniczkowych.

1

Liniowe rozszerzenia układów dynamicznych na torusie

Poniższa praca dotyczy badań, które najprężniej rozwijane są przez matematyków ukraińskich. Właśnie dlatego w celu uniknięcia nieporozumień związanych z terminologią warto nadmienić, że została ona zaczerpnięta z ukraińskojęzycznej literatury. Występujące w tekście pojęcia pochodzą od takich matematyków jak m.in. Anatoly Samoilenko czy Jurij Mitropolski.

W pierwszym rozdziale chciałbym przedstawić wyniki jakie udało się uzyskać dla liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie. Rozdział rozpoczniemy od przedstawienia podstaw teoretycznych potrzebnych do zrozumienia części dotyczącej uzyskanych rezultatów.

1.1. Podstawowe pojęcia teorii liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie

Niech dany będzie układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \end{cases} \tag{1.1.0.1}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in T_m$[1], $a(\varphi)$ jest ciągłą, 2π-okresową względem każdej zmiennej funkcją wektorową[2] oraz $A(\varphi)$ to macierz kwadratowa stopnia n-tego, której elementami są funkcje ciągłe, 2π-okresowe względem każdej zmiennej[3]. W dalszej części pracy powyższe informacje dotyczące funkcji $a(\varphi)$ oraz macierzy $A(\varphi)$ zapisywać będziemy następująco $a(\varphi) \in C^0(T_m)$, $A(\varphi) \in C^0(T_m)$. Układ postaci (1.1.0.1) nazywany jest **liniowym rozszerzeniem układu dynamicznego na torusie**. O funkcji $a(\varphi)$ zakładamy dodatkowo, że spełnia warunek Lipschitza co gwarantuje, że zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \end{cases} \tag{1.1.0.2}$$

[1] T_m oznacza m-wymiarowego torusa.
[2] Funkcja postaci $a(\varphi) = (a_1(\varphi), a_2(\varphi), \ldots, a_m(\varphi))$.
[3] $A(\varphi) = [a_{ij}(\varphi)]\,, i, j = 1, 2, \ldots, n$, gdzie każda z funkcji a_{ij} jest funkcją skalarną.

posiada dokładnie jedno rozwiązanie przy każdej wartości $\varphi_0 \in T_m$, które będziemy oznaczać $\varphi = \varphi_t(\varphi_0)$. Poczynione założenia gwarantują, że rozwiązanie $\varphi = \varphi_t(\varphi_0)$ określone jest na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$. W dalszej części pracy w rozwiązaniu tym pomijać będziemy dolny indeks 0, tzn. będziemy pisać $\varphi_t(\varphi)$, aby forma zapisu była czytelniejsza. Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (1.1.0.2) zależy w sposób ciągły od wartości początkowej φ_0 a także spełnia równanie:

$$\varphi_{t+t_1}(\varphi) = \varphi_t(\varphi_{t_1}(\varphi)), \quad \forall t, t_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in T_m.$$

Warto w tym miejscu podać oznaczenia, które najczęściej pojawiają się w poniższej pracy:

- $C^0(T_m)$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych określonych na m-wymiarowym torusie,
- $C^1(T_m)$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $C^0(T_m)$ złożoną z funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły określonych na m-wymiarowym torusie,
- $C_{Lip}(T_m)$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $C^0(T_m)$ złożoną z funkcji spełniających warunek Lipschitza,
- $C^{'}(T_m, a)$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $C^0(T_m)$ złożoną z funkcji $F(\varphi)$, których superpozycja $F(\varphi_t(\varphi))$ z rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (1.1.0.2) jest funkcją różniczkowalną w sposób ciągły, jako funkcja zmiennej niezależnej t oraz:

$$\dot{F}(\varphi) \overset{df}{=} \frac{d}{dt}(F(\varphi_t(\varphi)))|_{t=0}, \quad \dot{F}(\varphi) \in C^0(T_m),$$

- $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ oznacza iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$,
- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ oznacza normę wektora w $\mathbb{R}^n$,
- $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ oznacza normę operatorową macierzy kwadratowej A,
- $\|A\|_0 = \max\limits_{\varphi \in T_m} \|A(\varphi)\|$,
- $\Omega^t_\tau(\varphi)$ oznacza macierz fundamentalną układu liniowego:

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x, \tag{1.1.0.3}$$

  taką, że $\Omega^t_\tau(\varphi)|_{t=\tau} = I_n$ gdzie I_n jest n-wymiarową macierzą jednostkową.

Istotne jest przypomnienie najważniejszych, z naszego punktu widzenia, własności macierzy fundamentalnej $\Omega^t_\tau(\varphi)$ układu (1.1.0.3). Macierz $\Omega^t_\tau(\varphi)$ jest 2π-okresowa ze względu na każdą zmienną φ_j, $j = 1, 2, \ldots m$ a także spełnia następujące tożsamości:

$$\Omega_\tau^t(\varphi_z(\varphi)) \equiv \Omega_{\tau+z}^{t+z}(\varphi),$$
$$\Omega_z^t(\varphi) \cdot \Omega_\tau^z(\varphi) \equiv \Omega_\tau^t(\varphi).$$

Razem z układem (1.1.0.1) rozpatrywany będzie niejednorodny układ równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \end{cases} \tag{1.1.0.4}$$

gdzie $f(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Definicja 1.1.1. *Będziemy mówić, że układ (1.1.0.4) posiada inwariantnego torusa wyznaczonego równością:*

$$x = u(\varphi), \tag{1.1.0.5}$$

jeżeli funkcja $u(\varphi) \in C^{'}(T_m, a)$ oraz spełniona jest tożsamość:

$$\dot{u}(\varphi) \equiv A(\varphi) \cdot u(\varphi) + f(\varphi), \tag{1.1.0.6}$$

dla każdego $\varphi \in T_m$.

Zakładając, że $u(\varphi) \in C^1(T_m)$ mamy:

$$\dot{u}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_j} \cdot a_j(\varphi),$$

co oznacza, że inwariantny torus (1.1.0.5) jest 2π-okresowym rozwiązaniem układu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_j} \cdot a_j(\varphi) = A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi).$$

Przykład 1.1.1. *Rozpatrzmy układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \cos 2\varphi, \\ \frac{dx}{dt} = -2\,(\sin 2\varphi)\,x. \end{cases} \tag{1.1.0.7}$$

Układ (1.1.0.7) posiada nieskończenie wiele inwariantnych torusów, które możemy zapisać w postaci:

$$x = u(\varphi) = \lambda \cos 2\varphi, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Rzeczywiście, obliczając pochodną mamy:

$$\dot{u}(\varphi) = -2\lambda \sin 2\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -2 \sin 2\varphi \cdot \lambda \cos 2\varphi = A(\varphi)u(\varphi).$$

Widzimy, że warunek (1.1.0.6) spełniony jest dla każdej wartości $\varphi \in T_1$.

Definicja 1.1.2. *Jeżeli istnieje $n \times n$-wymiarowa macierz $C(\varphi) \in C^0(T_m)$ taka, że dla funkcji $G_0(\tau, \varphi)$ postaci:*

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leqslant 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)\left[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n\right], & \tau > 0, \end{cases} \tag{1.1.0.8}$$

spełnione jest oszacowanie:

$$\|G_0(\tau,\varphi)\| \leqslant Ke^{-\gamma|\tau|}, \tag{1.1.0.9}$$

gdzie K, γ są dodatnimi stałymi, wówczas funkcję (1.1.0.8) nazywamy funkcją Greena-Samojlenki układu (1.1.0.1).

Istnienie funkcji Greena-Samojlenki (1.1.0.8) sprawia, że układ niejednorodny (1.1.0.4) posiada inwariantnego torusa dla każdej ustalonej funkcji $f(\varphi) \in C^0(T_m)$. Inwariantny torus możemy zapisać w postaci całkowej:

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau. \tag{1.1.0.10}$$

W celu sprawdzenia, że tak faktycznie jest zapiszmy złożenie:

$$u(\varphi_t(\varphi)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi_t(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi)))d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau + t, \varphi) f(\varphi_{\tau+t}(\varphi))d\tau = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau,$$

gdzie:

$$G_t(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leqslant t, \\ \Omega_\tau^t(\varphi)\left[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n\right], & \tau > t. \end{cases} \tag{1.1.0.11}$$

Zapisując $x = u(\varphi_t(\varphi))$ w postaci:

$$u(\varphi_t(\varphi)) = \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^t(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \int\limits_{t}^{\infty} \Omega_\tau^t(\varphi)\left[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n\right] f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau,$$

możemy stwierdzić, że funkcja $x = u(\varphi_t(\varphi))$ jest rozwiązaniem układu równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)).$$

Równości te pokazują, że (1.1.0.10) jest inwariantnym torusem układu (1.1.0.4).

Uwaga 1.1.1. *Funkcję (1.1.0.11) nazywamy funkcją Greena zadania o ograniczonych rozwiązaniach układu $\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x$ dla każdej ustalonej wartości $\varphi \in T_m$.*

Istnienie funkcji Greena-Samojlenki (1.1.0.8) dla układu (1.1.0.1) pozwala stwierdzić, że układ niejednorodny:

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x + f(t), \tag{1.1.0.12}$$

przy dowolnej, ustalonej funkcji $f(t)$ ciągłej i ograniczonej na osi $\mathbb{R}$ posiada ograniczone na całej osi $\mathbb{R}$ rozwiązanie:

$$x = x_t(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, \varphi) f(\tau) d\tau.$$

Z zależności wiążącej istnienie funkcji Greena-Samojlenki układu (1.1.0.1) oraz istnienie ograniczonego na całej osi $\mathbb{R}$ rozwiązania układu (1.1.0.12) wynika wniosek.

Wniosek 1.1.1. *Jeżeli układ (1.1.0.12) przy pewnej ustalonej funkcji $f(t)$ ciągłej i ograniczonej na całej osi $\mathbb{R}$ nie posiada ograniczonego rozwiązania dla pewnej wartości $\varphi_0 \in T_m$, to układ (1.1.0.1) nie posiada funkcji Greena-Samojlenki (1.1.0.8).*

Z wniosku 1.1.1 wynika następujący fakt.

Fakt 1.1.1. *Jeżeli istnieje wartość $\varphi_0 \in T_m$ dla której $a(\varphi_0) = 0$ oraz $A(\varphi_0) = 0$, wówczas układ (1.1.0.1) nie będzie posiadać żadnej funkcji Greena-Samojlenki.*

Przykład 1.1.2. *Przeanalizujmy układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \cos 2021\varphi, \\ \frac{dx}{dt} = (\sin 2022\varphi)x. \end{cases} \tag{1.1.0.13}$$

Zauważmy, że dla $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ prawe strony powyższego układu przyjmują wartości zerowe, co oznacza, że układ (1.1.0.13) nie posiada żadnej funkcji Greena-Samojlenki.

Przykład 1.1.3. *Rozpatrzmy układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = f_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \cos \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = f_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \sin \varphi_2, \\ \frac{d\varphi_3}{dt} = f_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \cos \varphi_3 + \sin^2 \varphi_2 \cos 2\varphi_1, \\ \frac{dx_1}{dt} = (\lambda \sin 2\varphi_2 + f_4(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \cos 3\varphi_1)\, x_1 + (f_5(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \sin 4\varphi_3 \cos \varphi_1) x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = (f_6(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \cos 7\varphi_2 \sin \varphi_2)\, x_1 + (f_7(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \sin \varphi_3 \cos 5\varphi_1) x_2, \end{cases} \tag{1.1.0.14}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, funkcje $f_j(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C_{Lip}(T_3)$, dla $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ oraz $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Przyjmując $\varphi_0 = (\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2})$ widzimy, że prawe strony powyższego układu zerują się, co oznacza, że układ (1.1.0.14) nie posiada żadnej funkcji Greena-Samojlenki.

Przy wyznaczaniu funkcji Greena-Samojlenki pomocna okazuje się uwaga.

Uwaga 1.1.2. *Rozpatrzmy funkcję postaci:*

$$G_t(0,\tau) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi)C(\varphi), & t \geqslant 0, \\ \Omega_0^t(\varphi)\left[C(\varphi) - I_n\right], & t < 0, \end{cases} \tag{1.1.0.15}$$

dla której spełnione jest oszacowanie:

$$\|G_t(0,\tau)\| \leqslant Ke^{-\gamma|t|}, \tag{1.1.0.16}$$

gdzie K, γ to stałe dodatnie. Spełnienie oszacowania (1.1.0.9) dla funkcji Greena-Samojlenki (1.1.0.8) jest równoważne spełnieniu oszacowania (1.1.0.16) dla funkcji pomocniczej (1.1.0.15).

Zauważmy, że w funkcji pomocniczej (1.1.0.15) nie występuje superpozycja macierzy $C(\varphi)$ z rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (1.1.0.2), tzn. $C(\varphi_t(\varphi))$, co jest dużym udogodnieniem podczas wyznaczania postaci funkcji Greena-Samojlenki.

Przykład 1.1.4. *Niech dany jest układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \sin 2\varphi, \\ \frac{dx}{dt} = (2\cos 2\varphi)x. \end{cases} \tag{1.1.0.17}$$

Spróbujmy wyznaczyć dla niego funkcję Greena-Samojlenki. Rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \sin 2\varphi, \\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \end{cases}$$

oznaczymy przez $\varphi_t(\varphi_0)$. Oczywiście dla $\varphi_0 = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, otrzymujemy rozwiązania stacjonarne:

$$\varphi_t(\varphi) \equiv \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Niech teraz $\varphi_0 \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, wówczas:

$$\frac{d\varphi}{\sin 2\varphi} = dt \to \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = 2dt \to \ln|\operatorname{tg}\varphi| = 2t + C \to \operatorname{tg}\varphi_t(\varphi_0) = \operatorname{tg}\varphi_0 \cdot e^{2t},$$

skąd dostajemy:

$$\begin{gathered} \varphi_t(\varphi_0) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_0 \cdot e^{2t}) \quad \mathit{dla} \quad \varphi_0 \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right), \\ \varphi_t(\varphi_0) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_0 \cdot e^{2t}) + \pi \quad \mathit{dla} \quad \varphi_0 \in \left(\tfrac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \tfrac{3\pi}{2}\right), \\ \varphi_t(\varphi_0) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi_0 \cdot e^{2t}) + 2\pi \quad \mathit{dla} \quad \varphi_0 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \cup \left(2\pi, \tfrac{5\pi}{2}\right), \\ \mathit{itd.} \end{gathered}$$

Najwygodniej jednak zapisać rozwiązanie w postaci uwikłanej:

$$\operatorname{tg} \varphi_t(\varphi_0) = \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot e^{2t}, \quad \varphi_0 \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Dokonajmy teraz przekształcenia wyrażenia $\cos 2\varphi_t(\varphi_0)$ *gdy* $\varphi_0 \neq \frac{\pi k}{2}$ *dla* $k \in \mathbb{Z}$*:*

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi_t(\varphi_0) = \cos^2 \varphi_t(\varphi_0) - \sin^2 \varphi_t(\varphi_0) = \tfrac{\cos^2 \varphi_t(\varphi_0) - \sin^2 \varphi_t(\varphi_0)}{\cos^2 \varphi_t(\varphi_0) + \sin^2 \varphi_t(\varphi_0)} = \tfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_t(\varphi_0)}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_t(\varphi_0)} = \\ = \tfrac{1 - e^{4t} \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{1 + e^{4t} \operatorname{tg}^2 \varphi_0} = \tfrac{\cos^2 \varphi_0 - e^{4t} \sin^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0 + e^{4t} \sin^2 \varphi_0} = \tfrac{e^{-2t} \cos^2 \varphi_0 - e^{2t} \sin^2 \varphi_0}{e^{-2t} \cos^2 \varphi_0 + e^{2t} \sin^2 \varphi_0},\end{aligned}$$

oraz gdy $\varphi_0 = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$*:*

$$\cos 2\varphi_t \left(\frac{\pi k}{2} \right) = \begin{cases} 1, & k \quad \textit{parzyste}, \\ -1, & k \quad \textit{nieparzyste}. \end{cases}$$

Równanie różniczkowe:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos 2\varphi_t(\varphi_0) \cdot x,$$

dzięki powyższym przekształceniom może zostać zapisane w postaci:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{e^{-2t} \cos^2 \varphi_0 - e^{2t} \sin^2 \varphi_0}{e^{-2t} \cos^2 \varphi_0 + e^{2t} \sin^2 \varphi_0} \cdot x.$$

Wyznaczmy teraz funkcję $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$*:*

$$\begin{aligned}\Omega_\tau^t(\varphi_0) = e^{2 \int\limits_\tau^t \frac{e^{-2z} \cos^2 \varphi_0 - e^{2z} \sin^2 \varphi_0}{e^{-2z} \cos^2 \varphi_0 + e^{2z} \sin^2 \varphi_0} dz} = e^{-\ln (e^{-2z} \cos^2 \varphi_0 + e^{2z} \sin^2 \varphi_0) \big|_\tau^t} = \\ e^{\ln \frac{e^{-2\tau} \cos^2 \varphi_0 + e^{2\tau} \sin^2 \varphi_0}{e^{-2r} \cos^2 \varphi_0 + e^{2t} \sin^2 \varphi_0}} = \tfrac{e^{-2\tau} \cos^2 \varphi_0 + e^{2\tau} \sin^2 \varphi_0}{e^{-2t} \cos^2 \varphi_0 + e^{2t} \sin^2 \varphi_0} = e^{2(t-\tau)} \tfrac{\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 e^{4\tau}}{\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 e^{4t}}.\end{aligned}$$

W celu wyznaczenia $C(\varphi)$ *skorzystamy z funkcji pomocniczej (1.1.0.15) gdzie w warunku (1.1.0.16) przyjmiemy* $\gamma = 2$*:*

$$\begin{cases} \frac{e^{2t}}{\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 e^{4t}} |C(\varphi_0)| \leqslant K e^{-2t}, & t \geqslant 0, \\ \frac{e^{2t}}{\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 e^{4t}} |C(\varphi_0) - 1| \leqslant K e^{2t}, & t < 0. \end{cases}$$

i po przekształceniach uzyskujemy:

$$\begin{cases} |C(\varphi_0)| \leqslant K e^{-2t} \frac{\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 e^{4t}}{e^{2t}} = K \left(e^{-4t} \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \right), & t \geqslant 0, \\ |C(\varphi_0) - 1| \leqslant K e^{2t} \frac{\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 e^{4t}}{e^{2t}} = K \left(\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 e^{4t} \right), & t < 0. \end{cases} \tag{1.1.0.18}$$

Przechodząc w pierwszej nierówności (1.1.0.18) z t *do* $+\infty$ *a w drugiej nierówności (1.1.0.18) z* t *do* $-\infty$ *otrzymujemy:*

$$\begin{cases} |C(\varphi_0)| \leqslant K\left(\sin^2\varphi_0\right), \\ |C(\varphi_0)-1| \leqslant K\left(\cos^2\varphi_0\right). \end{cases}$$

Wynika stąd, że za $C(\varphi)$ *możemy przyjąć* $\sin^2\varphi$*. Funkcja Greena-Samojlenki układu (1.1.0.17) ma wówczas postać:*

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} e^{-2\tau}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi e^{4\tau}\right)\sin^2(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leqslant 0, \\ e^{-2\tau}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi e^{4\tau}\right)\left[\sin^2(\varphi_\tau(\varphi)) - 1\right], & \tau > 0, \end{cases}$$

co po uwzględnieniu:

$$\sin^2(\varphi_\tau(\varphi)) = \frac{e^{4\tau}\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + sin^2\varphi e^{4\tau}}, \quad \sin^2(\varphi_\tau(\varphi)) - 1 = -\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + sin^2\varphi e^{4\tau}},$$

daje ostatecznie:

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} e^{2\tau}\sin^2\varphi, & \tau \leqslant 0, \\ -e^{-2\tau}\cos^2\varphi, & \tau > 0. \end{cases}$$

Przykład 1.1.5. *Rozpatrzmy układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 1, \\ \frac{dx}{dt} = (\lambda_0 + \lambda_1\cos\varphi)\,x, \end{cases} \tag{1.1.0.19}$$

gdzie $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$*. Okazuje się, że w przypadku gdy* $\lambda_0 \neq 0$*, układ (1.1.0.19) posiada jedyną funkcję Greena-Samojlenki w postaci:*

- *dla* $\lambda_0 > 0$*,*

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} 0, & \tau \leqslant 0, \\ -e^{-\lambda_0\tau - \lambda_1\sin(\tau+\varphi) + \lambda_1\sin\varphi}, & \tau > 0, \end{cases}$$

  gdzie $C(\varphi) \equiv 0$*,*

- *dla* $\lambda_0 < 0$*,*

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} e^{-\lambda_0\tau - \lambda_1\sin(\tau+\varphi) + \lambda_1\sin\varphi}, & \tau \leqslant 0, \\ 0, & \tau > 0, \end{cases}$$

  gdzie $C(\varphi) \equiv 1$*.*

Natomiast gdy $\lambda_0 = 0$*, układ nie posiada żadnej funkcji Greena-Samojlenki. Przekonamy się o tym rozważając równanie różniczkowe:*

$$\frac{dx}{dt} = (\lambda_1\cos(t+\varphi))x + 1, \tag{1.1.0.20}$$

którego rozwiązanie ogólne ma postać:

$$x(t) = Ce^{\lambda_1 \sin(t+\varphi)} + \int_0^t e^{-\lambda_1(\sin(\tau+\varphi)-\sin(t+\varphi))} d\tau.$$

Zauważmy, że równanie (1.1.0.20) nie posiada ograniczonego rozwiązania a zatem układ wyjściowy nie posiada funkcji Greena-Samojlenki.

Badania dotyczące warunków istnienia funkcji Greena-Samojlenki dla układu (1.1.0.1) przyczyniły się do wprowadzenia następującej terminologii.

Definicja 1.1.3. *Układ (1.1.0.1) nazywamy regularnym, jeżeli istnieje dla niego dokładnie jedna funkcja Greena-Samojlenki spełniająca warunek (1.1.0.9).*
Układ (1.1.0.1) nazywamy słabo regularnym, jeżeli istnieje dla niego co najmniej jedna funkcja Greena-Samojlenki spełniająca warunek (1.1.0.9).
Układ (1.1.0.1) nazywamy ostro-słabo regularnym, jeżeli istnieje dla niego nieskończenie wiele funkcji Greena-Samojlenki spełniających warunek (1.1.0.9).

Dla układu (1.1.0.1) zachodzą zatem trzy możliwości. Nie posiada on żadnej funkcji Greena-Samojlenki, posiada dokładnie jedną funkcję Greena-Samojlenki, albo posiada ich nieskończenie wiele. Istnienie nieskończenie wielu funkcji Greena-Samojlenki wynika z tego, że jeżeli poza funkcją (1.1.0.8) układ (1.1.0.1) posiada inną funkcję Greena-Samojlenki:

$$\tilde{G}_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\tilde{C}(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leqslant 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)\left[\tilde{C}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n\right], & \tau > 0, \end{cases}$$

dla której spełnione jest oszacowanie (1.1.0.9), wówczas różnica tych funkcji:

$$G_0(\tau,\varphi) - \tilde{G}_0(\tau,\varphi) = \Omega_\tau^0(\varphi)\left[C(\varphi_\tau(\varphi)) - \tilde{C}(\varphi_\tau(\varphi))\right] = D(\tau,\varphi),$$

także będzie spełniała oszacowanie (1.1.0.9) tylko z innymi stałymi K, γ. Okazuje się, że funkcja postaci $G_0(\tau,\varphi) + \lambda D(\tau,\varphi)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, także będzie funkcją Greena-Samojlenki układu (1.1.0.1).

Uwaga 1.1.3. *Jeżeli układ (1.1.0.1) jest regularny, wówczas macierz $C(\varphi)$ spełnia tożsamości:*

$$C^2(\varphi) \equiv C(\varphi), \quad C(\varphi_t(\varphi)) \equiv \Omega_0^t(\varphi)C(\varphi)\Omega_t^0(\varphi). \tag{1.1.0.21}$$

W przypadku gdy układ (1.1.0.1) jest ostro-słabo regularny, wtedy żadna z tożsamości (1.1.0.21) nie jest spełniona.

Razem z układem (1.1.0.1) rozpatrywany jest także układ do niego sprzężony względem zmiennej normalnej:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} = -A^T(\varphi)y. \end{cases} \tag{1.1.0.22}$$

Zachodzą następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1.1.1. *([23]). Niech układ (1.1.0.1) posiada dokładnie jedną funkcję Greena-Samojlenki (1.1.0.8), wówczas istnieją macierze $S(\varphi) \in C^{'}(T_m, a)$ spełniające nierówność:*

$$\left\langle \left[\dot{S}(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi) \right] x, x \right\rangle \geqslant \|x\|^2,$$

przy czym macierze te są nieosobliwe, tzn.:

$$\det S(\varphi) \neq 0, \quad \forall \varphi \in T_m.$$

Pewne macierze $S(\varphi)$ można zapisać w postaci:

$$S(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} [\Omega_0^t(\varphi)(C(\varphi) - I_n)]^T \cdot H(\varphi_t(\varphi)) \cdot [\Omega_0^t(\varphi)(C(\varphi) - I_n)]dt+ \\ - \int\limits_{0}^{\infty} [\Omega_0^t(\varphi)C(\varphi)]^T \cdot H(\varphi_t(\varphi)) \cdot [\Omega_0^t(\varphi)C(\varphi)]dt,$$

gdzie:

$$H(\varphi) \equiv H^T(\varphi) \in C^0(T_m), \quad \langle H(\varphi)x, x\rangle \geqslant 2\|x\|^2.$$

Twierdzenie 1.1.2. *([23]). Niech układ (1.1.0.1) posiada funkcję Greena-Samojlenki (1.1.0.8) spełniającą warunek (1.1.0.9), wówczas istnieje $n \times n$-wymiarowa macierz symetryczna $\overline{S}(\varphi) \in C^{'}(T_m, a)$ dla której zachodzi nierówność:*

$$\left\langle \left[\dot{\overline{S}}(\varphi) - \overline{S}(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)\overline{S}(\varphi) \right] y, y \right\rangle \leqslant -\|y\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1.0.23}$$

przy czym, jeżeli funkcja Greena-Samojlenki jest jedyna, to dla każdej takiej macierzy $\overline{S}(\varphi)$ mamy:

$$\det \overline{S}(\varphi) \neq 0, \quad \forall \varphi \in T_m. \tag{1.1.0.24}$$

Warto zauważyć, że lewa strona nierówności (1.1.0.23) jest pochodną formy kwadratowej:

$$V(\varphi, y) = \left\langle \overline{S}(\varphi)y, y \right\rangle, \tag{1.1.0.25}$$

wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego (1.1.0.22).

Twierdzenie 1.1.3. *([23]). Niech istnieją macierze $S(\varphi), \overline{S}(\varphi) \in C^{'}(T_m, a)$ spełniające* *warunki:*

$$\left\langle\left[\dot{S}(\varphi)+S(\varphi)A(\varphi)+A^T(\varphi)S(\varphi)\right]x,x\right\rangle \geqslant \|x\|^2,$$
$$\left\langle\left[\dot{\overline{S}}(\varphi)-\overline{S}(\varphi)A^T(\varphi)-A(\varphi)\overline{S}(\varphi)\right]y,y\right\rangle \geqslant \|y\|^2,$$

wówczas:

$$\det S(\varphi)\neq 0,\quad \det\overline{S}(\varphi)\neq 0,\quad \forall\varphi\in T_m.$$

Wynika z tego, że układy (1.1.0.1) oraz (1.1.0.22) są regularne.

Twierdzenie 1.1.4. *([23]). Niech istnieje $n\times n$-wymiarowa macierz symetryczna $\overline{S}(\varphi)\in C^{'}(T_m,a)$ dla której zachodzi nierówność (1.1.0.23), wówczas istnieje funkcja Greena-Samojlenki (1.1.0.8) spełniająca oszacowanie (1.1.0.9). Jeżeli dodatkowo spełniony jest warunek (1.1.0.24), to funkcja Greena-Samojlenki będzie jedyna.*

Rozpatrując przypadek, gdy $\det S(\varphi)\neq 0$ dla dowolnego $\varphi\in T_m$, poprzez zamianę zmiennych $y=S^{-1}(\varphi)$ oraz tożsamość $\dot{S}^{-1}(\varphi)\equiv -S^{-1}(\varphi)\dot{S}(\varphi)S^{-1}(\varphi)$ można zapisać następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.1.5. *([23]). Jeżeli istnieje forma kwadratowa:*

$$V(\varphi,x)=\langle S(\varphi)x,x\rangle\,, \tag{1.1.0.26}$$

gdzie $S(\varphi)\in C^{'}(T_m,a)$ jest nieosobliwą macierzą symetryczną, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu równań (1.1.0.1) jest dodatnio określona, tzn. spełnia nierówność:

$$\dot{V}=\left\langle\left[\dot{S}(\varphi)+S(\varphi)A(\varphi)+A^T(\varphi)S(\varphi)\right]x,x\right\rangle \geqslant \|x\|^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

wówczas układ (1.1.0.1) będzie regularny.

Uwaga 1.1.4. *W praktyce forma kwadratowa (1.1.0.25) jest dobierana w taki sposób, aby jej pochodna wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego (1.1.0.22) była dodatnio określona:*

$$\left\langle\left[\dot{\overline{S}}(\varphi)-\overline{S}(\varphi)A^T(\varphi)-A(\varphi)\overline{S}(\varphi)\right]y,y\right\rangle \geqslant \|y\|^2,\quad \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

Uwaga 1.1.5. *W przypadku, gdy macierz $\overline{S}(\varphi)$ w formie kwadratowej (1.1.0.25) jest nieosobliwa, wówczas układy (1.1.0.1) oraz (1.1.0.22) są regularne. Jeżeli $\det\overline{S}(\varphi_0)=0$ dla pewnego $\varphi_0\in T_m$, to układ (1.1.0.1) jest ostro-słabo regularny a układ sprzężony (1.1.0.22) nie posiada żadnej funkcji Greena-Samojlenki.*

Uwaga 1.1.6. *Pomiędzy macierzami $S(\varphi)$ a $\overline{S}(\varphi)$ w formach kwadratowych (1.1.0.26) oraz (1.1.0.25) zachodzi następująca relacja:*

$$S(\varphi)=-\overline{S}^{-1}(\varphi).$$

Uwaga 1.1.7. *Formy kwadratowe o których mowa w powyższych twierdzeniach przyjęto nazywać uogólnionymi funkcjami Lapunowa. W dalszej części pracy często zamiennie będziemy używać nazw funkcja Lapunowa w postaci formy kwadratowej lub funkcja Lapunowa.*

Przykład 1.1.6. *Wróćmy raz jeszcze do układu (1.1.0.17):*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \sin 2\varphi, \\ \frac{dx}{dt} = (2\cos 2\varphi)x. \end{cases}$$

Pokażemy, że układ ten jest ostro-słabo regularny. Zapiszmy układ do niego sprzężony:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \sin 2\varphi, \\ \frac{dy}{dt} = -(2\cos 2\varphi)y. \end{cases} \tag{1.1.0.27}$$

Niech funkcja Lapunowa (w tym wypadku funkcja skalarna) ma postać:

$$V(\varphi, y) = -(2\cos 2\varphi)y^2.$$

Obliczając jej pochodną wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego dostajemy:

$$\begin{aligned} \dot{V} = \tfrac{d}{dt}(-(2\cos 2\varphi))y^2 + (-(2\cos 2\varphi))2y\tfrac{dy}{dt} = (4\sin 2\varphi \sin 2\varphi)y^2 + \\ +2y(-2\cos 2\varphi)(-2\cos 2\varphi)y = \left(4\sin^2\varphi + 8\cos^2\varphi\right)y^2 \geqslant y^2. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że układ (1.1.0.17) posiada nieskończenie wiele funkcji Greena-Samojlenki. Dodatkową informacją jest to, że układ sprzężony (1.1.0.27) nie posiada żadnej funkcji Greena-Samojlenki.

Przykład 1.1.7. *Rozpatrzmy układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx_1}{dt} = (-3 + \cos\varphi)x_1 + [\ln(1 + \operatorname{arctg}^2(1 + \sin^2\varphi))]x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = [\ln(1 + \operatorname{arctg}^2(1 + \sin^2\varphi))]x_1 + (5 + 4\sin\varphi)x_2, \end{cases} \tag{1.1.0.28}$$

gdzie $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_1)$. Wybierzmy funkcję Lapunowa w postaci formy kwadratowej:

$$V(\varphi, x) = -x_1^2 + x_2^2, \tag{1.1.0.29}$$

oraz obliczmy jej pochodną wzdłuż rozwiązań układu (1.1.0.28):

$$\dot{V} = -2x_1\dot{x_1} + 2x_2\dot{x_2} = (6 + \cos\varphi)x_1^2 + (10 + 8\sin\varphi)x_2^2 \geqslant 2(x_1^2 + x_2^2) = 2\|x\|^2.$$

Pochodna formy kwadratowej (1.1.0.29) o nieosobliwej, symetrycznej macierzy:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jest dodatnio określona, co oznacza, że układ (1.1.0.28) jest regularny.

Związek pomiędzy funkcjami Greena-Samojlenki układu (1.1.0.1) oraz układu do niego sprzężonego (1.1.0.22) opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1.6. *([21]). Niech układ (1.1.0.1) ma jedyną funkcję Greena-Samojlenki (1.1.0.8). Wtedy układ do niego sprzężony także ma jedyną funkcję Greena-Samojlenki $\overline{G}_0(\tau,\varphi)$, która jest związana z funkcją (1.1.0.8) równością:*

$$\overline{G}_0(\tau,\varphi) \equiv -G_\tau^T(0,\varphi),$$

gdzie:

$$G_\tau(0,\varphi) = \begin{cases} \Omega_0^\tau(\varphi)C(\varphi), & \tau > 0, \\ \Omega_0^\tau(\varphi)\left[C(\varphi) - I_n\right], & \tau \leqslant 0. \end{cases}$$

Badanie regularności okazuje się szczególnie proste w przypadku układów, w których macierz współczynników jest macierzą stałą, tzn. $A(\varphi) \equiv A$. Ma miejsce następujący fakt.

Fakt 1.1.2. *W przypadku gdy macierz $A(\varphi)$ w układzie (1.1.0.1) jest macierzą stałą, warunkiem koniecznym i wystarczającym regularności układu (1.1.0.1) jest, aby wszystkie wartości własne macierzy A miały niezerowe części rzeczywiste. Wówczas funkcja Greena-Samojlenki (1.1.0.8) ma postać:*

$$G_0(\tau) = \begin{cases} Ce^{-A\tau}, & \tau \leqslant 0 \\ (C - I_n)e^{-A\tau}, & \tau > 0, \end{cases}$$

gdzie C jest macierzą rzutowania, tzn. $C^2 = C$.

Przykład 1.1.8. *Niech dany jest układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 12x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2, \end{cases} \tag{1.1.0.30}$$

gdzie $a(\varphi) \in C^0(T_1)$. Macierz współczynników powyższego układu to:

$$A(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że wartości własne macierzy A wynoszą $\lambda_1 = -5$ oraz $\lambda_2 = 7$. Widać, że ich części rzeczywiste są różne od zera, zatem układ (1.1.0.30) na mocy faktu 1.1.2 jest regularny. Wyznaczmy teraz funkcję Greena-Samojlenki danego układu. Zapisując macierz podstawową e^{At} otrzymujemy:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{7t} & -e^{5t} + e^{7t} \\ -\frac{1}{4}e^{-5t} + \frac{1}{4}e^{7t} & \frac{1}{2}e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{7t} \end{pmatrix}.$$

Możemy zatem podać postać jedynej funkcji Greena-Samojlenki układu (1.1.0.30):

$$G_0(\tau) = \begin{cases} e^{5\tau} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \tau \leqslant 0, \\ e^{-7\tau} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \tau > 0. \end{cases}$$

W wielu przypadkach badanie regularności może zostać znacznie ułatwione poprzez wprowadzenie nowych zmiennych. Może się wówczas zdarzyć, że badany układ zostanie sprowadzony do postaci dla której np. wiemy jaką formę kwadratową dobrać. W najprostszym przypadku zamiana zmiennej może sprowadzić badany układ do układu o stałych współczynnikach. Rozpatrzmy następującą zamianę zmiennych w układzie (1.1.0.1):

$$x = L(\varphi)y, \tag{1.1.0.31}$$

gdzie $L(\varphi)$ to kwadratowa macierz stopnia n-tego, której elementami są funkcje ciągłe i 2π-okresowe na T_m oraz której złożenie $L(\varphi_t(\varphi))$ jest różniczkowalne w sposób ciągły względem zmiennej t. Dodatkowo zakładamy, że:

$$\det L(\varphi) \neq 0, \quad \forall \varphi \in T_m.$$

Różniczkując stronami (1.1.0.31) dostajemy:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= \dot{L}(\varphi) \cdot y + L(\varphi) \cdot \tfrac{dy}{dt} = A(\varphi)x, \\ L(\varphi) \cdot \tfrac{dy}{dt} &= A(\varphi) \cdot L(\varphi) \cdot y - \dot{L}(\varphi) \cdot y, \\ \tfrac{dy}{dt} &= L^{-1}(\varphi) \cdot \left[A(\varphi)L(\varphi) - \dot{L}(\varphi)\right] y. \end{aligned}$$

W ten sposób po zamianie zmiennych układ równań (1.1.0.1) przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} = B(\varphi)y, \end{cases} \tag{1.1.0.32}$$

gdzie $B(\varphi) = L^{-1}(\varphi) \cdot \Big[A(\varphi)L(\varphi) - \dot{L}(\varphi)\Big]$. Macierz $L(\varphi)$ nazywana jest często macierzą Lapunowa.

Twierdzenie 1.1.7. *([21]). Jeżeli układ (1.1.0.1) ma jedyną funkcję Greena-Samojlenki $G_0(\tau, \varphi)$, to także układ (1.1.0.32) posiada jedyną funkcję Greena-Samojlenki $\overline{G}_0(\tau, \varphi)$ oraz funkcje te związane są tożsamością:*

$$G_0(\tau, \varphi) \equiv L(\varphi) \cdot \overline{G}_0(\tau, \varphi) \cdot L^{-1}(\varphi_\tau(\varphi)).$$

Jeżeli układ (1.1.0.1) ma nieskończenie wiele różnych funkcji Greena-Samojlenki $G_0(\tau, \varphi)$, to także układ (1.1.0.32) posiada nieskończenie wiele różnych funkcji Greena-Samojlenki $\overline{G}_0(\tau, \varphi)$.

Przykład 1.1.9. *Zbadajmy regularność układu równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 2, \\ \frac{dx_1}{dt} = \cos\varphi \cdot x_1 + (\sin\varphi - 1) \cdot x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = (\sin\varphi + 1) \cdot x_1 - \cos\varphi \cdot x_2, \end{cases} \tag{1.1.0.33}$$

którego macierz współczynników ma postać:

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi - 1 \\ \sin\varphi + 1 & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy $A(\varphi)$ jest tożsamościowo równy zeru:

$$-\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 1 \equiv 0.$$

Dokonując zamiany zmiennych:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

otrzymamy układ o stałych współczynnikach:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 2, \\ \frac{y_1}{dt} = y_1, \\ \frac{y_2}{dt} = -y_2. \end{cases} \tag{1.1.0.34}$$

Wartości własne macierzy układu (1.1.0.34) są równe 1 *oraz* -1. *Oznacza to, że układ* (1.1.0.34) *jest regularny a co za tym idzie regularny jest także układ* (1.1.0.33).

Funkcję Greena-Samojlenki układu (1.1.0.34) zapisujemy następująco:

$$\overline{G}_0(\tau) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\tau} \end{pmatrix}, & \tau \leqslant 0, \\ -\begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau > 0. \end{cases}$$

Na podstawie tożsamości:

$$G_0(\tau, \varphi) \equiv L(\varphi) \cdot \overline{G}_0(\tau, \varphi) \cdot L^{-1}(\varphi_\tau(\varphi)),$$

zapisujemy funkcję Greena-Samojlenki układu (1.1.0.33):

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\tau + \frac{\varphi}{2}) & \sin(\tau + \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\tau + \frac{\varphi}{2}) & -\cos(\tau + \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}, & \tau \leqslant 0, \\ \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\tau + \frac{\varphi}{2}) & \sin(\tau + \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\tau + \frac{\varphi}{2}) & -\cos(\tau + \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}, & \tau > 0. \end{cases}$$

Okazuje się, że istnieją przykłady układów niejednorodnych (1.1.0.4) posiadających inwariantnego torusa pomimo tego, że odpowiadające im układy jednorodne (1.1.0.1) nie posiadają funkcji Greena-Samojlenki.

Przykład 1.1.10. *Rozpatrzmy układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 0, \\ \frac{dx_1}{dt} = \omega_1^2 x_3 + f_1(\varphi), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 + f_2(\varphi), \\ \frac{dx_3}{dt} = -\omega_2^2 x_1 + f_3(\varphi), \end{cases} \tag{1.1.0.35}$$

gdzie ω_1, ω_2 są niezerowymi liczbami rzeczywistymi oraz $f_1(\varphi), f_2(\varphi), f_3(\varphi) \in C^0(T_m)$. Układ (1.1.0.35) posiada inwariantnego torusa dla dowolnych funkcji $f_1(\varphi), f_2(\varphi), f_3(\varphi)$, którego możemy zapisać w postaci:

$$u(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{f_3(\varphi)}{\omega_2^2} \\ -f_2(\varphi) \\ -\frac{f_1(\varphi)}{\omega_1^2} \end{pmatrix}.$$

Rozpatrując układ jednorodny o stałych współczynnikach:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 0, \\ \frac{dx_1}{dt} = \omega_1^2 x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = -\omega_2^2 x_1, \end{cases} \tag{1.1.0.36}$$

wiemy, że jeżeli posiada funkcję Greena-Samojlenki, to jest ona jedyna. Wartości własne macierzy współczynników układu (1.1.0.36) wynoszą 1, $+\omega_1\omega_2 i$, $-\omega_1\omega_2 i$. *Korzystając zatem z faktu 1.1.2 wnioskujemy, że układ ten nie posiada żadnej funkcji Greena-Samojlenki.*

Na podstawie przykładu 1.1.10 możemy zapisać następujący fakt.

Fakt 1.1.3. *Istnieją układy niejednorodne (1.1.0.4) posiadające inwariantnego torusa dla każdej funkcji* $f(\varphi) \in C^0(T_m)$ *pomimo tego, że odpowiadający im układ jednorodny (1.1.0.1) nie posiada funkcji Greena-Samojlenki. Przykładami takich układów są:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 0, \\ \frac{dx}{dt} = Ax + f(\varphi), \end{cases}$$

gdzie $f(\varphi) \in C^0(T_m)$ *oraz macierz* A *to niezdegenerowana, stała macierz kwadratowa dla której istnieje wartość własna o zerowej części rzeczywistej. Wówczas inwariantny torus dla każdej funkcji* $f(\varphi)$ *będzie miał postać:*

$$u(\varphi) = -A^{-1} f(\varphi).$$

Powyższy fakt pokazuje, że z istnienia inwariantnego torusa nie musi wynikać istnienie funkcji Greena-Samojlenki.

1.2. Metody doboru uogólnionej funkcji Lapunowa dla pewnych klas układów równań różniczkowych linearyzowanych w otoczeniu wielowymiarowego torusa

Jak można było zauważyć w części teoretycznej, bezpośrednie badanie regularności układów (1.1.0.1) jest zadaniem trudnym. Wiąże się to z faktem, że narzędzia jakimi dysponujemy są bardzo ograniczone. W związku z tym niezwykle ważne jest opracowanie jakościowych metod, które pomogą w uzyskaniu odpowiedzi na pytania dotyczące regularności badanych układów.

W tej części rozdziału przedstawione zostaną wyniki dotyczące liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie. Zaprezentowane zostaną metody konstruowania uogólnionej funkcji Lapunowa dla pewnych klas układów równań różniczkowych. Podczas prac udało się uzyskać kilka ciekawych wyników m.in. znalezione zostały układy równań różniczkowych regularne przy dowolnych zaburzeniach fazowych, uzyskano także układy regularne o zdegenerowanych macierzach współczynników (jak w przykładzie 1.1.9). Rezultaty uzyskanych badań przedstawione zostaną w trzech podrozdziałach.

1.2.1. Pewne klasy układów regularnych

Na początku rozpatrzmy układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \\ \frac{dx}{dt} = (\cos 2\varphi)x. \end{cases} \tag{1.2.1.1}$$

Pokażemy, że układ ten jest regularny. W tym celu weźmy funkcję:

$$V(\varphi, x) = e^{s(\varphi)}x^2,$$

gdzie $s(\varphi)$ jest tak dobrana, aby pochodna $\dot{V}(\varphi, x)$ wzdłuż rozwiązań układu (1.2.1.1) była dodatnio określona. Mamy:

$$\begin{aligned} &\dot{V} = e^{s(\varphi)} \cdot \dot{s}(\varphi) \cdot x^2 + e^{s(\varphi)} \cdot 2x \cdot \dot{x} = e^{s(\varphi)} \cdot \tfrac{ds}{d\varphi} \cdot \sin\varphi \cdot x^2 + e^{s(\varphi)} \cdot 2 \cdot (\cos 2\varphi) \cdot x^2 = \\ &= e^{s(\varphi)} \cdot x^2 \left(\tfrac{ds}{d\varphi} \cdot \sin\varphi + 2\cos 2\varphi\right) = e^{s(\varphi)} \cdot x^2 \left(\tfrac{ds}{d\varphi} \cdot \sin\varphi + 2 - 4\sin^2\varphi\right). \end{aligned}$$

Widzimy stąd, że aby pochodna $\dot{V}$ była dodatnio określona wystarczy, by spełniona była równość:

$$\frac{ds}{d\varphi} \cdot \sin\varphi - 4\sin^2\varphi = 0. \tag{1.2.1.2}$$

Rozwiązując (1.2.1.2) otrzymujemy:

$$s(\varphi) = -4\cos\varphi,$$

co oznacza, że dla układu (1.2.1.1) możemy wybrać funkcję:

$$V(\varphi, x) = e^{-4\cos\varphi}x^2.$$

Dokonajmy analizy ogólniejszej postaci układu (1.2.1.1):

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \\ \frac{dx}{dt} = (\cos 2n\varphi)x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases} \tag{1.2.1.3}$$

Możemy się przekonać, że funkcja Lapunowa może być dobrana w postaci:

$$V(\varphi, x) = e^{s_n(\varphi)}x^2. \tag{1.2.1.4}$$

Obliczając pochodną funkcji (1.2.1.4) wzdłuż rozwiązań układu (1.2.1.3) otrzymujemy:

$$\dot{V} = e^{s_n(\varphi)} \cdot \dot{s}_n(\varphi) \cdot x^2 + e^{s_n(\varphi)} \cdot 2x \cdot \dot{x} = e^{s_n(\varphi)} \cdot \frac{ds_n}{d\varphi} \cdot \sin\varphi \cdot x^2 + e^{s_n(\varphi)} \cdot 2 \cdot (\cos 2n\varphi) \cdot x^2 =$$
$$= e^{s_n(\varphi)} \cdot x^2 \left(\frac{ds_n}{d\varphi} \cdot \sin\varphi + 2\cos 2n\varphi\right) = e^{s_n(\varphi)} \cdot x^2 \left(\frac{ds}{d\varphi} \cdot \sin\varphi + 2 - 4\sin^2 n\varphi\right).$$

Dobierając teraz $s_n(\varphi)$ tak, aby:

$$\frac{ds}{d\varphi} \cdot \sin\varphi - 4\sin^2 n\varphi = 0,$$

otrzymamy funkcję, której pochodną wzdłuż rozwiązań (1.2.1.3) jest dodatnio określona. Funkcję $s_n(\varphi)$ można wybrać jako dowolną, ustaloną funkcję pierwotną całki:

$$s_n(\varphi) = \int \frac{4\sin^2 n\varphi}{\sin\varphi} d\varphi.$$

Na podstawie powyższego rozumowania wnioskujemy, że układ (1.2.1.3) jest regularny przy każdym $n \in \mathbb{N}$.

Niech dany będzie układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)] \cdot x, \end{cases} \tag{1.2.1.5}$$

gdzie $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$, $\mu_1(\varphi), \mu_2(\varphi) \in C^0(T_m)$ oraz $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T_m$. Dodatkowo będziemy zakładać, że równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m), \tag{1.2.1.6}$$

posiada 2π-okresowe względem każdej zmiennej rozwiązanie $s = s(\varphi) = s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$. Wówczas ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.1. *[25] Jeżeli funkcja skalarna $\mu_0(\varphi)$ w układzie (1.2.1.5) spełnia nie-*

równość:

$$\mu_0(\varphi) > 0, \quad \forall \varphi \in T_m, \tag{1.2.1.7}$$

oraz równanie (1.2.1.6) posiada rozwiązanie $s = s(\varphi) \in C^1(T_m)$*, wówczas układ (1.2.1.5) będzie regularny. Funkcję Lapunowa dla układu (1.2.1.5) możemy dobrać w następującej postaci:*

$$V(\varphi, x) = e^{-2s(\varphi)} \cdot x^2. \tag{1.2.1.8}$$

Dowód. Wybierzmy funkcję postaci:

$$V(\varphi, x) = e^{-2s(\varphi)} x^2.$$

Zapisując jej pochodną wzdłuż rozwiązań układu (1.2.1.5) dostajemy:

$$\dot{V} = 2x \cdot \dot{x} \cdot e^{-2s(\varphi)} - 2x^2 \cdot \dot{s}(\varphi) \cdot e^{-2s(\varphi)} = 2x^2 \cdot [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi) - \dot{s}(\varphi)] \cdot e^{-2s(\varphi)},$$

gdzie $\dot{s}(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$. Ponieważ funkcja $s(\varphi)$ jest rozwiązaniem równania (1.2.1.6), zatem otrzymujemy:

$$\dot{V} = 2x^2 \cdot [\mu_0(\varphi)]\, e^{-2s(\varphi)}.$$

Widzimy, że pochodna funkcji (1.2.1.8) będzie dodatnio określona gdy $\mu_0(\varphi) > 0$. □

Dokładniejsza analiza powyższego dowodu pozwala wzmocnić twierdzenie 1.2.1. Wzmocnienie twierdzenia ujęte jest w postaci następującego wniosku.

Wniosek 1.2.1. *[25] Nierówność (1.2.1.7) w twierdzeniu 1.2.1 może zostać zastąpiona następującą nierównością:*

$$|\mu_0(\varphi)| > 0, \qquad \forall \varphi \in T_m.$$

Wówczas w przypadku gdy:

$$\mu_0(\varphi) < 0, \quad \forall \varphi \in T_m,$$

wystarczy przemnożyć (1.2.1.8) przez -1*, aby otrzymać funkcje, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1.2.1.5) będzie dodatnio określona. Oznacza to, że funkcja* $\mu_0(\varphi)$ *musi przyjmować wartości stałego znaku.*

Bardzo użytecznym udogodnieniem w procesie poszukiwania funkcji Lapunowa okazuje się następująca uwaga.

Uwaga 1.2.1. *[25] Jeżeli nie jest możliwe znalezienie rozwiązania* $s(\varphi) = s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ *równania (1.2.1.6) lub takie rozwiązanie nie istnieje, wówczas można rozpatrzeć równanie* *różniczkowe o pochodnych cząstkowych postaci:*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_1(\varphi) - \overline{\mu}(\varphi), \tag{1.2.1.9}$$

gdzie funkcję $\overline{\mu} \in C^1(T_m)$ *dobieramy tak, aby równanie (1.2.1.9) posiadało rozwiązanie postaci* $s(\varphi) \in C^1(T_m)$*. W przypadku, gdy istnieje takie rozwiązanie oraz spełniona jest nierówność:*

$$|\mu_0(\varphi) - \overline{\mu}(\varphi)| > 0, \qquad \forall \varphi \in T_m,$$

układ (1.2.1.5) będzie regularny.

Zanim przejdziemy do uogólnienia powyższego twierdzenia zaprezentujemy kilka ciekawych przykładów.

Przykład 1.2.1. *Niech dany będzie układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = (1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi)^{-1}, \\ \frac{dx}{dt} = \left(\mu_0(\varphi) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right) x, \end{cases} \tag{1.2.1.10}$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *są stałymi rzeczywistymi takimi, że* $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < 1$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ *dla dowolnej liczby naturalnej* k*. Teraz zadajmy pytanie, jakie warunki powinna spełniać funkcja* $\mu_0(\varphi) \in C^0(T_1)$*, aby układ (1.2.1.10) był regularny? Niech* $\mu_1(\varphi)$ *oraz* $\overline{\mu}(\varphi)$ *mają postać:*

$$\mu_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi, \tag{1.2.1.11}$$

$$\overline{\mu}(\varphi) = \frac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2\left(1 + \varepsilon_1 \cos\varphi + \varepsilon_2 \sin\varphi\right)}. \tag{1.2.1.12}$$

W celu skorzystania z uwagi 1.2.1 drugie równanie układu (1.2.1.10) możemy zapisać następująco:

$$\frac{dx}{dt} = [(\mu_0(\varphi) + \overline{\mu}(\varphi)) + (\mu_1(\varphi) - \overline{\mu}(\varphi))]\, x.$$

Sprawdźmy teraz czy równanie:

$$\dot{s} = \mu_1(\varphi) - \overline{\mu}(\varphi),$$

posiada rozwiązanie $s = s(\varphi) \in C^1(T_1)$*. Uwzględniając (1.2.1.11) oraz (1.2.1.12) dostajemy:*

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \tfrac{ds}{d\varphi} \cdot \tfrac{d\varphi}{dt} = \tfrac{ds}{d\varphi} \cdot \tfrac{1}{1+\varepsilon_1\cos\varphi+\varepsilon_2\sin\varphi} = \mu_1(\varphi) - \overline{\mu}(\varphi) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) - \tfrac{a_1\varepsilon_1 + b_1\varepsilon_2}{2(1+\varepsilon_1\cos\varphi+\varepsilon_2\sin\varphi)}. \end{aligned}$$

W ten sposób mamy:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{ds}{d\varphi} = (1+\varepsilon_1\cos\varphi+\varepsilon_2\sin\varphi)\,\mu_1(\varphi) - \tfrac{1}{2}\,(a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2) = \mu_1(\varphi) + (\varepsilon_1\cos\varphi+\varepsilon_2\sin\varphi)\cdot\\
&\cdot(a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2) + (\varepsilon_1\cos\varphi+\varepsilon_2\sin\varphi)\cdot\sum_{k=2}^{n}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi) - \tfrac{1}{2}\,(a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2) =\\
&= \mu_1(\varphi) + \tfrac{1}{2}\,(a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2)\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}\,(a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2)\sin 2\varphi +\\
&+ (\varepsilon_1\cos\varphi+\varepsilon_2\sin\varphi)\cdot\sum_{k=2}^{n}a_k\,(\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

Jest oczywiste, że całka tej funkcji jest funkcją okresową $s = s_0(\varphi)$ oraz, że funkcję $\overline{\mu}(\varphi)$ można oszacować w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2}{2\left(1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)} \leqslant \overline{\mu}(\varphi) \leqslant \tfrac{a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2}{2\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)} \quad \textit{gdy} \quad a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2>0,\\
&\tfrac{a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2}{2\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)} \leqslant \overline{\mu}(\varphi) \leqslant \tfrac{a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2}{2\left(1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)} \quad \textit{gdy} \quad a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2<0.
\end{aligned}
$$

Rozważając nierówność $\mu_0(\varphi) - \overline{\mu}(\varphi) > 0$, otrzymujemy warunek wystarczający regularności układu (1.2.1.10):

$$
\mu_0(\varphi) > \begin{cases} \tfrac{a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2}{2\left(1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)} & \textit{gdy} \quad a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2>0,\\ \tfrac{a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2}{2\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)} & \textit{gdy} \quad a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2<0. \end{cases}
$$

Rozważając nierówność przeciwną $\mu_0(\varphi)-\overline{\mu}(\varphi) < 0$, uzyskujemy kolejny warunek wystarczający regularności układu (1.2.1.10):

$$
\mu_0(\varphi) > \begin{cases} \tfrac{a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2}{2\left(1-\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)} & \textit{gdy} \quad a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2>0,\\ \tfrac{a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2}{2\left(1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)} & \textit{gdy} \quad a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2<0. \end{cases}
$$

Przykład 1.2.2. *Zbadajmy regularność następującego układu równań różniczkowych:*

$$
\begin{cases} \tfrac{d\varphi_1}{dt} = 1+2\sin\varphi_1+3\sin\varphi_2,\\ \tfrac{d\varphi_2}{dt} = 2+3\sin\varphi_1+4\sin\varphi_2,\\ \tfrac{dx}{dt} = \left[\mu_0(\varphi_1,\varphi_2)+5\sin\varphi_1+6\sin\varphi_2+7\sin^2\varphi_1+8\sin\varphi_1\sin\varphi_2+9\sin^2\varphi_2\right]x. \end{cases} \tag{1.2.1.13}
$$

Równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych (1.2.1.9) ma w tym wypadku postać:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial\varphi_1}\,(1+2\sin\varphi_1+3\sin\varphi_2) + \frac{\partial s}{\partial\varphi_2}\,(2+3\sin\varphi_1+4\sin\varphi_2) =\\
&= 5\sin\varphi_1+6\sin\varphi_2+7\sin^2\varphi_1+8\sin\varphi_1\sin\varphi_2+9\sin^2\varphi_2-\overline{\mu}(\varphi_1,\varphi_2).
\end{aligned} \tag{1.2.1.14}
$$

Wyznaczmy teraz funkcję:

$$\overline{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) = \overline{\mu}_1 \sin\varphi_1 + \overline{\mu}_2 \sin\varphi_2 + \overline{\mu}_{11} \sin^2\varphi_1 + \overline{\mu}_{12} \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \overline{\mu}_{22} \sin^2\varphi_2, \quad (1.2.1.15)$$

poprzez taki dobór stałych rzeczywistych $\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, \overline{\mu}_{11}, \overline{\mu}_{12}, \overline{\mu}_{22}$*, aby równanie różniczkowe (1.2.1.14) posiadało rozwiązanie postaci:*

$$s = s(\varphi_1, \varphi_2) = s_1 \cos\varphi_1 + s_2 \cos\varphi_2, \quad s_1, s_2 = const. \quad (1.2.1.16)$$

Podstawiając funkcje (1.2.1.15) oraz (1.2.1.16) do równania (1.2.1.14) otrzymujemy następujące warunki:

$$\begin{gathered} -s_1 = 5 - \overline{\mu}_1, \quad -2s_2 = 6 - \overline{\mu}_2, \quad -2s_1 = 7 - \overline{\mu}_{11}, \\ -3(s_1 + s_2) = 8 - \overline{\mu}_{12}, \quad -4s_1 = 9 - \overline{\mu}_{22}. \end{gathered} \quad (1.2.1.17)$$

Na podstawie równości (1.2.1.17) możemy zapisać wielomian trygonometryczny z parametrami s_1, s_2*:*

$$\begin{aligned} &\overline{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) = (5 + s_1)\sin\varphi_1 + (6 + s_2)\sin\varphi_2 + (7 + s_1)\sin^2\varphi_1 + \\ &+ (8 + 3s_1 + 3s_2)\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + (9 + s_2)\sin^2\varphi_2. \end{aligned} \quad (1.2.1.18)$$

Po podstawieniu wielomianu (1.2.1.18) do prawej strony równania (1.2.1.14) stwierdzamy, że posiada ono rozwiązanie postaci (1.2.1.16). Wprowadzając oznaczenia $\sin\varphi_i = \sigma_i$ *dla* $i = 1, 2$*, prawą stronę (1.2.1.18) możemy zapisać następująco:*

$$\begin{aligned} &\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \sigma_1, \sigma_2) = (5 + s_1)\sigma_1 + (6 + s_1)\sigma_2 + \\ &(7 + s_1)\sigma_1^2 + (8 + 3s_1 + 3s_2)\sigma_1\sigma_2 + (9 + s_2)\sigma_2^2. \end{aligned} \quad (1.2.1.19)$$

Oczywiste jest, że dla dowolnych wartości $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$*, funkcja (1.2.1.19) posiada największą oraz najmniejszą wartość:*

$$\begin{aligned} \max_{|\sigma_i| \leqslant 1} \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \sigma_1, \sigma_2) = \Phi_+(s_1, s_2), \\ \min_{|\sigma_i| \leqslant 1} \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \sigma_1, \sigma_2) = \Phi_-(s_1, s_2). \end{aligned} \quad (1.2.1.20)$$

Przykładowo, jeżeli wybierzemy $s_1 = 1$*,* $s_2 = 0$*, wówczas otrzymamy* $\Phi_+(1, 0) = 41$*,* $\Phi_-(1, 0) = -\frac{254}{167}$*. Oznacza to, że z parametrami* $s_1 = 1, s_2 = 0$ *spełnione są nierówności:*

$$\begin{gathered} \overline{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) \geqslant -\tfrac{254}{167}, \\ \overline{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) \leqslant 41. \end{gathered}$$

Stąd wynikają warunki wystarczające regularności układu (1.2.1.13). W tym przypadku funkcja $\mu_0(\varphi_1, \varphi_2)$ powinna spełniać nierówność $\mu_0(\varphi_1, \varphi_2) > \frac{254}{167}$.

Wniosek 1.2.2. *Równości (1.2.1.20) okazują się niezwykle użyteczne przy doborze funkcji (1.2.1.18) pozwalając zapisać oszacowanie:*

$$\Phi_-(s_1, s_2) \leqslant \overline{\mu}(\varphi_1, \varphi_2) \leqslant \Phi_+(s_1, s_2),$$

z którego wynikają warunki konieczne regularności układu (1.2.1.13):

$$\mu_0(\varphi_1, \varphi_2) > -\Phi_-(s_1, s_2) \quad lub \quad \mu_0(\varphi_1, \varphi_2) < \Phi_+(s_1, s_2),$$

gdzie $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Przykład 1.2.3. *Rozważmy układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 + \cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2 + 3\cos\varphi_3, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 + 2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + 3\cos\varphi_3, \\ \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3 + 3\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2 + \cos\varphi_3, \\ \frac{dx}{dt} = [\mu_0(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \mu_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)]\, x, \end{cases} \tag{1.2.1.21}$$

gdzie $\mu_0(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C^0(T_3)$, $\mu_0(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) > 0$, $\omega_i = const > 0$, $i = 1, 2, 3$, natomiast $\mu_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ jest postaci:

$$\mu_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \lambda_1\cos\varphi_1 + \lambda_2\cos\varphi_2 + \lambda_3\cos\varphi_3 + 4\cos^2\varphi_1 + 5\cos^2\varphi_2 + \\ +6\cos^2\varphi_3 + 7\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + 8\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + 9\cos\varphi_2\cos\varphi_3.$$

Powstaje pytanie, dla jakich wartości parametrów $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ powyższy układ będzie regularny? Zapiszmy odpowiednie równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{ds}{d\varphi_1}(\omega_1 + \cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2 + 3\cos\varphi_3) + \frac{ds}{d\phi_2}(\omega_2 + 2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + 3\cos\varphi_3) + \\ +\frac{ds}{d\varphi_3}(\omega_3 + 3\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2 + \cos\varphi_3) = \mu_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) - \overline{\mu}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \tag{1.2.1.22}$$

gdzie:

$$\overline{\mu}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \overline{\mu}_1\cos\varphi_1 + \overline{\mu}_2\cos\varphi_2 + \overline{\mu}_3\cos\varphi_3 + \overline{\mu}_{11}\cos^2\varphi_1 + \overline{\mu}_{22}\cos^2\varphi_2 + \\ +\overline{\mu}_{33}\cos^2\varphi_3 + \overline{\mu}_{12}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \overline{\mu}_{13}\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + \overline{\mu}_{23}\cos\varphi_2\cos\varphi_3. \tag{1.2.1.23}$$

Dobierzemy współczynniki $\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, \overline{\mu}_3, \overline{\mu}_{12}, \overline{\mu}_{13}, \overline{\mu}_{23}$ w taki sposób, aby równanie (1.2.1.22) posiadało rozwiązanie postaci:

$$s = s_0(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = c_1\sin\varphi_1 + c_2\sin\varphi_2 + c_3\sin\varphi_3. \tag{1.2.1.24}$$

gdzie $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$*. Podstawiając zatem (1.2.1.24) do równania (1.2.1.22) otrzymujemy:*

$$c_1\omega_1 = \lambda_1 - \overline{\mu}_1, \quad c_2\omega_2 = \lambda_2 - \overline{\mu}_2, \quad c_3\omega_3 = \lambda_3 - \overline{\mu}_3, \quad 2c_1 + 2c_2 = 7 - \overline{\mu}_{12}$$
$$3c_1 + 3c_3 = 8 - \overline{\mu}_{13}, \quad 3c_2 + 2c_3 = 9 - \overline{\mu}_{23},$$

skąd wynika, że jeżeli funkcja (1.2.1.23) może być zapisana w postaci:

$$\begin{aligned}
&\overline{\mu}\left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\right) = \left(\lambda_1 - c_1\omega_1\right)\cos\varphi_1 + \left(\lambda_2 - c_2\omega_2\right)\cos\varphi_2 + \left(\lambda_3 - c_3\omega_3\right)\cos\varphi_3 + \\
&+ \left(4 - c_1\right)\cos^2\varphi_1 + \left(5 - c_2\right)\cos^2\varphi_2 + \left(6 - c_3\right)\cos^2\varphi_3 + \left(7 - 2c_1 - 2c_2\right)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \\
&+ \left(8 - 3c_1 - 3c_3\right)\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + \left(9 - 3c_2 - 2c_3\right)\cos\varphi_2\cos\varphi_3,
\end{aligned}$$

to równanie różniczkowe (1.2.1.22) będzie posiadać rozwiązanie postaci (1.2.1.24). Kładąc teraz:

$$c_i = \frac{\lambda_i}{\omega_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

dostajemy:

$$\begin{aligned}
&\overline{\mu}\left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\right) = \left(4 - c_1\right)\cos^2\varphi_1 + \left(5 - c_2\right)\cos^2\varphi_2 + \left(6 - c_3\right)\cos^2\varphi_3 + \\
&+ \left(7 - 2c_1 - 2c_2\right)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \left(8 - 3c_1 - 3c_3\right)\cos\varphi_1\cos\varphi_3 \\
&+ \left(9 - 3c_2 - 2c_3\right)\cos\varphi_2\cos\varphi_3.
\end{aligned} \tag{1.2.1.25}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$x_i = \cos\varphi_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

równanie (1.2.1.25) możemy zapisać w postaci formy kwadratowej:

$$\begin{aligned}
&\Phi = \left(4 - c_1\right)x_1^2 + \left(5 - c_2\right)x_2^2 + \left(6 - c_3\right)x_3^2 + \left(7 - 2c_1 - 2c_2\right)x_1x_2 + \\
&+ \left(8 - 3c_1 - 3c_3\right)x_1x_3 + \left(9 - 3c_2 - 2c_3\right)x_2x_3.
\end{aligned} \tag{1.2.1.26}$$

Znajdźmy teraz stałe c_1*,* c_2 *oraz* c_3 *tak, aby forma kwadratowa (1.2.1.26) była dodatnio określona. W tym celu zapiszmy jej macierz symetryczną:*

$$\begin{bmatrix}
\left(4 - c_1\right) & \frac{1}{2}\left(7 - 2c_1 - 2c_2\right) & \frac{1}{2}\left(8 - 3c_1 - 3c_3\right) \\
\frac{1}{2}\left(7 - 2c_1 - 2c_2\right) & \left(5 - c_2\right) & \frac{1}{2}\left(9 - 3c_2 - 2c_3\right) \\
\frac{1}{2}\left(8 - 3c_1 - 3c_3\right) & \frac{1}{2}\left(9 - 3c_2 - 2c_3\right) & \left(6 - c_3\right)
\end{bmatrix}.$$

Zgodnie z twierdzeniem Sylvestera, aby forma kwadratowa (1.2.1.26) była dodatnio określona potrzeba i wystarczy, by minory podstawowe jej macierzy były dodatnie, tzn. spełnione powinny być następujące trzy warunki:

a) $\left(4 - c_1\right) > 0,$

b) $\left(4 - c_1\right)\left(5 - c_2\right) - \left(\frac{7}{2} - c_1 - c_2\right)^2 > 0,$

c) $(4-c_1)(5-c_2)(6-c_3)+2\left(\frac{7}{2}-c_1-c_2\right)\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}c_2-c_3\right)\left(4-\frac{3}{2}c_1-\frac{3}{2}c_3\right)+$
$-(5-c_2)\left(4-\frac{3}{2}c_1-\frac{3}{2}c_3\right)^2-(6-c_3)\left(\frac{7}{2}-c_1-c_2\right)^2-(4-c_1)\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}c_2-c_3\right)^2>0.$

Można sprawdzić, że powyższe warunki spełnione są dla następujących wartości:

$$(c_1,c_2,c_3)=(1,1,-1)\,,(c_1,c_2,c_3)=(1,1,0)\,,(c_1,c_2,c_3)=(1,1,1)\,,(c_1,c_2,c_3)=(1,1,2)\,,$$
$$(c_1,c_2,c_3)=(1,0,0)\,,(c_1,c_2,c_3)=(1,0,1)\,,(c_1,c_2,c_3)=(1,1,1.5)\,,itd.$$

Oznacza to, że podstawiając do formy kwadratowej (1.2.1.26) wartości (c_1,c_2,c_3)=$(1,1,2)$ *będzie ona dodatnio określona. W związku z tym funkcja (1.2.1.23) spełnia nierówność:*

$$\overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)=3\cos^2\varphi_1+4\cos^2\varphi_2+4\cos^2\varphi_3+3\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\cos\varphi_3+$$
$$+2\cos\varphi_2\cos\varphi_3\geqslant\epsilon\left(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3\right),\quad \epsilon=const>0.$$

Zapiszmy teraz czwarte równanie układu (1.2.1.21) w dogodniejszej dla naszych celów postaci:

$$\frac{dx}{dt}=\left[\left(\mu_0\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)+\overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)\right)+\left(\mu_1\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)-\overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)\right)\right]x,$$

i rozważmy funkcję:

$$V(\varphi,x)=x^2e^{-2s_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)},$$

gdzie $s_0\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)=\sin\varphi_1+\sin\varphi_2+2\sin\varphi_3$. *Obliczając jej pochodną wzdłuż rozwiązań (1.2.1.21) mamy:*

$$\begin{aligned}&\dot{V}=2x\cdot\dot{x}\cdot e^{-2s_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}-2x^2\cdot\dot{s}_0\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)\cdot e^{-2s_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}=\\&=2x^2\cdot\left(\mu_0\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)+\overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)\right)\cdot e^{-2s_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}+\\&+2x^2\cdot\left[\mu_1\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)-\overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)-\dot{s}_0\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)\right]\cdot e^{-2s_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}=\\&=2x^2\cdot\left(\mu_0\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)+\overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)\right)\cdot e^{-2s_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}.\end{aligned}$$

Zatem na to, by układ (1.2.1.21) był regularny potrzeba i wystarczy, żeby spełniona była nierówność:

$$\left|\mu_0\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)+\overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)\right|>0.$$

Rozpatrzmy teraz pewne uogólnienia układu (1.2.1.5). Zacznijmy od układów, które można zapisać w postaci:

$$\begin{cases}\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi)\\ \frac{dx}{dt}=\left[\mu_0(\varphi)+\mu_1(\varphi)\right]\cdot A(\varphi)\cdot x,\end{cases}\qquad(1.2.1.27)$$

gdzie $x\in\mathbb{R}^n$, $a(\varphi)\in C_{Lip}(T_m)$, $\mu_1(\varphi),\mu_2(\varphi)\in C^0(T_m)$, $A(\varphi)$ jest $n\times n$-wymiarową macierzą o elementach ciągłych, 2π-okresowych ze względu na każdą zmienną, tzn. $A(\varphi)\in C^0(T_m)$. Zachodzi twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.2. *[25] Niech macierz $A(\varphi)$ w układzie (1.2.1.27) da się przedstawić w postaci:*

$$A(\varphi) = \lambda I_n + \tilde{A}(\varphi),$$

gdzie $\lambda = const \neq 0$, $\tilde{A}^T(\varphi) \equiv -\tilde{A}(\varphi)$ a także, niech równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych (1.2.1.6) posiada rozwiązanie $s = s_0(\varphi) \in C^1(T_m)$, wówczas jeżeli funkcja $\mu_0(\varphi)$ spełnia nierówność:

$$\mu_0(\varphi) > 0, \quad \forall \varphi \in T_m, \tag{1.2.1.28}$$

to układ (1.2.1.27) będzie regularny. Funkcję Lapunowa możemy dobrać w postaci:

$$V(\varphi, x) = \|x\|^2 e^{-2\lambda s_0(\varphi)}. \tag{1.2.1.29}$$

Dowód. Funkcję Lapunowa (1.2.1.29) można zapisać następująco:

$$V = \langle x, x \rangle \cdot e^{-2\lambda s_0(\varphi)}.$$

Obliczają jej pochodną wzdłuż rozwiązań układu (1.2.1.27) a także uwzględniając postać macierzy $A(\varphi)$ $(A(\varphi) + A^T(\varphi) = 2\lambda I_n)$ dostajemy:

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = [\langle \dot{x}, x \rangle + \langle x, \dot{x} \rangle] \cdot e^{-2\lambda s_0(\varphi)} + \langle x, x \rangle \cdot \{-2\lambda \dot{s}_0(\varphi)\} \cdot e^{-2\lambda s_0(\varphi)} = \\
&= e^{-2\lambda s_0(\varphi)} \cdot (\langle [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)] \cdot A(\varphi) \cdot x, x \rangle + \langle x, [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)] \cdot A(\varphi) \cdot x \rangle + \\
&+ \langle x, x \rangle \cdot \{-2\lambda \dot{s}_0(\varphi)\}) = e^{-2\lambda s_0(\varphi)} \cdot ([\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)] \cdot (\langle A(\varphi) \cdot x, x \rangle + \langle x, A(\varphi) \cdot x \rangle) + \\
&+ \langle x, x \rangle \cdot \{-2\lambda \dot{s}_0(\varphi)\}) = e^{-2\lambda s_0(\varphi)} \cdot \Big([\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)] \cdot \langle (A(\varphi) + A^T(\varphi)) \cdot x, x \rangle + \\
&+ \langle x, x \rangle \cdot \{-2\lambda \dot{s}_0(\varphi)\}) = e^{-2\lambda s_0(\varphi)} \cdot (2\lambda \cdot [\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)] \cdot (\langle x, x \rangle + \langle x, x \rangle) + \\
&+ \langle x, x \rangle \cdot \{-2\lambda \dot{s}_0(\varphi)\}) = e^{-2\lambda s_0(\varphi)} \cdot \|x\|^2 \cdot [2\lambda \cdot \mu_0(\varphi) + 2\lambda \mu_1(\varphi) - 2\lambda \dot{s}_0(\varphi)] = \\
&= 2\lambda \mu_0(\varphi) \|x\|^2 \cdot e^{-2\lambda s_0(\varphi)}.
\end{aligned}$$

Widzimy zatem, że spełnienie warunku (1.2.1.28) oznacza, że pochodna funkcji (1.2.1.29) wzdłuż rozwiązań naszego układu będzie dodatnio określona, zatem układ (1.2.1.27) jest regularny. □

Wniosek 1.2.3. *[25] Nierówność (1.2.1.28) w twierdzeniu 1.2.2 możemy zastąpić mocniejszym warunkiem:*

$$|\mu_0(\varphi)| > 0, \quad \forall \varphi \in T_m,$$

przy którym układ (1.2.1.27) także będzie regularny.

Niech dany będzie układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx_1}{dt} = [\mu_{10}(\varphi) + \mu_1(\varphi)] \left[\lambda_1 I_{n_1} + \tilde{A}_1(\varphi)\right] x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = [\mu_{20}(\varphi) + \mu_2(\varphi)] \left[\lambda_2 I_{n_2} + \tilde{A}_2(\varphi)\right] x_2, \end{cases} \tag{1.2.1.30}$$

gdzie $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$, $\mu_1(\varphi), \mu_2(\varphi), \mu_{10}(\varphi), \mu_{20}(\varphi) \in C^0(T_m)$, $\tilde{A}_i^T(\varphi) \equiv -\tilde{A}_i(\varphi)$, $\lambda_i \neq 0$ dla $i = 1, 2$. Ma miejsce następujące twierdzenie dotyczące układu (1.2.1.30).

Twierdzenie 1.2.3. *[25] Załóżmy, że w układzie (1.2.1.30) funkcje skalarne $\mu_i(\varphi) \in C^0(T_m)$ dla $i = 1, 2$ są takie, że następujące równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych:*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m), \qquad i = 1, 2,$$

posiadają rozwiązania $s = s_{0i}(\varphi) \in C^1(T_m)$, $i = 1, 2$. Załóżmy także, że λ_1, λ_2 to stałe niezerowe, funkcje $\mu_{i0}(\varphi) \neq 0$, $\forall \varphi \in T_m$ dla $i = 1, 2$ oraz macierze skośno-symetryczne $\tilde{A}_1(\varphi), \tilde{A}_2(\varphi) \in C^0(T_m)$. Wówczas układ (1.2.1.30) będzie regularny. Uogólniona funkcja Lapunowa może zostać dobrana w postaci:

$$V(\varphi, x) = \begin{cases} \|x_1\|^2 \cdot e^{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)} + \|x_2\|^2 \cdot e^{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)}, & \mu_{10}(\varphi) > 0 \wedge \lambda_2 \mu_{20}(\varphi) > 0, \\ \|x_1\|^2 \cdot e^{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)} - \|x_2\|^2 \cdot e^{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)}, & \mu_{10}(\varphi) > 0 \wedge \lambda_2 \mu_{20}(\varphi) < 0, \\ -\|x_1\|^2 \cdot e^{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)} + \|x_2\|^2 \cdot e^{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)}, & \mu_{10}(\varphi) < 0 \wedge \lambda_2 \mu_{20}(\varphi) > 0, \\ -\|x_1\|^2 \cdot e^{-2\lambda_1 s_{01}(\varphi)} - \|x_2\|^2 \cdot e^{-2\lambda_2 s_{02}(\varphi)}, & \mu_{10}(\varphi) < 0 \wedge \lambda_2 \mu_{20}(\varphi) < 0. \end{cases}$$

Dowód tego twierdzenia przebiega analogicznie do dowodu dwóch poprzednich twierdzeń z tym, że musimy rozpatrzeć cztery przypadki. Kolejnym uogólnieniem jest układ postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = [A_0(\varphi) + A_1(\varphi)]\, x, \end{cases} \tag{1.2.1.31}$$

gdzie $A_0(\varphi), A_1(\varphi) \in C^0(T_m)$. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.4. *[24] Niech istnieje $n \times n$-wymiarowa macierz $\overline{A}(\varphi) \in C^0(T_m)$ dla której równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych:*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) + L\left[A_1(\varphi) - \overline{A}(\varphi)\right] + \left[A_1^T(\varphi) - \overline{A}^T(\varphi)\right] L = 0, \tag{1.2.1.32}$$

posiada rozwiązanie w postaci symetrycznej, niezdegenerowanej macierzy $L = S(\varphi) \in$

$C^1(T_m)$ dla której ponadto spełniona jest nierówność:

$$\left\langle \left\{ S(\varphi)\left[A_0(\varphi)+\overline{A}(\varphi)\right]+\left[A_0^T(\varphi)+\overline{A}^T(\varphi)\right]S(\varphi)\right\} x,x\right\rangle \geqslant \alpha\|x\|^2, \tag{1.2.1.33}$$

gdzie $\alpha = const > 0$. Wówczas układ (1.2.1.31) będzie regularny a forma kwadratowa, której pochodna względem rozwiązań układu (1.2.1.31) będzie dodatnio określona ma postać:

$$V(\varphi,x)=\langle S(\varphi)x,x\rangle\,. \tag{1.2.1.34}$$

Dowód. Rozważmy formę kwadratową (1.2.1.34) gdzie $S(\varphi)\in C^1(T_m)$ jest macierzą symetryczną taką, że $\det S(\varphi)\neq 0$, $\forall\varphi\in T_m$. Pochodna formy kwadratowej (1.2.1.34) wzdłuż rozwiązań układu (1.2.1.31) jest następująca:

$$\begin{aligned}&\dot{V}=\left\langle \dot{S}(\varphi)x,x\right\rangle+\langle S(\varphi)\dot{x},x\rangle+\langle S(\varphi)x,\dot{x}\rangle=\left\langle \dot{S}(\varphi)x,x\right\rangle+\langle S(\varphi)\left[A_0(\varphi)+A_1(\varphi)\right]x,x\rangle+\\&+\langle S(\varphi)x,\left[A_0(\varphi)+A_1(\varphi)\right]x\rangle=\left\langle \dot{S}(\varphi)x,x\right\rangle+\langle S(\varphi)\left[A_0(\varphi)+A_1(\varphi)\right]x,x\rangle+\Big\langle\left[A_0(\varphi)+A_1(\varphi)\right]^T\\&S(\varphi)x,x\rangle=\left\langle \dot{S}(\varphi)x,x\right\rangle+\langle S(\varphi)\left[A_0(\varphi)+A_1(\varphi)\right]x,x\rangle+\left\langle\left[A_0^T(\varphi)+A_1^T(\varphi)\right]S(\varphi)x,x\right\rangle=\\&=\left\langle\left\{\dot{S}(\varphi)+S(\varphi)\left[A_0(\varphi)+A_1(\varphi)\right]+\left[A_0^T(\varphi)+A_1^T(\varphi)\right]S(\varphi)\right\}x,x\right\rangle=\Big\langle\Big\{\dot{S}(\varphi)+S(\varphi)\left[A_0(\varphi)\right.\\&\left.+A_1(\varphi)\right]+\left[A_0^T(\varphi)+A_1^T(\varphi)\right]S(\varphi)+S(\varphi)\left[\overline{A}(\varphi)-\overline{A}(\varphi)\right]+\left[\overline{A}^T(\varphi)-\overline{A}^T(\varphi)\right]S(\varphi)\Big\}x,x\Big\rangle=\\&=\left\langle\left\{\dot{S}(\varphi)+S(\varphi)\left[A_1(\varphi)-\overline{A}(\varphi)\right]+\left[A_1^T(\varphi)-\overline{A}^T(\varphi)\right]S(\varphi)\right\}x,x\right\rangle+\Big\langle\Big\{S(\varphi)\left[A_0(\varphi)+\overline{A}(\varphi)\right]+\\&\left[A_0^T(\varphi)+\overline{A}^T(\varphi)\right]S(\varphi)\Big\}x,x\Big\rangle,\end{aligned}$$

gdzie $\dot{S}(\varphi)=\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_j}a_j(\varphi)$. Zauważmy, że pierwszy składnik sumy jest postaci (1.2.1.32), zatem jest on równy zeru. Drugi składnik sumy zgodnie z naszym założeniem (1.2.1.33) jest dodatni. Oznacza to, że pochodna formy kwadratowej wzdłuż rozwiązań układu (1.2.1.31) jest dodatnio określona, czyli układ (1.2.1.31) jest regularny. □

Uwaga 1.2.2. *[24] Założenie, że* $\det S(\varphi)\neq 0$, $\forall\varphi\in T_m$ *jest istotne, ponieważ w przypadku, gdy* $\det S(\varphi_0)=0$ *dla pewnego niezerowego $\varphi_0\in T_m$, wówczas istnieje wektor $x_0\in\mathbb{R}^n$ dla którego spełniona jest równość:*

$$S(\varphi_0)\cdot x_0=0.$$

Oznacza to, że:

$$\left\langle\left\{S(\varphi)\left[A_0(\varphi_0)+\overline{A}(\varphi_0)\right]+\left[A_0^T(\varphi_0)+\overline{A}^T(\varphi_0)\right]S(\varphi_0)\right\}x,x\right\rangle=0.$$

1.2.2. Pewne klasy układów zachowujące regularność przy dowolnych zaburzeniach zmiennych fazowych

Często pojawia się pytanie, czy układ (1.1.0.1):

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \end{cases}$$

może być regularny przy wyborze dowolnej funkcji $a(\varphi) \in C_{Lip}(\varphi)$. Jeżeli tak faktycznie jest, to dowolne zaburzenia fazowe nie wpływają na regularność naszego układu. Podczas badań udało się wydzielić kilka klas takich układów. Dodatkowo uzyskane zostały informacje, kiedy dla takiego układu nie będzie istniała funkcja Lapunowa w postaci formy kwadratowej o stałych współczynnikach.

Niech dany jest układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx_1}{dt} = A(\varphi)\sin(\varphi_1)x_1 + C(\varphi)\cos^2(\varphi_1)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = B(\varphi)x_1 - A^T(\varphi)\sin(\varphi_1)x_2, \end{cases} \tag{1.2.2.1}$$

gdzie $\varphi \in T_m$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, funkcja $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$ oraz macierze $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $C(\varphi)$ $\in C^0(T_m)$. Możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.5. *Niech macierze $B(\varphi)$ oraz $C(\varphi)$ spełniają nierówności:*

$$\begin{aligned} &\langle B(\varphi)x_1, x_1\rangle \geqslant \beta\|x_1\|^2, \\ &\langle C(\varphi)x_2, x_2\rangle \geqslant \gamma\|x_2\|^2, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.2.2.2}$$

gdzie β, γ to dodatnie stałe oraz dla macierzy $A(\varphi)$ istnieje stała, symetryczna macierz S stopnia n-tego dla której spełniony jest warunek:

$$\left\langle \left[SA^T(\varphi) + A(\varphi)Sx, x \right] \right\rangle \leqslant -\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varphi \in T_m. \tag{1.2.2.3}$$

Wówczas układ (1.2.2.1) będzie regularny przy każdej funkcji wektorowej $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$. Ponadto gdy macierz $A(\varphi)$ zależy tylko od zmiennych $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$ oraz nie zależy od zmiennej φ_1, wówczas nie istnieje forma kwadratowa o stałych współczynnikach, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.1) byłaby dodatnio określona.

Dowód. Zapiszmy pochodną formy kwadratowej $V_1 = \langle x_1, x_2\rangle$, wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.1):

$$\dot{V} = \langle \dot{x}_1, x_2\rangle + \langle x_1, \dot{x}_2\rangle = \langle A(\varphi)\sin(\varphi_1)x_1 + C(\varphi)\cos^2(\varphi_1)x_2, x_2\rangle +$$
$$\langle x_1, B(\varphi)x_1 - A^T(\varphi)\sin(\varphi_1)x_2\rangle = \langle A(\varphi)\sin(\varphi_1)x_1, x_2\rangle + \langle C(\varphi)\cos^2(\varphi_1)x_2, x_2\rangle +$$
$$+\langle x_1, B(\varphi)x_1\rangle + \langle x_1, -A^T(\varphi)\sin(\varphi_1)x_2\rangle = \langle B(\varphi)x_1, x_1\rangle + \langle C(\varphi)x_2, x_2\rangle\cos^2(\varphi_1).$$

Uwzględniając nierówności (1.2.2.2) dostajemy:

$$\dot{V}_1 \geqslant \beta\|x_1\|^2, \quad \dot{V}_1 \geqslant \gamma\|x_2\|^2.$$

Następnie wyznaczmy pochodną formy kwadratowej $V_2 = \langle Sx_2, x_2\rangle\sin(\varphi_1)$ wzdłuż rozwiązań (1.2.2.1):

$$\dot{V}_2 = (\langle S\dot{x}_2, x_2\rangle + \langle Sx_2, \dot{x}_2\rangle)\sin(\varphi_1) + \langle Sx_2, x_2\rangle\cos(\varphi_1)a_1(\varphi) =$$
$$2\langle Sx_2, \dot{x}_2\rangle\sin(\varphi_1) + \langle Sx_2, x_2\rangle\cos(\varphi_1)a_1(\varphi) = \langle Sx_2, x_2\rangle\cos(\varphi_1)a_1(\varphi) +$$
$$2\langle Sx_2, B(\varphi)x_1 - A^T(\varphi)\sin(\varphi_1)x_2\rangle\sin(\varphi_1) = \langle Sx_2, x_2\rangle\sin(\varphi_1)a_1(\varphi) +$$
$$+2\langle Sx_2, B(\varphi)x_1\rangle\sin(\varphi_1) - \langle\left[SA^T(\varphi) + A(\varphi)S\right]x_2, x_2\rangle\sin^2(\varphi_1).$$

Uwzględniając warunek (1.2.2.3) uzyskujemy:

$$\dot{V}_2 \geqslant \|x_1\|^2\sin^2(\varphi_1) - 2\|SB\|_0\|x_1\|\|x_2\| - |a_1|_0\|S\|\|x_2\|^2|\cos(\varphi_1)|.$$

Niech dana jest forma kwadratowa, zależna od dwóch parametrów:

$$V_{p_1,p_2} = \frac{p_1}{\beta}V_1 + \frac{p_2+1}{\gamma}V_1 + V_2. \tag{1.2.2.4}$$

Uwzględniając nierówności dla $\dot{V}_1$ oraz $\dot{V}_2$ możemy zapisać:

$$\dot{V}_{p_1,p_2} \geqslant p_1\|x_1\|^2 + (p_2+1)\|x_2\|^2\cos^2(\varphi_1) + \|x_2\|^2\sin^2(\varphi_1) - 2\|SB\|_0\|x_1\|\|x_2\| -$$
$$-|a_1|_0\|S\|\|x_2\|^2|\cos(\varphi_1) = p_1\|x_1\|^2 + (p_2\cos^2(\varphi_1 - |a_1|_0\|S\||\cos(\varphi_1)|))\|x_2\|^2 -$$
$$-2\|SB\|_0\|x_1\|\|x_2\|.$$

Pokażemy teraz, że przy dostatecznie dużych wartościach parametru p_2 dla wszystkich φ_1 spełniona będzie nierówność:

$$p_2\cos^2(\varphi_1) + 1 - |a_1|_0\|S\||\cos(\varphi_1)| \geqslant \frac{3}{4}.$$

W tym celu oznaczmy $\sigma = |\cos(\varphi_1)|$ i rozpatrzmy funkcję:

$$f(\sigma) = p_2\sigma^2 - |a_1|_0\|\sigma\| + 1, \quad \sigma \in [0,1].$$

Mamy $f(0) = 1 > 0$ oraz przyjmując $\sigma_b = -|a_1|_0\|S\|\frac{1}{2p_1}$ dostajemy:

$$f(\sigma_b) = -|a_1|_0\|S\|^2\frac{1}{4p_2} + 1 > 0,$$

gdy $p_2 > \frac{1}{4}|a_1|_0^2\|S\|^2$. Zatem przyjmując $p_2 = p_2^* = |a_1|_0^2\|S\|^2$, mamy $f(\sigma_b) = \frac{3}{4}$. Wynika stąd, że dla każdego $\sigma \in [0,1]$ zachodzi $f(\sigma) \geqslant \frac{3}{4}$, co oznacza, że spełniona jest nierówność:

$$V_{p_1,p_2^*} \geqslant p_1\|x_1\|^2 + \frac{3}{4}\|x_2\|^2 - \|SB\|_0\|x\|\|x_2\|.$$

Otrzymujemy stąd, że pochodna formy kwadratowej V_{p_1,p_2^*} wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.1) będzie dodatnio określona, jeżeli tylko spełniony będzie warunek $p_1 > \frac{4}{3}\|SB\|_0^2$. Okazuje się, że forma kwadratowa (1.2.2.4) przy odpowiednim doborze parametrów p_1, p_2 pozwala wykazać regularność układu (1.2.2.1). Udowodnijmy teraz drugą część twierdzenia. Przypuśćmy, że istnieje forma kwadratowa o stałych współczynnikach:

$$V = \langle S_1x_1, x_1\rangle + \langle S_{12}x_1, x_2\rangle + \langle S_2x_2, x_2\rangle, \tag{1.2.2.5}$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.1) spełnia nierówność:

$$\begin{gathered}2\langle S_1x_1, A(\varphi)\sin(\varphi_1)x_1 + C(\varphi)\cos^2(\varphi_1)x_2\rangle +\\ \langle S_{12}\left[A(\varphi)\sin(\varphi_1)x_1 + C(\varphi)\cos^2(\varphi)x_2\right]x_2, x_2\rangle +\\ +\langle S_{12}x_1, B(\varphi)x_1 - A^T(\varphi)\sin(\varphi_1)x_2\rangle +\\ +2\langle S_2x_2, B(\varphi)x_1 - A^T(\varphi)\sin(\varphi_1)x_2\rangle \geqslant \varepsilon_0(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2),\end{gathered}$$

gdzie $\varepsilon_0 = \mathit{const} > 0$. Przyjmując za $x_1 = 0$ dostajemy:

$$\langle S_{12}C(\varphi)x_2, x_2\rangle\cos^2(\varphi_1) - 2\langle S_2x_2, A^T(\varphi)x_2\rangle\sin(\varphi_1) \geqslant \varepsilon_0\|x_2\|^2.$$

Wybierzmy teraz $x_2 = x_2^0 \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\|x_2^0\| = 0$ i oznaczmy $M_1 = \langle S_{12}C(\varphi)x_2^0, x_2^0\rangle$ oraz $M_2 = \langle S_2x_2^0, A^T(\varphi)x_2^0\rangle$. Wcześniejszą nierówność możemy zatem zapisać w postaci:

$$M_1\cos^2(\varphi_1) - M_2\sin(\varphi_1) \geqslant \varepsilon_0 = \mathit{const} > 0.$$

Z założenia wiemy, że macierz $A(\varphi)$ nie zależy od zmiennej φ_1, zatem niemożliwe jest uzyskanie powyższej nierówności, ponieważ w punktach postaci $\varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ uzyskamy różne znaki. Powyższa sprzeczność kończy dowód drugiej części twierdzenia. □

Uwaga 1.2.3. *Jeżeli w twierdzeniu 1.2.5 nie założymy niezależności macierzy $A(\varphi)$ od zmiennej φ_1, to możliwe jest istnienie formy kwadratowej (1.2.2.5) o stałych współczynnikach, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.1) będzie dodatnio określona.*

Przykład 1.2.4. *Rozpatrzmy następujący układ równań:*

$$
\begin{cases}
\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\
\frac{dx_1}{dt} = (\sin\varphi)x_1 + p(\sin\varphi)x_2 + (\cos^2\varphi)y_1, \\
\frac{dx_2}{dt} = p(\sin^2\varphi)x_1 - (\sin\varphi)x_2 + (\cos^2\varphi)y_2, \\
\frac{dy_1}{dt} = x_1 - (\sin\varphi)y_1 - p(\sin^2\varphi)y_2, \\
\frac{dy_2}{dt} = x_2 - p(\sin^2\varphi)y_1 + (\sin\varphi)y_2,
\end{cases}
$$

gdzie $\varphi \in T_1$ oraz $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_1)$. Dla $p = 0$ nie istnieje forma kwadratowa o stałych współczynnikach, której pochodna wzdłuż rozwiązań tego układu będzie dodatnio określona. Dla $p \neq 0$ taka forma istnieje i jedną z nich można zapisać w postaci:

$$V = (p^2+1)(x_1y_1 + x_2y_2 - py_1y_2).$$

Niech dany będzie układ równań różniczkowych:

$$
\begin{cases}
\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\
\frac{dx_1}{dt} = \cos(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i + \theta)A(\varphi)x_1 + \sin^2(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i + \theta)C(\varphi)x_2, \\
\frac{dx_2}{dt} = B(\varphi)x_1 - \cos(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i + \theta)A^T(\varphi)x_2,
\end{cases}
\tag{1.2.2.6}
$$

gdzie $\varphi \in T_m$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\theta = const \in \mathbb{R}$, funkcja wektorowa $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$ oraz macierze $A(\varphi), B(\varphi), C(\varphi) \in C^0(T_m)$. Ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.6. *Niech macierze $A(\varphi), B(\varphi), C(\varphi)$ mają takie same własności jak w poprzednim twierdzeniu, tzn. spełniają warunki (1.2.2.2) oraz (1.2.2.3). Wówczas układ (1.2.2.6) przy każdej funkcji wektorowej $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$ będzie regularny. Ponadto gdy macierz $A(\varphi)$ nie zależy od chociaż jednej ze zmiennych $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, to nie istnieje forma kwadratowa o stałych współczynnikach, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.6) byłaby dodatnio określona. Istnieje natomiast forma kwadratowa postaci:*

$$V = p\langle x_1, x_2\rangle + \langle Sx_2, x_2\rangle \cos(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i + \theta),$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.6) przy dostatecznie dużych wartościach parametru p będzie dodatnio określona.

Dowód. Dowód tego twierdzenia jest analogiczny z dowodem poprzedniego twierdzenia. Pokażemy tutaj część dotyczącą nie istnienia formy kwadratowej o stałych współczynnikach. Załóżmy zatem, że istnieje forma kwadratowa o stałych współczynnikach.

Ponownie możemy ją zapisać w postaci (1.2.2.5):

$$V = \langle S_1 x_1, x_1\rangle + \langle S_{12} x_1, x_2\rangle + \langle S_2 x_2, x_2\rangle.$$

Postępując analogicznie otrzymujemy nierówność:

$$M_1(\varphi)\sin^2(\sum_{i=1}^{m}\varphi_1+\theta) - M_2(\varphi)\cos(\sum_{i=1}^{m}\varphi_1+\theta) \geqslant \varepsilon_0 = const > 0,$$

gdzie $M_1(\varphi) = \langle S_{12}C(\varphi)x_2^0, x_2^0\rangle$ oraz $M_2(\varphi) = -2\langle S_2 x_2^0, A^T(\varphi)x_2^0\rangle$. Z założenia wiemy, że macierz $A(\varphi)$ nie zależy od pewnej zmiennej, przykładowo od φ_j. Wówczas zmieniając tylko φ_j może dojść do zmiany wartości M_2 na $-M_2$, stąd powyższa nierówność może nie być spełniona. Ta sprzeczność kończy dowód tej części twierdzenia. $\square$

Rozpatrzmy teraz układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx_1}{dt} = \sin^{p_1-1}(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i+\Delta)A(\varphi)x_1 + \cos^{2p_3}(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i+\Delta)B_2(\varphi)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \cos^{2p_2}(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i+\Delta)B_1(\varphi)x_1 - \sin^{2p_1-1}(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i+\Delta)A^T(\varphi)x_2, \end{cases} \tag{1.2.2.7}$$

gdzie $\varphi \in T_m$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\Delta = const \in \mathbb{R}$, $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$, funkcja $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$ oraz macierze kwadratowe stopnia n-tego $A(\varphi), B_1(\varphi), B_2(\varphi) \in C^0(T_m)$. Dla tego układu ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.7. *Niech w układzie (1.2.2.7) macierze $B_1(\varphi), B_2(\varphi)$ spełniają nierówności:*

$$\langle B_1(\varphi)x, x\rangle \geqslant \beta\|x\|^2, \langle B_2(\varphi)x, x\rangle \geqslant \beta\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \beta = const > 0, \tag{1.2.2.8}$$

oraz dla macierzy $A(\varphi)$ istnieje stała, symetryczna macierz S dla której spełniona jest nierówność:

$$\left\langle \left[SA(\varphi) + A^T(\varphi)S\right]x, x\right\rangle \geqslant \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.2.9}$$

Wówczas przy każdej funkcji $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$ układ będzie regularny. Forma kwadratowa może być dobrana w postaci:

$$V = \lambda\langle x_1, x_2\rangle + \langle Sx_1, x_1\rangle \sin(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i+\Delta) - \langle S^{-1}x_2, x_2\rangle \sin(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i+\Delta), \tag{1.2.2.10}$$

a jej pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.7) będzie dodatnio określona przy dostatecznie dużej wartości parametru λ. Ponadto gdy macierz $A(\varphi)$ nie zależy od chociaż jednej ze zmiennych $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, to nie istnieje forma kwadratowa o stałych współczynnikach, *której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.7) byłaby dodatnio określona.*

Dowód. W celu czytelniejszego zapisu wprowadźmy oznaczenie $\Psi = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i + \Delta$. Dokonując zamiany zmiennych $y = Sx$ w nierówności (1.2.2.9) otrzymujemy:

$$\left\langle \left[S^{-1}A^T(\varphi) + A(\varphi)S^{-1} \right] y, y \right\rangle \geqslant \|S\|^{-2}\|y\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.2.11}$$

Normą macierzy S jest norma operatorowa, tzn: $\|S\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Sx\|$. Zapiszmy pochodną formy kwadratowej (1.2.2.10) wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.7):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \lambda\langle B_1(\varphi)x_1, x_1\rangle \cos^{2p_2}(\Psi) + \lambda\langle B_2(\varphi)x_2, x_2\rangle \cos^{2p_3}(\Psi) + \\ &+ \left[\langle Sx_1, x_1\rangle - \langle S^{-1}x_2, x_2\rangle\right] \dot{\Psi} \cos(\Psi) + \\ &+ 2\langle Sx_1, \sin^{2p_1-1}(\Psi)A(\varphi)x_1 + \cos^{2p_3}(\Psi)B_2(\varphi)x_2\rangle \sin(\Psi) - \\ &- 2\langle S^{-1}x_2, \cos^{2p_2}(\Psi)B_1(\varphi)x_1 - \sin^{2p_1-1}(\Psi)x_2\rangle \sin(\Psi). \end{aligned} \tag{1.2.2.12}$$

Można sprawdzić, że mają miejsce następujące nierówności:

$$\begin{aligned} &\left[\langle Sx_1, x_1\rangle - \langle S^{-1}x_2, x_2\rangle\right] \dot{\Psi} \cos(\Psi) \geqslant -K\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right) |\cos(\Psi)|, \\ &|2\langle Sx_1, B_2(\varphi)x_2\rangle \cos^{2p_3}(\Psi)\sin(\Psi)| \leqslant \|SB_2\|_0 \left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right) |\cos(\Psi)|, \\ &|2\langle S^{-1}x_2, B_1(\varphi)x_1\rangle \cos^{2p_2}(\Psi)\sin(\Psi)| \leqslant \|S^{-1}B_1\|_0 \left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right) |\cos(\Psi)|, \end{aligned} \tag{1.2.2.13}$$

gdzie stała K spełnia warunek:

$$\max(\|S\|, \|S^{-1}\|) \left| \sum_{i=1}^{m} a_i(\varphi) \right| \leqslant K \quad \text{dla} \quad \varphi \in T_m,$$

oraz $\|SB_2\|_0 = \max\limits_{\varphi \in T_m} \|SB_2(\varphi)\|$. W związku z warunkami (1.2.2.8), (1.2.2.9), (1.2.2.11), (1.2.2.13) pochodną (1.2.2.12) możemy oszacować następująco:

$$\begin{aligned} \dot{V} \geqslant &\left(\lambda\beta\cos^{2p_2}(\Psi) + \sin^{2p_1}(\Psi) - L|\cos(\Psi)|\right) \|x_1\|^2 + \\ &\left(\lambda\beta\cos^{2p_3}(\Psi) + \|S\|^{-2}\sin^{2p_1}(\Psi) - L|\cos(\Psi)|\right) \|x_2\|^2, \end{aligned} \tag{1.2.2.14}$$

gdzie $L = K + \|SB_2\|_0 + \|S^{-1}B_1\|_0$. Pokażemy teraz, że przy dużych wartościach parametru λ prawa strona nierówności (1.2.2.14) będzie dodatnia przy wszystkich wartościach $\Psi \in \mathbb{R}$. Rozpatrzmy funkcję postaci:

$$F(\Psi) = \lambda\beta\cos^{2p_3}(\Psi) + K\sin^{2p_1}(\Psi) - L|\cos(\Psi)|, \quad K = \|S\|^2.$$

Oznaczając przez $p = \max(p_1, p_2)$ oraz $\lambda\beta - K = \overline{\lambda}$ uzyskujemy:

$$F(\Psi) \geqslant \overline{\lambda}\cos^{2p}(\Psi) + K\left(\cos^{2p}(\Psi) + \sin^{2p}(\Psi)\right) - L|\cos(\Psi)|. \tag{1.2.2.15}$$

Korzystając z nierówności $\cos^{2p}(\Psi) + \sin^{2p}(\Psi) \geqslant 2^{1-p}$ dla wszystkich $\Psi \in \mathbb{R}$ i dowolnej liczby naturalnej p, możemy zapisać:

$$F(\Psi) \geqslant \overline{\lambda} \cos^{2p}(\Psi) - L|\cos(\Psi)| + 2^{1-p}K. \tag{1.2.2.16}$$

Oznaczmy teraz $\sigma = |\cos(\Psi)|$, $\sigma \in [0, 1]$ oraz prawą stronę nierówności (1.2.2.16) przez:

$$f(\sigma) = \overline{\lambda}\sigma^{2p} - L\sigma + 2^{1-p}K. \tag{1.2.2.17}$$

Załóżmy dalej, że $\overline{\lambda} > L$. Bezpośrednio z postaci funkcji (1.2.2.17) widzimy, że przyjmuje ona najmniejszą wartość gdy $\sigma = \sigma^* = \left(L(2p\overline{\lambda})^{-1}\right)^{\frac{1}{2p-1}}$ a wartość ta wynosi:

$$f(\sigma^*) = 2^{1-p}K - L^{\frac{2p}{2p-1}} \left[\overline{\lambda}^{-\frac{1}{2p-1}} \left((2p)^{-\frac{1}{2p-1}} - (2p)^{-\frac{2p}{2p-1}}\right)\right]. \tag{1.2.2.18}$$

Po uwzględnieniu nierówności (1.2.2.15), (1.2.2.16) w równości (1.2.2.18) dostajemy:

$$F(\Psi) \geqslant f(\sigma) \geqslant f(\sigma^*) \to 2^{1-p} \quad \text{gdy} \quad \overline{\lambda} \to \infty.$$

Zatem na podstawie nierówności (1.2.2.14) widzimy, że pochodna formy kwadratowej (1.2.2.10) wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.7) jest dodatnio określona, jeżeli tylko λ ma odpowiednio dużą wartość.

Załóżmy teraz, że macierz $A(\varphi)$ nie zależy od zmiennej φ_j, gdzie $1 \leqslant j \leqslant m$ oraz, że istnieje forma kwadratowa o stałych współczynnikach $V = \langle S_1x_1, x_1\rangle + \langle S_{12}x_1, x_2\rangle + \langle S_2x_2, x_2\rangle$, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1.2.2.7) będzie dodatnio określona:

$$\dot{V} = 2\langle S_1x_1, \dot{x}_1\rangle + \langle S_{12}\dot{x}_1, x_2\rangle + \langle S_{12}x_1, \dot{x}_2\rangle + 2\langle S_2\dot{x}_2, x_2\rangle \geqslant \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2.$$

Postępując analogicznie jak we wcześniejszych dowodach przyjmujemy $x_1 = 0$ i mamy:

$$\langle S_{12}B_2(\varphi)x_2, x_2\rangle \cos^{2p_3}(\Psi) - 2\langle S_2x_2, A^T(\varphi)x_2\rangle \sin^{2p_1-1}(\Psi) \geqslant \|x_2\|^2. \tag{1.2.2.19}$$

Wiedząc, że macierz $A(\varphi)$ nie zależy od zmiennej φ_j dostaniemy, że lewa strona (1.2.2.19) dla $\varphi = \overline{\varphi} = (0, \ldots, 0, \frac{\pi}{2} - \Delta, 0, \ldots, 0)$ oraz $\varphi = \tilde{\varphi} = (0, - \ldots, 0, \frac{\pi}{2} - \Delta, 0, \ldots, 0)$ przyjmuje wartości różnych znaków, co przeczy nierówności (1.2.2.19). Uzyskana sprzeczność kończy dowód. □

Uwaga 1.2.4. *Z postaci formy kwadratowej (1.2.2.10):*

$$V = \lambda\langle x_1, x_2\rangle + \langle Sx_1, x_1\rangle \sin(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i + \Delta) - \langle S^{-1}x_2, x_2\rangle \sin(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i + \Delta),$$

oraz pierwszej z nierówności (1.2.2.13):

$$[\langle Sx_1, x_1\rangle - \langle S^{-1}x_2, x_2\rangle]\,\dot{\Psi}\cos(\Psi) \geqslant -K\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right)|\cos(\Psi)|,$$

wynika, że jeżeli spełnione będą warunki (1.2.2.8) oraz (1.2.2.9), to układ równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + b_1(\varphi, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} = b_2(\varphi, \theta), \\ \frac{dx_1}{dt} = \sin^{2p_1-1}(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i + \Delta)A(\varphi)x_1 + \cos^{p_3}(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i + \Delta)B_2(\varphi)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \cos^{2p_2}(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i + \Delta)B_1(\varphi)x_1 - \sin^{2p_1-1}(\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i + \Delta)A^T(\varphi)x_2, \end{cases}$$

będący uogólnieniem układu (1.2.2.7) będzie regularny przy dowolnych funkcjach $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$, $b_1(\varphi, \theta)$, $b_2(\varphi, \theta) \in C_{Lip}(T_m \times T_k)$.

1.2.3. Pewne klasy układów regularnych o zdegenerowanych macierzach współczynników

Ze wstępu teoretycznego wiemy, że układ równań różniczkowych (1.1.0.1) postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = Ax, \end{cases}$$

dla którego stała macierz współczynników A ma wyznacznik równy zeru, nie może być regularny. Ogromnym zaskoczeniem było znalezienie układu równań różniczkowych o zdegenerowanej, zmiennej macierzy współczynników stopnia drugiego, który mimo to był regularny (przykład 1.1.9). Świadomość, że takie układy istnieją była impulsem do poszukiwania klas układów równań różniczkowych o takiej własności. W tym podrozdziale chciałbym zaprezentować wyniki, jakie udało się w tym kierunku uzyskać. Znalezione zostały układy regularne, których macierze współczynników miały wymiary 2×2, 3×3 i 4×4 oraz ich rząd był równy 1.

Zacznijmy od analizy regularności następującego układu równań różniczkowych w zależności od dodatniej liczby rzeczywistej ω:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{dx}{dt} = L(\varphi)JL(\varphi)x, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \tag{1.2.3.1}$$

gdzie:

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\varphi\right) & \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\varphi\right) \\ \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & (-2\cos\varphi) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\varphi\right) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\varphi\right) \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dokonajmy zamiany zmiennych:

$$x = L(\varphi)y. \tag{1.2.3.2}$$

Wówczas układ (1.2.3.1) przyjmie postać:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{dy}{dt} = \left[L^{-1}(\varphi)A(\varphi)L(\varphi) - L^{-1}(\varphi)\frac{dL(\varphi)}{dt}\omega\right]y, \end{cases} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie:

$$A(\varphi) = L(\varphi)JL(\varphi).$$

Możemy zauważyć, że kwadrat $L(\varphi)$ jest macierzą stałą, tzn.:

$$L(\varphi)L(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = L_0.$$

Znajdując macierz odwrotną do L_0:

$$L_0^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

stwierdzamy, że $L^{-1}(\varphi)$ ma postać:

$$L^{-1}(\varphi) = L(\varphi)L_0^{-1} = L_0^{-1}L(\varphi) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \left(\sqrt{2} + \cos\varphi\right) & \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\sqrt{2} - \cos\varphi\right) \\ \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & (-2\cos\varphi) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) \\ \left(\sqrt{2} - \cos\varphi\right) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\sqrt{2} + \cos\varphi\right) \end{pmatrix}.$$

Zapiszmy iloczyn $L^{-1}(\varphi)\frac{dL(\varphi)}{dt}$:

$$L^{-1}(\varphi)\frac{dL(\varphi)}{dt} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \left(\sqrt{2}+\cos\varphi\right) & \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\sqrt{2}-\cos\varphi\right) \\ \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(-2\cos\varphi\right) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) \\ \left(\sqrt{2}-\cos\varphi\right) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\sqrt{2}+\cos\varphi\right) \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} (-\sin\varphi) & \left(\sqrt{2}\cos\varphi\right) & (\sin\varphi) \\ \left(\sqrt{2}\cos\varphi\right) & (2\sin\varphi) & \left(-\sqrt{2}\cos\varphi\right) \\ (\sin\varphi) & \left(-\sqrt{2}\cos\varphi\right) & (-\sin\varphi) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

W wyniku zamiany zmiennych (1.2.3.2) otrzymujemy układ o stałych współczynnikach:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.2.3.3}$$

W celu znalezienia wartości własnych macierzy współczynników układu (1.2.3.3) zapiszmy jej równanie charakterystyczne:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\omega & -\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\omega & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Po uporządkowaniu wyrazów podobnych dostajemy:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + \omega^2\lambda - \omega^2 = 0. \tag{1.2.3.4}$$

Wiemy, że aby układ (1.2.3.3) był regularny spełniony musi być warunek:

$$\operatorname{Re}\lambda_j \neq 0, \tag{1.2.3.5}$$

dla pierwiastków $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ równania (1.2.3.4). Przypuśćmy, że równanie (1.2.3.4) posiada rozwiązanie postaci βi gdzie $i = \sqrt{-1}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Podstawiając je do równania (1.2.3.4) otrzymujemy:

$$-\beta^3 i + 3\beta^2 + \omega^2\beta i - \omega^2 = 0. \tag{1.2.3.6}$$

Do spełnienia równania (1.2.3.6) konieczne jest jednoczesne spełnienie dwóch warunków:

$$\begin{cases} -\beta^3 + \omega^2\beta = 0, \\ 3\beta^2 - \omega^2 = 0. \end{cases} \tag{1.2.3.7}$$

Widzimy, że gdy $\omega > 0$ spełnienie równości (1.2.3.7) jest niemożliwe. Okazuje się zatem, że wszystkie pierwiastki równania (1.2.3.4) spełniają warunek (1.2.3.5) a to oznacza, że układy (1.2.3.1), (1.2.3.3) są regularne przy dowolnej wartości $\omega > 0$. Przejdźmy teraz do badania regularności układu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{dx}{dt} = L(\varphi)JL^{-1}(\varphi)x, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \tag{1.2.3.8}$$

gdzie: $\omega > 0$,

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\varphi\right) & \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\varphi\right) \\ \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & (-2\cos\varphi) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\varphi\right) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\varphi\right) \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wprowadzając nowe zmienne:

$$x = L(\varphi)y.$$

układ (1.2.3.8) przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

W celu wyznaczenia wartości własnych macierzy:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 \end{pmatrix},$$

zapisujemy jej równanie charakterystyczne:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \omega^2\lambda - \frac{1}{2}\omega^2 = 0.$$

Zakładając, że powyższe równanie posiada pierwiastek postaci βi otrzymujemy następujące dwa warunki:

$$\begin{cases} -\beta^3 + \omega^2\beta = 0, \\ \beta^2 - \frac{1}{2}\omega = 0. \end{cases} \tag{1.2.3.9}$$

Ponownie widzimy, że jednoczesne spełnienie warunków (1.2.3.9) oraz $\omega > 0$ jest niemożliwe, stąd układ (1.2.3.8) jest regularny. W ten sposób otrzymaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.8. *Układy równań różniczkowych (1.2.3.1) oraz (1.2.3.8):*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{dx}{dt} = L(\varphi)JL(\varphi)x, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{dx}{dt} = L(\varphi)JL^{-1}(\varphi)x, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie:

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\varphi\right) & \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\varphi\right) \\ \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(-2\cos\varphi\right) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\varphi\right) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\varphi\right) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

są regularne dla każdej wartości dodatniej ω.

Uwaga 1.2.5. *Układy równań różniczkowych (1.2.3.1) oraz (1.2.3.8) są przykładami układów regularnych o zmiennej macierzy współczynników $A(\varphi)$ wymiaru 3×3, której rząd wynosi 1 a funkcja $a(\varphi)$ jest stała.*

Przypuśćmy dalej, że $\omega = \omega(\varphi) \in C_{Lip}(T_1)$ jest funkcją skalarną, która przyjmuje wartości dodatnie:

$$\omega(\varphi) > 0.$$

Oznaczmy:

$$\mu(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega(\varphi),$$

i rozpatrzmy zmienną macierz:

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -\mu(\varphi) & 0 \\ \mu(\varphi) & 0 & -\mu(\varphi) \\ 0 & \mu(\varphi) & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2.3.10}$$

Dla macierzy (1.2.3.10) istnieje stała, symetryczna macierz S, której suma:

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S, \tag{1.2.3.11}$$

jest dodatnio określoną macierzą symetryczną. Wybierając macierz S w następującej postaci:

$$S = \begin{pmatrix} s & -2 & 0 \\ -2 & s & -1 \\ 0 & -1 & s \end{pmatrix}, \tag{1.2.3.12}$$

wyznaczmy $SB(\varphi) + B^T(\varphi)S$:

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S = \begin{pmatrix} s & -2 & 0 \\ -2 & s & -1 \\ 0 & -1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mu(\varphi) & 0 \\ \mu(\varphi) & 0 & -\mu(\varphi) \\ 0 & \mu(\varphi) & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 & \mu(\varphi) & 0 \\ -\mu(\varphi) & 0 & \mu(\varphi) \\ 0 & -\mu(\varphi) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & -2 & 0 \\ -2 & s & -1 \\ 0 & -1 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(s-2\mu(\varphi)) & -2 & \mu(\varphi) \\ -2 & 2\mu(\varphi) & 0 \\ \mu(\varphi) & 0 & 2\mu(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{1.2.3.13}$$

Obliczając wyznacznik macierzy (1.2.3.13) otrzymujemy:

$$\det \begin{pmatrix} 2(s-2\mu(\varphi)) & -2 & \mu(\varphi) \\ -2 & 2\mu(\varphi) & 0 \\ \mu(\varphi) & 0 & 2\mu(\varphi) \end{pmatrix} = 8\mu^2(\varphi)(s-2\mu(\varphi)) - 2\mu^3(\varphi) - 8\mu(\varphi) =$$
$$8\mu^2(\varphi)\left(s - \tfrac{1}{\mu(\varphi)} - \tfrac{9}{4}\mu(\varphi)\right).$$

Przyjmując $s > 0$ w taki sposób, aby spełniona była nierówność:

$$s > \frac{1}{\mu(\varphi)} - \frac{9}{4}\mu(\varphi),$$

widzimy, że macierze (1.2.3.11) oraz (1.2.3.12) będą dodatnio określone. Oznacza to, że układ (1.2.3.8) będzie regularny gdy zmienimy w nim stałą ω na funkcję o wartościach dodatnich $\omega(\varphi)$. W ten sposób udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.9. *Układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = L(\varphi)JL^{-1}(\varphi)x, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \tag{1.2.3.14}$$

gdzie:

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\varphi\right) & \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\varphi\right) \\ \left(\sqrt{2}\sin\varphi\right) & (-2\cos\varphi) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\varphi\right) & \left(-\sqrt{2}\sin\varphi\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\varphi\right) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

jest regularny dla każdej funkcji $\omega(\varphi) \in C_{Lip}(T_1)$ przyjmującej tylko wartości dodatnie.

Uwaga 1.2.6. *Układ równań różniczkowych (1.2.3.14) jest przykładem układu regularnego o zmiennej macierzy współczynników $A(\varphi)$ wymiaru 3×3, której rząd wynosi 1 a funkcja $a(\varphi)$ nie jest stała.*

Dokonajmy analizy układu równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{1.2.3.15}$$

odpowiadając na pytanie, dla jakich wartości $\omega \in \mathbb{R}$ posiada on funkcję Greena-Samojlenki? Dokonując zamiany zmiennych $x = L(\varphi)y$, gdzie:

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix},$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \omega, \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Wyznaczając wartości własne macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

mamy:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\omega^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\omega^2}}{2}.$$

Wynika stąd, że układ (1.2.3.15) będzie regularny gdy $\omega \neq 0$.

Wniosek 1.2.4. *Układ (1.2.3.15) jest regularny, jeżeli stała ω jest różna od zera.*

Uwaga 1.2.7. *Układ równań różniczkowych (1.2.3.15) jest przykładem układu regularnego o zmiennej macierzy współczynników $A(\varphi)$ wymiaru 2×2, której rząd wynosi 1 a funkcja $a(\varphi)$ jest stała.*

Przejdźmy teraz do rozpatrzenia pewnego uogólnienia układu (1.2.3.15):

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{1.2.3.16}$$

gdzie $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_1)$. Dokonując zamiany zmiennych:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

w układzie (1.2.3.16) otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a(\varphi) \\ a(\varphi) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.2.3.17}$$

Oznaczmy teraz:

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -a(\varphi) \\ a(\varphi) & 0 \end{pmatrix},$$

i załóżmy dalej, że istnieje stała, symetryczna macierz:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.3.18}$$

której suma iloczynów:

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S = \begin{pmatrix} 2s_1 + 2s_2 a(\varphi) & s_2 \\ s_2 & -2s_2 a(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{1.2.3.19}$$

jest macierzą dodatnio określoną. Wówczas pochodna formy kwadratowej $V(y) = \langle Sy, y\rangle$, wzdłuż rozwiązań układu (1.2.3.17) ma postać:

$$\dot{V}(y) = \langle S\dot{y}, y\rangle + \langle Sy, \dot{y}\rangle = \langle \left[SB(\varphi) + B^T(\varphi)S\right] y, y\rangle.$$

Macierz (1.2.3.19) będzie dodatnio określona gdy równocześnie spełnione będą dwie nierówności:

$$\begin{cases} -2s_2 a(\varphi) > 0, \\ -2s_2 a(\varphi)\left(2s_1 + 2s_2 a(\varphi)\right) - s_2^2 > 0. \end{cases} \tag{1.2.3.20}$$

Z pierwszej nierówności (1.2.3.20) wynika, że funkcja $a(\varphi)$ powinna być stałego znaku.

W ten sposób udowodniliśmy następujący lemat.

Lemat 1.2.1. *Jeżeli funkcja $a(\varphi)$ w układzie (1.2.3.17) jest stałego znaku oraz istnieje stała, symetryczna macierz S dla której dodatnio określona jest macierz postaci:*

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S,$$

gdzie:

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -a(\varphi) \\ a(\varphi) & 0 \end{pmatrix},$$

to układ (1.2.3.17) będzie regularny. Odpowiednia forma kwadratowa ma wówczas postać:

$$V(y) = \langle Sy, y \rangle.$$

Korzystając z powyższego lematu oraz faktów dotyczących zamiany zmiennych możemy zapisać twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.10. *Układ równań różniczkowych (1.2.3.16):*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L(\varphi)JL(\varphi)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

gdzie:

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

będzie regularny, jeżeli funkcja $a(\varphi)$ jest stałego znaku oraz istnieje stała, symetryczna macierz S, dla której dodatnio określona jest macierz postaci:

$$SB(\varphi) + B^T S,$$

gdzie:

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -a(\varphi) \\ a(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Wówczas pochodna formy kwadratowej:

$$V(\varphi, x) = \langle SL(\varphi)x, L(\varphi)x \rangle,$$

wzdłuż rozwiązań układu (1.2.3.16) będzie dodatnio określona.

Uwaga 1.2.8. *Układ równań różniczkowych (1.2.3.16) jest przykładem układu regularne-*

go o zmiennej macierzy współczynników $A(\varphi)$ wymiaru 2×2, której rząd wynosi 1 a funkcja $a(\varphi)$ nie jest stała.

Pokażemy teraz w jaki sposób wyznaczyć macierz symetryczną S. Załóżmy, że spełniona jest nierówność:

$$a(\varphi) > 0,$$

wówczas stała s_2 powinna być ujemna:

$$s_2 < 0.$$

Przy tych założeniach z drugiej nierówności (1.2.3.20) otrzymujemy:

$$s_1 > (-s_2)\left(a(\varphi) + \frac{1}{4a(\varphi)}\right). \tag{1.2.3.21}$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\max_{\varphi}\left(a(\varphi) + \frac{1}{4a(\varphi)}\right) = \overline{\gamma}. \tag{1.2.3.22}$$

Rozważmy przykład układu (1.2.3.17) postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 1 + \varepsilon + \sin\varphi, \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(1+\varepsilon+\sin\varphi) \\ (1+\varepsilon+\sin\varphi) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon > 0$. W celu znalezienia stałej (1.2.3.22) zapiszmy:

$$a(\varphi) + \frac{1}{4a(\varphi)} = (1+\varepsilon+\sin\varphi) + \frac{1}{4\,(1+\varepsilon+\sin\varphi)} = \sigma + \frac{1}{4\sigma} = \mu(\sigma).$$

Obliczając pochodną i przyrównując ją do zera mamy:

$$\frac{d\mu(\sigma)}{d\sigma} = 1 - \frac{1}{4\sigma^2} = 0.$$

Widzimy, że powyższa równość jest spełniona dla $\sigma = \frac{1}{2}$. W naszym przypadku $\sigma = 1+\varepsilon+\sin\varphi$, zatem $\sigma \in [\varepsilon, 2+\varepsilon]$. Niech $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$, wówczas $\overline{\gamma} = 2,6$. Wybierzmy w nierówności (1.2.3.21) $s_1 = 3$ oraz $s_2 = -1$. Stała macierz (1.2.3.18) może mieć postać:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że wówczas pochodna formy kwadratowej:

$$V = 3y_1^2 - 2y_1y_2 + 3y_2^2,$$

wzdłuż rozwiązań układu:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 2,1 + \sin\varphi, \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(2,1+\sin\varphi) \\ (2,1+\sin\varphi) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

będzie dodatnio określona. Dokonajmy teraz analizy regularności układu równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.2.3.23}$$

gdzie $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$. Wprowadzając nowe zmienne:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

dostajemy:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-a(\varphi) \\ a(\varphi) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.2.3.24}$$

Podobnie jak wcześniej wykażemy pewne fakty dla układu (1.2.3.24) a następnie przejdziemy do ich uogólnienia na układ (1.2.3.23). Wprowadźmy oznaczenie:

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1-a(\varphi) \\ a(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Przypuśćmy następnie, że istnieje stała, symetryczna macierz:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.3.25}$$

której suma iloczynów:

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S = \begin{pmatrix} 2s_2a(\varphi) & s_1 \\ s_1 & 2s_2(1-a(\varphi)) \end{pmatrix},$$

jest dodatnio określona. Oznacza to, że spełnione muszą być równocześnie dwie nierówności:

$$\begin{cases} 2s_2 a(\varphi) > 0, \\ 4s_2^2 a(\varphi)\,(1 - a(\varphi)) - s_1^2 > 0. \end{cases} \tag{1.2.3.26}$$

Z pierwszej nierówności (1.2.3.26) wynika, że funkcja $a(\varphi)$ musi być stałego znaku. W ten sposób otrzymujemy następujący lemat.

Lemat 1.2.2. *Jeżeli funkcja $a(\varphi)$ w układzie (1.2.3.24) jest stałego znaku oraz istnieje stała, symetryczna macierz S dla której dodatnio określona jest macierz postaci:*

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S,$$

gdzie:

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - a(\varphi) \\ a(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

to układ (1.2.3.24) będzie regularny. Odpowiednia forma kwadratowa ma wówczas postać:

$$V(y) = \langle Sy, y\rangle.$$

Podobnie jak wcześniej ma miejsce analogiczne twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.11. *Układ równań różniczkowych (1.2.3.23):*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L(\varphi)JL(\varphi)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

gdzie:

$$L(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

będzie regularny, jeżeli funkcja $a(\varphi)$ jest stałego znaku oraz istnieje stała, symetryczna macierz S dla której dodatnio określona jest macierz postaci:

$$SB(\varphi) + B^T S,$$

gdzie:

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - a(\varphi) \\ a(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Wówczas pochodna formy kwadratowej:

$$V(\varphi, x) = \langle SL(\varphi)x, L(\varphi)x\rangle,$$

wzdłuż rozwiązań układu (1.2.3.23) będzie dodatnio określona.

Uwaga 1.2.9. *Układy równań różniczkowych (1.2.3.16) oraz (1.2.3.23) są przykładami układów regularnych o zmiennej macierzy współczynników $A(\varphi)$ wymiaru 2×2, której rząd wynosi 1 a funkcja $a(\varphi)$ nie jest stała.*

Także i tym razem pokażemy jak wyznaczyć odpowiednie macierze. Niech będzie spełniona nierówność:

$$a(\varphi) > 0,$$

wówczas stała s_2 powinna być dodatnia:

$$s_2 > 0.$$

Do spełnienia drugiej nierówności w układzie (1.2.3.26) konieczne jest, aby:

$$a(\varphi)\,(1 - a(\varphi)) > 0,$$

czyli wartości funkcji $a(\varphi)$ zmieniają się w przedziale $(0, 1)$. Oznaczając:

$$\beta = \min_{\varphi} \left\{a(\varphi)\,(1 - a(\varphi))\right\}, \tag{1.2.3.27}$$

druga nierówność (1.2.3.26) będzie spełniona gdy zachodzić będzie:

$$s_2 > \frac{|s_1|}{2\sqrt{\beta}}.$$

Rozpatrzmy przykład:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} + \frac{5}{14}\sin\varphi, \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{array}\right. \tag{1.2.3.28}$$

W tym przypadku funkcja $a(\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{5}{14}\sin\varphi$. Stała (1.2.3.27) dla tego układu jest równa:

$$\beta = \min_{\varphi}\{a(\varphi)\,(1 - a(\varphi))\} = \frac{6}{49}.$$

Wybierając zatem s_1 dostajemy, że $s_2 > \frac{7\sqrt{6}}{12} \approx 1,43$. Możemy wybrać $s_2 = 2$, wówczas macierz (1.2.3.25) ma postać:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Funkcję Lapunowa w postaci formy kwadratowej dla układu (1.2.3.28) możemy zapisać w postaci:

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1+2\sin 2\varphi & -2\cos 2\varphi \\ -2\cos 2\varphi & 1-2\sin 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1^2\left(1+2\sin 2\varphi\right) - 4x_1x_2\cos 2\varphi +$$
$$+x_2^2\left(1-2\sin 2\varphi\right).$$

Pochodna powyższej formy kwadratowej wzdłuż rozwiązań układu (1.2.3.28) jest dodatnio określona, co oznacza, że układ (1.2.3.28) jest regularny.
Na zakończenie tego podrozdziału zbadajmy regularność układu równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = a_1(\varphi_1, \varphi_2), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = a_2(\varphi_1, \varphi_2), \\ \frac{dx}{dt} = L(\varphi_1, \varphi_2) J L(\varphi_1, \varphi_2) x, \end{cases} \tag{1.2.3.29}$$

gdzie:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad J = diag(1,0,0,0),$$

$$L(\varphi_1,\varphi_2) = \begin{pmatrix} (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) & (\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) & (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) & (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \\ (\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) & (-\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) & (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) & (-\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \\ (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) & (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) & (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) & (\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) \\ (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) & (-\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) & (\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) & (-\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \end{pmatrix},$$

oraz $a_1(\varphi_1,\varphi_2), a_2(\varphi_1,\varphi_2) \in C_{Lip}(T_2)$. W układzie (1.2.3.29) dokonując zamiany zmiennych:

$$x = L(\varphi_1,\varphi_2)y, \quad y \in \mathbb{R}^4, \tag{1.2.3.30}$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = a_1(\varphi_1, \varphi_2), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = a_2(\varphi_1, \varphi_2), \\ \frac{dy}{dt} = \left[L^{-1}(\varphi_1,\varphi_2) A L(\varphi_1,\varphi_2) - L^{-1}(\varphi_1,\varphi_2)\left(\frac{\partial L(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_1} a_1(\varphi_1,\varphi_2) + \frac{\partial L(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial\varphi_2} a_2(\varphi_1,\varphi_2)\right)\right] y, \end{cases}$$

gdzie:

$$A = L(\varphi_1, \varphi_2) J L(\varphi_1, \varphi_2).$$

Zwróćmy uwagę na to, że macierz kwadratowa $L(\varphi_1, \varphi_2)$ spełnia tożsamość:

$$L(\varphi_1, \varphi_2) L(\varphi_1, \varphi_2) \equiv 4I_4.$$

Na tej podstawie możemy zapisać następujące równości:

$$\begin{aligned}
&L^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) = \tfrac{1}{4} L(\varphi_1, \varphi_2),\\
&L^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) A L(\varphi_1, \varphi_2) = J L^2(\varphi_1, \varphi_2) = diag(4, 0, 0, 0),\\
&L^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) \tfrac{\partial L(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\\
&L^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) \tfrac{\partial L(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe zależności układ (1.2.3.29) przy zamianie zmiennych (1.2.3.30) przyjmuje postać:

$$\begin{cases}
\frac{d\varphi_1}{dt} = a_1(\varphi_1, \varphi_2),\\
\frac{d\varphi_2}{dt} = a_2(\varphi_1, \varphi_2),\\
\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -\mu_1 & 0 & -\mu_2 \\ \mu_1 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & -\mu_1 \\ \mu_2 & 0 & \mu_1 & 0 \end{pmatrix} y,
\end{cases}$$

gdzie: $\mu_1 = \frac{1}{2}\left(a_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_2(\varphi_1, \varphi_2)\right)$, $\mu_2 = \frac{1}{2}\left(a_1(\varphi_1, \varphi_2) - a_2(\varphi_1, \varphi_2)\right)$. Wyjaśnijmy przy jakich dostatecznych warunkach spełnionych przez funkcje a_1, a_2 dla zmiennej macierzy:

$$B(\varphi) = B(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} 4 & -\mu_1 & 0 & -\mu_2 \\ \mu_1 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & -\mu_1 \\ \mu_2 & 0 & \mu_1 & 0 \end{pmatrix},$$

istnieje dodatnio określona, symetryczna macierz dla której suma iloczynów:

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi) S,$$

jest macierzą dodatnio określoną. Wybierając stałą, symetryczną macierz postaci:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & -1 & 0 & -s_2 \\ -1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & 1 \\ -s_2 & 0 & 1 & s_1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.3.31}$$

otrzymujemy:

$$SB(\varphi) + B^T(\varphi)S = \begin{pmatrix} 2\sigma & -4 & -s_2\mu_1 & -4s_2 \\ -4 & 2\mu_1 & 0 & s_2\mu_1 \\ -s_2\mu_1 & 0 & 2\mu_1 & 0 \\ -4s_2 & s_2\mu_1 & 0 & 2\rho \end{pmatrix}, \tag{1.2.3.32}$$

gdzie $\sigma = 4s_1 - \mu_1 - s_2\mu_2$, $\rho = s_2\mu_2 - \mu_1$. Aby macierz (1.2.3.32) była dodatnio określona, spełniony musi być następujący układ warunków:

$$\begin{cases} 2\left(s_2\mu_2 - \mu_1\right) > 0, \\ 4\mu_1\left(s_2\mu_2 - \mu_1\right) > 0, \\ 8\mu_1^2\left(s_2\mu_2 - \mu_1\right) - 2\mu_1^3 s_2^2 > 0, \\ \det\Big(SB(\varphi) + B^T(\varphi)S\Big) > 0. \end{cases} \tag{1.2.3.33}$$

Z pierwszych dwóch nierówności układu (1.2.3.33) dostajemy, że $\mu_1 > 0$ jest równoważne ze spełnieniem nierówności $a_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_2(\varphi_1, \varphi_2) > 0$. Z warunku:

$$8\mu_1^2\left(s_2\mu_2 - \mu_1\right) - 2\mu_1^3 s_2^2 > 0 \Leftrightarrow 8\mu_1^2\left[\left(s_2\mu_2 - \mu_1\right) - \frac{1}{4}\mu_1 s_2^2\right] > 0, \tag{1.2.3.34}$$

wynika trzecia z nierówności (1.2.3.33). Z (1.2.3.34) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & s_2\mu_2 - \mu_1 - \tfrac{1}{4}\mu_1 s_2^2 > 0 \Leftrightarrow 8s_2\mu_2 - 8\mu_1 - 2\mu_1 s_2^2 > 0, \\ & 4s_2\left(a_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_2(\varphi_1, \varphi_2)\right) - 4(a_1(\varphi_1, \varphi_2) - a_2(\varphi_1, \varphi_2)) - s_2^2(a_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_2(\varphi_1, \varphi_2)) > 0, \\ & a_1(\varphi_1, \varphi_2)(4s_1 - 4 - s_2^2) + a_2\left(-4s_2 - 4 - s_2^2\right) > 0, \\ & a_1(\varphi_1, \varphi_2)(s_2 - 2)^2 + a_2(\varphi_1, \varphi_2)(s_2 + 2)^2 < 0. \end{aligned}$$

Wybierając w zapisanych nierównościach $s_2 = -2$ albo $s_2 = 2$ otrzymujemy układ warunków:

$$\begin{cases} a_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_2(\varphi_1, \varphi_2) > 0, \\ a_1(\varphi_1, \varphi_2)a_2(\varphi_1, \varphi_2) < 0, \end{cases} \tag{1.2.3.35}$$

przy którym istnieje stała macierz (1.2.3.31) taka, że suma iloczynów (1.2.3.32) będzie dodatnio określona. Wybierając $s_2 = 2$ będziemy mieli $a_1(\varphi_1, \varphi_2) > 0$ a dla $s_2 = -2$ otrzymamy $a_1(\varphi_1, \varphi_2) < 0$. Natomiast stałą $s_1 > 0$ wybieramy w taki sposób, aby spełnione były nierówności (1.2.3.33).

Uwaga 1.2.10. *Układ równań różniczkowych (1.2.3.29) spełniający powyższe warunki jest przykładem układu regularnego o zmiennej macierzy współczynników* $A(\varphi)$ *wymiaru* 4×4*, której rząd wynosi 1 a funkcja* $a(\varphi)$ *nie jest stała.*

2

Dołączenie słabo regularnego układu równań różniczkowych do układu regularnego

W tym rozdziale będziemy zajmować się zagadnieniami dotyczącymi regularności liniowych układów równań różniczkowych. Pojęcie to różni się od pojęcia dotyczącego liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie przedstawionego w rozdziale pierwszym. Rozdział ponownie składa się z części teoretycznej oraz części zawierającej uzyskane wyniki. Głównym przedmiotem badań zaprezentowanych w tym rozdziale był tzw. proces dołączenia (czasem nazywany także dopełnieniem) słabo regularnego układu równań różniczkowych do układu regularnego. Badania nad tym zagadnieniem były już wcześniej prowadzone dla liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie. Celem mojej pracy było sprawdzenie, czy pewnych wyników nie można przenieść z liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie na układy równań liniowych. Jak można zauważyć w części teoretycznej tego rozdziału wiele twierdzeń oraz definicji jest bardzo zbliżonych do twierdzeń i definicji z rozdziału pierwszego.

2.1. Podstawowe pojęcia teoretyczne

Rozpatrzmy układ równań różniczkowych:

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{2.1.0.1}$$

gdzie $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ jest macierzą kwadratową $n \times n$-wymiarową, której elementami są funkcje ciągłe i ograniczone na $\mathbb{R}$, co dalej zapisywać będziemy jako $A(t) \in C^0(\mathbb{R})$. Warto w tym miejscu podać oznaczenia przestrzeni funkcyjnych, które będą pojawiać się w tym rozdziale:

- $C^0(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$,

- $C^1(\mathbb{R})$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $C^0(\mathbb{R})$ złożoną z funkcji, których pochodna jest ciągła i ograniczona na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$.

W analogiczny sposób jak wcześniej z układem (2.1.0.1) rozważany będzie układ niejednorodny postaci:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{2.1.0.2}$$

gdzie $f(t)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną na $\mathbb{R}$, co oznaczamy następująco $f(t) \in C^0(\mathbb{R})$.

Definicja 2.1.1. *Układ (2.1.0.1) nazywamy regularnym na $\mathbb{R}$, jeżeli układ niejednorodny (2.1.0.2) posiada dokładnie jedno ograniczone na $\mathbb{R}$ rozwiązanie dla każdej ciągłej i ograniczonej na $\mathbb{R}$ funkcji $f(t)$. Układ (2.1.0.1) nazywamy słabo regularnym na $\mathbb{R}$, jeżeli układ niejednorodny (2.1.0.2) posiada przynajmniej jedno ograniczone na $\mathbb{R}$ rozwiązanie dla każdej ciągłej i ograniczonej na $\mathbb{R}$ funkcji $f(t)$. Układ (2.1.0.1) nazywamy ostro-słabo regularnym na $\mathbb{R}$, jeżeli układ niejednorodny (2.1.0.2) posiada wiele różnych, ograniczonych na $\mathbb{R}$ rozwiązań dla każdej ciągłej i ograniczonej na $\mathbb{R}$ funkcji $f(t)$.*

Swoją analogię ma tutaj pojęcie funkcji Greena-Samojlenki.

Definicja 2.1.2. *Jeżeli istnieje $n \times n$-wymiarowa macierz $C(\tau) \in C^0(\mathbb{R})$ taka, że dla funkcji postaci:*

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \Omega_\tau^t C(\tau), & \tau \leqslant t \\ \Omega_\tau^t \left[C(\tau) - I_n\right] & \tau > t, \end{cases} \tag{2.1.0.3}$$

spełnione jest oszacowanie:

$$\|G(t,\tau)\| \leqslant K \cdot e^{-\gamma|t-\tau|},$$

gdzie K i γ są pewnymi stałymi dodatnimi oraz Ω_τ^t oznacza macierz podstawową układu (2.1.0.1) unormowaną w punkcie $t = \tau$, to funkcję (2.1.0.3) nazywamy funkcją Greena zadania o ograniczonych rozwiązaniach układu (2.1.0.1).

W przypadku istnienia dokładnie jednej funkcji Greena macierz $C(\tau)$ ma następującą własność:

$$C^2(\tau) \equiv C(\tau) \equiv \Omega_0^\tau C(0)\Omega_\tau^0.$$

Istnienie funkcji Greena dla układu (2.1.0.1) pozwala stwierdzić, że układ niejednorodny (2.1.0.2) posiada ograniczone na $\mathbb{R}$ rozwiązanie przy każdej ciągłej na całej osi $\mathbb{R}$ funkcji $f(t)$. Rozwiązanie to można zapisać w postaci całkowej:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau) f(\tau) d\tau.$$

Uwaga 2.1.1. *Istnienie dokładnie jednej funkcji Greena (2.1.0.3) jest równoważne temu, że układ jednorodny (2.1.0.1) jest regularny.*

Podobnie jak w przypadku liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie, tak i tutaj główną metodą badania regularności układów (2.1.0.1) jest wykorzystanie funkcji w postaci formy kwadratowej, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (2.1.0.1) jest dodatnio określona. Mianowicie jeżeli istnieje forma kwadratowa:

$$V = \langle S(t)x, x \rangle \,,$$

z symetryczną macierzą współczynników $S(t) \in C^1(\mathbb{R})$, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (2.1.0.1) spełnia nierówność:

$$\dot{V} = \left\langle \left[\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t) \right] x, x \right\rangle \geqslant \|x\|^2,$$

oraz dodatkowo spełniony jest warunek:

$$\det S(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wówczas układ (2.1.0.1) będzie regularny. Podobnie jak wcześniej razem z układem (2.1.0.1) rozpatrywać będziemy układ do niego sprzężony postaci:

$$\dot{y} = -A^T(t)y. \tag{2.1.0.4}$$

Pomiędzy układami (2.1.0.1) oraz (2.1.0.4) zachodzą podobne relacje jak poprzednio, tzn. jeżeli układ (2.1.0.4) jest regularny, to także układ (2.1.0.1) jest regularny. Analogicznie sprawa ma się z badaniem słabej regularności układu (2.1.0.1). Jeżeli dla układu sprzężonego istnieje forma kwadratowa:

$$W = \left\langle \overline{S}(t)y, y \right\rangle \,,$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego jest dodatnio określona:

$$\dot{W} = \left\langle \left[\dot{\overline{S}}(t) - \overline{S}(t)A^T(t) - A(t)\overline{S}(t) \right] y, y \right\rangle \geqslant \|y\|^2,$$

wówczas układ (2.1.0.1) będzie słabo regularny. Jeżeli dodatkowo:

$$\det \overline{S}(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

to układ (2.1.0.1) będzie regularny. W przypadku gdy $\det \overline{S}(t_0) = 0$, dla pewnego $t_0 \in \mathbb{R}$, wówczas układ (2.1.0.1) będzie ostro-słabo regularny.

Fakt 2.1.1. *Układ (2.1.0.1) w którym macierz współczynników jest macierzą stałą $A(t) \equiv A$ jest regularny na $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy części rzeczywiste wartości własnych λ_i dla*

$i = 1, 2, \ldots, n$, *macierzy* A *są różne od zera, tzn.:*

$$\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0.$$

W podobny sposób przedstawia się sytuacja gdy w układzie (2.1.0.1) dokonujemy zamiany zmiennych:

$$x = L(t)y, \tag{2.1.0.5}$$

otrzymując układ postaci:

$$\dot{y} = B(t)y, \tag{2.1.0.6}$$

gdzie, $B(t) = L^{-1}(t)\left[A(t)L(t) - \dot{L}(t)\right]$. Macierz $L(t)$ występującą w (2.1.0.5) nazywamy także macierzą Lapunowa. Jest to macierz kwadratowa, niezdegenerowana, różniczkowalna w sposób ciągły oraz ograniczona na całej osi $\mathbb{R}$ wraz z macierzami $L^{-1}(t)$ oraz $\frac{d}{dt}L(t)$. Relacje pomiędzy funkcją Greena $G(t,\tau)$ układu (2.1.0.1) a funkcją Greena $\overline{G}(t,\tau)$ układu (2.1.0.6) przedstawia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.1. *([23]). Jeżeli układ (2.1.0.1) posiada jedyną funkcję Greena* $G(t,\tau)$*, to także układ (2.1.0.6) posiada jedyną funkcję Greena* $\overline{G}(t,\tau)$ *oraz zachodzi między nimi tożsamość:*

$$G(t,\tau) = L(t)\overline{G}(t,\tau)L^{-1}(\tau).$$

Jeżeli układ (2.1.0.1) posiada nieskończenie wiele różnych funkcji Greena $G(t,\tau)$*, to także układ (2.1.0.6) posiada nieskończenie wiele różnych funkcji Greena* $\overline{G}(t,\tau)$*.*

Definicja 2.1.3. *Układ (2.1.0.1) nazywamy dychotomicznym (dychotomiczno-wykładniczym) na całej osi* $\mathbb{R}$*, jeżeli przestrzeń* $\mathbb{R}^n$ *może być przedstawiona w postaci sumy prostej takich dwóch podprzestrzeni* E^+, E^-*, że dla wszystkich rozwiązań układu (2.1.0.1) z warunkami początkowymi:*

$$x^+(0) \in E^+ \quad \textit{oraz} \quad x^-(0) \in E^-,$$

spełnione są nierówności:

$$\|\Omega_0^t(A)x^+\| \leqslant K\|\Omega_0^\tau(A)x^+\|e^{-\gamma(t-\tau)} \quad \textit{dla} \quad \tau \leqslant t,$$

oraz

$$\|\Omega_0^t(A)x^-\| \leqslant K\|\Omega_0^\tau(A)x^-\|e^{\gamma(t-\tau)} \quad \textit{dla} \quad \tau \geqslant t,$$

gdzie K, γ *to dowolne stałe dodatnie,* $\Omega_0^t(A)$ *to macierz fundamentalna układu (2.1.0.1) unormowana w punkcie* $t = 0$ *oraz* $t, \tau \in \mathbb{R}$*.*

Powyższa definicja jest ściśle powiązana z pojęciem regularności układu (2.1.0.1) poniższym twierdzeniem.

Twierdzenie 2.1.2. *([23]). Układ (2.1.0.1) jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy jest dychotomiczny na całej osi* $\mathbb{R}$*.*

Przykład 2.1.1. *Zbadajmy regularność układu równań różniczkowych postaci:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-3+\cos(et))\,x_1 + \ln(1+\operatorname{arctg}^2 t)x_2, \\ \dot{x}_2 = \ln(1+\operatorname{arctg}^2 t)x_1 + (5+4\sin(et))\,x_2. \end{cases} \tag{2.1.0.7}$$

W tym przypadku skorzystamy z funkcji Lapunowa w postaci następującej formy kwadratowej:

$$V = -x_1^2 + x_2^2. \tag{2.1.0.8}$$

Pochodna (2.1.0.8) wzdłuż rozwiązań układu (2.1.0.7) ma postać:

$$\dot{V} = -2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = (6-2\cos(et))\,x_1^2 + (10+8\sin(et))\,x_2^2 \geqslant x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2.$$

Oznacza to, że układ (2.1.0.7) jest regularny.

Przykład 2.1.2. *Niech dane będzie równanie różniczkowe:*

$$\dot{x} = -\tanh t \cdot x, \tag{2.1.0.9}$$

Dla powyższego równania zapiszmy równanie sprzężone:

$$\dot{y} = \tanh t \cdot y, \tag{2.1.0.10}$$

i rozpatrzmy funkcję postaci:

$$W = \tanh t \cdot y^2.$$

Obliczając jej pochodną wzdłuż rozwiązań równania sprzężonego (2.1.0.10) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &\dot{W} = \tfrac{1}{\cosh^2 t}\cdot y^2 + 2\tanh t \cdot y \cdot \dot{y} = y^2\left(\tfrac{1}{\cosh^2 t} + 2\tanh^2 t\right) = \\ &= y^2\left(1+\tanh^2 t\right) \geqslant y^2. \end{aligned}$$

Pochodna jest dodatnio określona oraz $\tanh t = 0$ *dla* $t = 0$*. Zatem układ (2.1.0.9) jest ostro-słabo regularny.*

Przykład 2.1.3. *Dokonajmy analizy regularności układu równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (p\cos 2t)x_1 + (p\sin 2t - 1)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = (p\sin 2t + 1)x_1 - (p\cos 2t)x_2, \end{cases} \tag{2.1.0.11}$$

gdzie $p \neq 0$ to parametr rzeczywisty. Łatwo sprawdzić, że pochodna formy kwadratowej:

$$V = (\cos 2t)x_1^2 + (2\sin 2t)x_1x_2 - (\cos 2t)x_2^2,$$

wzdłuż rozwiązań (2.1.0.11) spełnia równość:

$$\dot{V} = 2p(x_1^2 + x_2^2).$$

Wynika stąd, że układ (2.1.0.11) jest regularny. Spróbujmy teraz sprawdzić regularność układu w inny sposób. W tym celu dokonajmy w (2.1.0.11) zamiany zmiennych:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Otrzymamy wówczas układ równań różniczkowych o stałych współczynnikach:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = py_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -py_2, \end{cases} \tag{2.1.0.12}$$

Układ (2.1.0.12) posiada dokładnie jedną funkcję Greena. Dla $p > 0$ ma ona postać:

$$\overline{G}(t,\tau) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{p(\tau-t)} \end{pmatrix}, & \tau \leqslant t, \\ -\begin{pmatrix} e^{p(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t < \tau, \end{cases}$$

oraz dla $p < 0$:

$$\overline{G}(t,\tau) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{p(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau \leqslant t, \\ -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{p(\tau-t)} \end{pmatrix}, & t < \tau. \end{cases}$$

Wiadomo, że funkcja Greena $G(t,\tau)$ układu (2.1.0.11) jest związana z funkcją Greena $\overline{G}(t,\tau)$ układu (2.1.0.12) zależnością:

$$G(t,\tau) = L(t)\overline{G}(t,\tau)L^{-1}(\tau),$$

gdzie:

$$L(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

Stąd otrzymujemy wzór funkcji Greena dla układu (2.1.0.11):

dla $p > 0$*:*

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sin t \sin \tau & -\sin t \cos \tau \\ -\cos t \sin \tau & \cos t \cos \tau \end{pmatrix} e^{p(\tau - t)}, & \tau \leqslant t, \\ -\begin{pmatrix} \cos t \cos \tau & \cos t \sin \tau \\ \sin t \cos \tau & \sin t \sin \tau \end{pmatrix} e^{p(t-\tau)}, & t < \tau, \end{cases}$$

dla $p < 0$*:*

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos t \cos \tau & \cos t \sin \tau \\ \sin t \cos \tau & \sin t \sin \tau \end{pmatrix} e^{p(t-\tau)}, & \tau \leqslant t, \\ \begin{pmatrix} -\sin t \sin \tau & \sin t \cos \tau \\ \cos t \sin \tau & -\cos t \cos \tau \end{pmatrix} e^{p(\tau - t)}, & t < \tau. \end{cases}$$

Przykład 2.1.4. *Niech dany jest układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \sin^2 t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + x_2 \cos^4 t. \end{cases} \tag{2.1.0.13}$$

Rozpatrzmy układ niejednorodny postaci:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \sin^2 t + u_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + x_2 \cos^4 t + u_2(t), \end{cases} \tag{2.1.0.14}$$

gdzie $u_1(t)$ *i* $u_2(t)$ *to funkcje ciągłe i ograniczone na całej osi rzeczywistej* $\mathbb{R}$*. Pokażemy, że przy dowolnych ustalonych funkcjach* $u_1(t)$*,* $u_2(t)$ *układ (2.1.0.14) posiada dokładnie jedno ograniczone na* $\mathbb{R}$ *rozwiązanie. W tym celu rozpatrzmy pierwsze równanie:*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \sin^2 t + u_1(t). \tag{2.1.0.15}$$

Korzystając z tożsamości:

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2},$$

równanie (2.1.0.15) możemy zapisać w postaci:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2} x_1 (1 - \cos 2t) + u_1(t). \tag{2.1.0.16}$$

Rozwiązanie ogólne (2.1.0.16) zapisujemy następująco:

$$x_1(t) = e^{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t} \left(C + \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}\sin 2\tau} u_1(\tau) d\tau \right), \tag{2.1.0.17}$$

gdzie C to dowolna stała rzeczywista. Pośród wszystkich C istnieje tylko jedno:

$$C = c^* = -\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}\sin 2\tau} u_1(\tau) d\tau, \tag{2.1.0.18}$$

przy którym rozwiązanie (2.1.0.17) będzie ograniczone na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$. Podstawiając stałą (2.1.0.18) do rozwiązania (2.1.0.17) otrzymujemy ograniczone rozwiązanie postaci:

$$x_1^*(t) = -\int_t^\infty e^{\frac{1}{2}(t-\tau) + \frac{1}{4}(\sin 2t - \sin 2\tau)} u_1(\tau) d\tau. \tag{2.1.0.19}$$

Rozpatrzmy teraz drugie równanie układu (2.1.0.14):

$$\frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + x_2 \cos^4 t + u_2(t).$$

Podstawiając w miejsce x_1 funkcję (2.1.0.19) mamy:

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cos^4 t + u_2(t) + 4x_1^*(t). \tag{2.1.0.20}$$

Dokonajmy następującego przekształcenia:

$$\cos^2 t = \tfrac{1+\cos 2t}{2} \to \cos^4 t = \tfrac{1}{4}(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) = \tfrac{1}{4}(1 + 2\cos 2t + \tfrac{1+\cos 4t}{2}) =$$
$$= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos 2t + \tfrac{1}{8}\cos 4t.$$

Wprowadzając teraz oznaczenia:

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{2}\cos 2t + \tfrac{1}{8}\cos 4t,$$
$$\psi(t) = \int_0^t (\tfrac{1}{2}\cos 2\tau + \tfrac{1}{8}\cos 4\tau) d\tau = \tfrac{1}{4}\sin 2t + \tfrac{1}{32}\sin 4t,$$
$$f(t) = u_2(t) + 4x_1^*(t),$$

równanie (2.1.0.20) przyjmuje postać:

$$\frac{dx_2}{dt} = \left(\frac{3}{8} + \varphi(t)\right) x_2 + f(t). \tag{2.1.0.21}$$

Rozwiązanie ogólne równania (2.1.0.21) jest następujące:

$$x_2(t) = e^{\frac{3}{8}t + \psi(t)} \left(C + \int_0^t e^{-\frac{3}{8}\tau - \psi(\tau)} f(\tau) d\tau \right). \tag{2.1.0.22}$$

Wśród wszystkich stałych C istnieje dokładnie jedna stała:

$$C = c^* = -\int\limits_0^\infty e^{-\frac{3}{8}\tau-\psi(\tau)} f(\tau) d\tau, \tag{2.1.0.23}$$

przy której rozwiązanie (2.1.0.22) będzie ograniczone na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$. Podstawiając teraz stałą (2.1.0.23) do rozwiązania ogólnego (2.1.0.22) otrzymujemy ograniczone rozwiązanie:

$$x_2^*(t) = -\int\limits_t^\infty e^{\frac{3}{8}(t-\tau)+\psi(t)-\psi(\tau)} d\tau.$$

Wynika stąd, że układ (2.1.0.14) przy każdej ustalonej funkcji $(u_1(t), u_2(t))$ posiada dokładnie jedno ograniczone na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$ rozwiązanie $(x_1^*(t), x_2^*(t))$. Oznacza to, że układ (2.1.0.13) jest regularny.

Przykład 2.1.5. *Zbadajmy regularność układu równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \sin t + x_2 \cos^2 t, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \sin t. \end{cases} \tag{2.1.0.24}$$

Rozpatrzmy formę kwadratową:

$$V = px_1x_2 - x_2^2 \sin t, \tag{2.1.0.25}$$

i obliczmy jej pochodną wzdłuż rozwiązań układu (2.1.0.24). Dostajemy wówczas:

$$\dot{V} = p\dot{x}_1x_2 + px_1\dot{x}_2 - 2x_1\dot{x}_2 \sin t - x_2^2 \cos t = p(x_1 \sin t + x_2 \cos^2 t)x_2 + px_1(x_1 - x_2 \sin t) +$$
$$-2x_2(x_1 - x_2 \sin t) \sin t - x_2^2 \cos t = px_1^2 + px_2^2 \cos^2 t - 2x_1x_2 \sin t + 2x_2^2 \sin^2 t - x_2^2 \cos t.$$

Uwzględniając nierówności:

$$2x_1x_2 \sin t \geqslant -x_1^2 - x_2^2 \sin^2 t,$$
$$-x_2^2 \cos t \geqslant -x_2^2 |\cos t|,$$

otrzymujemy:

$$\dot{V} \geqslant (p-1)x_1^2 + (p\cos^2 t + \sin^2 t - |\cos t|)x_2^2.$$

Wynika stąd, że aby pochodna $\dot{V}$ była dodatnio określona spełnione powinny być następujące dwie nierówności:

$$\begin{cases} p - 1 > 0, \\ p\cos^2 t + \sin^2 t - |\cos t| > 0. \end{cases}$$

Wybierając $p = 2$ otrzymujemy:

$$2\cos^2 t + \sin^2 t - |\cos t| = 1 + \cos^2 t - |\cos t| = \left(|\cos t| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Widzimy więc, że pochodna wzdłuż rozwiązań układu (2.1.0.24) niezdegenerowanej formy kwadratowej (2.1.0.25) jest dodatnio określona:

$$\dot{V} \geqslant x_1^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \geqslant \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = \frac{3}{4}(x_1^2 + x_2^2).$$

Oznacza to, że układ (2.1.0.24) jest regularny.

2.2. Metody dołączenia pewnych klas układów słabo regularnych do układów regularnych

W tym podrozdziale zaprezentowane zostaną wyniki, jakie udało się uzyskać podczas badań nad dołączeniem układów słabo regularnych do układów regularnych. Okazuje się, że każdy słabo regularny na $\mathbb{R}$ układ równań różniczkowych (2.1.0.1) można doprowadzić do układu regularnego postaci:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ \dot{y} = x - A^T(t)y. \end{cases} \tag{2.2.0.1}$$

Jeżeli obliczymy pochodną formy kwadratowej:

$$\lambda \langle x, y \rangle + \left\langle \overline{S}(t)y, y \right\rangle, \tag{2.2.0.2}$$

wzdłuż rozwiązań układu (2.2.0.1) okaże się, że będzie ona dodatnio określona przy dostatecznie dużych wartościach parametru λ (przy $\lambda > \|\overline{S}\|_0^2$). Proces taki nazywamy dołączeniem słabo regularnego układu równań różniczkowych do układu regularnego. Warto zauważyć, że macierz formy kwadratowej (2.2.0.2) jest macierzą nieosobliwa postaci:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{2}I_n \\ \frac{\lambda}{2}I_n & \overline{S}(t) \end{pmatrix}.$$

Przeprowadzone badania związane z uogólnieniem powyższych wyników dały ciekawe rezultaty. Zacznijmy od układu równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2, \end{cases} \tag{2.2.0.3}$$

gdzie $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, macierze kwadratowe $A_{ij}(t) \in C^0(\mathbb{R})$ dla $i, j \in \{1, 2\}$. Niech najpierw $A_{11}(t) = A(t)$, $A_{22}(t) = -A^T(t)$, $A_{12}(t) = 0$, oraz $x_1 = x, x_2 = y$. Wówczas układ (2.2.0.3) przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ \dot{y} = A_{21}(t)x - A^T(t)y. \end{cases} \tag{2.2.0.4}$$

Załóżmy dalej, że ciągła i ograniczona na $\mathbb{R}$ macierz kwadratowa $A_{21}(t)$ spełnia nierówność:

$$\langle A_{21}(t)x, x\rangle \geqslant \alpha\|x\|^2, \quad \alpha = const > 0.$$

Przy tym założeniu układ (2.2.0.4) będzie regularny, ponieważ można dobrać formę kwadratową postaci (2.2.0.2), której pochodna wzdłuż jego rozwiązań będzie dodatnio określona przy dostatecznie dużych wartościach parametru λ. Przejdźmy teraz do sytuacji ogólnej układu (2.2.0.3) zakładając, że dla:

$$\dot{x}_2 = A_{22}(t)x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{2.2.0.5}$$

istnieje forma kwadratowa:

$$\langle S_{22}(t)x_2, x_2\rangle, \quad S_{22}(t) \in C^1(\mathbb{R}),$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań (2.2.0.5) jest dodatnio określona:

$$\left\langle \left[\dot{S}_{22}(t) + S_{22}(t)A(t) + A^T(t)S_{22}(t)\right] x_2, x_2 \right\rangle \geqslant \|x_2\|^2. \tag{2.2.0.6}$$

Niech także dla całego układu (2.2.0.3) istnieje forma kwadratowa:

$$\langle S(t)x, x\rangle,$$

gdzie $S(t) \in C^1(\mathbb{R})$, której pochodna wzdłuż rozwiązań (2.2.0.3) spełnia nierówność:

$$\left\langle \left[\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t)\right] x, x \right\rangle \geqslant ||x_1||^2. \tag{2.2.0.7}$$

Przy takich założeniach biorąc formę kwadratową:

$$V = \lambda \langle S(t)x, x\rangle + \langle S_{22}(t)x_2, x_2\rangle,$$

okaże się, że dla dostatecznie dużych wartości parametru $\lambda > 0$, jej pochodna wzdłuż rozwiązań układu (2.2.0.3) będzie dodatnio określona. Wprowadźmy teraz oznaczenia:

$$S_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}, \tag{2.2.0.8}$$

wówczas nierówności (2.2.0.6),(2.2.0.7) można zapisać w postaci:

$$\left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right] C_2x, C_2x \right\rangle \geqslant \|C_2x\|^2, \tag{2.2.0.9}$$

$$\left\langle \left[\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t)\right] \left(C_1 + C_2\right), \left(C_1 + C_2\right) \right\rangle \geqslant \|C_1x\|^2. \tag{2.2.0.10}$$

Niech teraz w nierównościach (2.2.0.9) i (2.2.0.10) macierze S_2, C_1, C_2 nie mają postaci (2.2.0.8), ale dopuśćmy, że macierze $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$ mogą być macierzami zmiennymi. Przy takich założeniach ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.1. *[26] Niech istnieją $n \times n$-wymiarowe macierze symetryczne $S_1(t)$, $S_2(t) \in C^1(\mathbb{R})$, dla których zachodzą nierówności:*

$$\left\langle \left[\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^T(t)S_1(t)\right] \left(C_1(t) + C_2(t)\right) x, \left(C_1(t) + C_2(t)\right) x \right\rangle \geqslant \|C_1(t)x\|^2, \tag{2.2.0.11}$$

$$\left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right] C_2(t)x, C_2(t)x \right\rangle \geqslant \|C_2(t)x\|^2, \tag{2.2.0.12}$$

z pewnymi $n \times n$-wymiarowymi macierzami $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$, których suma jest macierzą niezdegenerowaną, tzn.:

$$\det\left[C_1(t) + C_2(t)\right] \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wówczas pochodna formy kwadratowej:

$$V_\lambda = \lambda \left\langle S_1(t)x, x \right\rangle + \left\langle S_2(t)x, x \right\rangle, \tag{2.2.0.13}$$

wzdłuż rozwiązań układu (2.2.0.3) przy dostatecznie dużych wartościach parametru λ będzie dodatnio określona.

Dowód. Zapiszmy pochodną formy kwadratowej (2.2.0.13) wzdłuż rozwiązań (2.2.0.3):

$$\dot{V}_\lambda = \lambda \left\langle \left[\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^T(t)S_1(t)\right] x, x \right\rangle + \\ + \left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right] x, x \right\rangle = \lambda N_1 + N_2,$$

gdzie:

$$N_1 = \left\langle \left[\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^T(t)S_1(t)\right] x, x \right\rangle = \left\langle \left[\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + \right.\right. \\ \left.\left. + \ A^T(t)S_1(t)\right] \left(C_1(t) + C_2(t)\right) C^{-1}(t)x, \left(C_1(t) + C_2(t)\right) C^{-1}(t)x \right\rangle.$$

Oznaczając $C^{-1}(t)x = y$, otrzymujemy na podstawie (2.2.0.11) nierówność:

$$N_1 = \left\langle \left[\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^T(t)S_1(t)\right](C_1(t) + C_2(t))\, y, (C_1(t) + C_2(t))\, y \right\rangle \geqslant \\ \geqslant \|C_1(t)y\|^2.$$

Dla drugiego składnika sumy mamy:

$$N_2 = \left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right](C_1(t) + C_2(t))\, C^{-1}(t)x, \\ (C_1(t) + C_2(t))\, C^{-1}(t)x \right\rangle = \left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right](C_1(t) + C_2(t))\, y, \\ (C_1(t) + C_2(t))\, y \right\rangle = \left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right] C_1(t)y, C_1(t)y \right\rangle \\ +2\left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right] C_1(t)y, C_2(t)y \right\rangle + \\ \left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right] C_2(t)y, C_2(t)y \right\rangle \geqslant \\ \geqslant -L||C_1(t)y||^2 - 2L||C_1(t)y||||C_2(t)y|| + ||C_2(t)y||^2.$$

Na podstawie powyższych nierówności dostajemy:

$$\dot{V}_\lambda \geqslant (\lambda - L)\|C_1(t)y\|^2 - 2L\|C_1(t)y\|\|C_2(t)y\| + \|C_2(t)y\|^2 \geqslant \tfrac{\lambda - L - L^2}{\lambda - L + 1} \\ (\|C_1(t)y\|^2 + \|C_2(t)y\|^2) \geqslant \tfrac{\lambda - L - L^2}{2(\lambda - L + 1)}\| (C_1(t) + C_2(t))\, y\|^2 = \\ = \tfrac{\lambda - L - L^2}{2(\lambda - L + 1)}\|x\|^2, \quad \lambda - L - L^2 > 0.$$

Stałą L wyznaczamy z nierówności:

$$\max_{\|x\|=1} \left| \left\langle \left[\dot{S}_j(t) + S_j(t)A(t) + A^T(t)S_j(t)\right] x, x \right\rangle \right| \leqslant L, \quad j = 1, 2.$$

□

Uwaga 2.2.1. *[26] Nie trzeba zakładać, by macierze $C_1(t), C_2(t)$ oraz $(C_1(t) + C_2(t))^{-1}$ były ograniczone na $\mathbb{R}$.*

Rozważmy teraz bardziej rozbudowaną postać układu (2.1.0.1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2 + A_{13}(t)x_3, \\ \dot{x}_2 = A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2 + A_{23}(t)x_3, \\ \dot{x}_3 = A_{31}(t)x_1 + A_{23}(t)x_2 + A_{33}(t)x_3, \end{cases} \tag{2.2.0.14}$$

gdzie $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2, 3$ oraz $A_{ij}(t)$ dla $i, j \in \{1, 2, 3\}$ to macierze kwadratowe, których elementami są funkcje ciągłe i ograniczone na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$. Postępując w analogiczny sposób jak wcześniej wybieramy układ postaci:

$$x_3 = A_{33}(t)x_3, \tag{2.2.0.15}$$

i zakładamy, że istnieje forma kwadratowa:

$$V_3 = \langle S_{33}(t)x_3, x_3\rangle, \quad S_{33}(t) \in C^1(\mathbb{R}),$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań (2.2.0.15) jest dodatnio określona:

$$\dot{V}_3 = \left\langle \left[\dot{S}_{33}(t) + S_{33}(t)A_{33}(t) + A_{33}^T(t)S_{33}(t)\right] x_3, x_3\right\rangle \geqslant \|x_3\|^3. \tag{2.2.0.16}$$

Następnie wydzielamy układ:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_{22}(t)x_2 + A_{23}(t)x_3, \\ \dot{x}_3 = A_{32}(t)x_2 + A_{33}(t)x_3, \end{cases} \tag{2.2.0.17}$$

oraz dla przejrzystszego zapisu wprowadzamy oznaczenia:

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} A_{22}(t) & A_{23}(t) \\ A_{32}(t) & A_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Zakładamy, że istnieje forma kwadratowa:

$$\tilde{V} = \left\langle \tilde{S}(t)\tilde{x}, \tilde{x}\right\rangle, \quad \tilde{S}(t) \in C^1(\mathbb{R}),$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań (2.2.0.17) spełnia nierówność:

$$\dot{\tilde{V}} = \left\langle \left[\dot{\tilde{S}}(t) + A(t)\tilde{S}(t) + A^T(t)\tilde{S}(t)\right] \tilde{x}, \tilde{x}\right\rangle \geqslant \|x_2\|^2. \tag{2.2.0.18}$$

Na koniec, niech dla całego układu (2.2.0.14) istnieje forma kwadratowa:

$$V = \langle S_1(t)x, x\rangle, \quad S_1(t) \in C^1(\mathbb{R}),$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań (2.2.0.14) spełnia warunek:

$$\left\langle \left[\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^T(t)S_1(t)\right] x, x\right\rangle \geqslant \|x_1\|^2. \tag{2.2.0.19}$$

Okazuje się, że przy spełnionych nierównościach (2.2.0.16), (2.2.0.18), (2.2.0.19) pochodna formy kwadratowej:

$$V_\lambda = \lambda_1 \langle S_1(t)x, x\rangle + \lambda_2 \left\langle \tilde{S}(t)\tilde{x}, \tilde{x}\right\rangle + \lambda_3 \langle S_{33}(t)x_3, x_3\rangle,$$

wzdłuż rozwiązań układu (2.2.0.14) przy odpowiednim doborze dodatnich parametrów

λ_1, λ_2, λ_3 będzie dodatnio określona:

$$\dot{V}_\lambda \geqslant \|x\|^2.$$

Kładąc teraz:

$$\begin{aligned}
&C_3 = diag\,\{I_{n_1}, 0, 0\}\,, \quad C_2 = diag\,\{0, I_{n_2}, 0\}\,, \quad C_3 = diag\,\{0, 0, I_{n_3}\}\,,\\
&S_2(t) = diag\left\{0, \tilde{S}(t)\right\}, \quad S_3(t) = diag\,\{0, 0, S_{33}(t)\}\,,
\end{aligned}$$

nierówności (2.2.0.16),(2.2.0.18),(2.2.0.19) możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^T(t)S_1(t)\right](C_1 + C_2 + C_3)\,x, (C_1 + C_2 + C_3)\,x\right\rangle \geqslant \|C_1 x\|^2,\\
&\left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right](C_2 + C_3)\,x, (C_2 + C_3)\,x\right\rangle \geqslant \|C_2\|^2,\\
&\left\langle \left[\dot{S}_3(t) + S_3(t)A(t) + A^T(t)S_3(t)\right] C_3 x, C_3 x\right\rangle \geqslant \|C_3 x\|^2.
\end{aligned}$$

Ma miejsce twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.2. *[26] Niech istnieją $n \times n$-wymiarowe macierze symetryczne $S_j(t) \in C^1(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, 3$ różniczkowalne w sposób ciągły i ograniczone na $\mathbb{R}$, dla których zachodzą nierówności:*

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^T(t)S_1(t)\right](C_1(t) + C_2(t) + C_3(t))\,x,\right.\\
&\left.(C_1(t) + C_2(t) + C_3(t))\,x\right\rangle \geqslant \|C_1(t)x\|^2,\\
&\left\langle \left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right](C_2(t) + C_3(t))\,x,\right.\\
&\left.(C_2(t) + C_3(t))\,x\right\rangle \geqslant \|C_2(t)x\|^2,\\
&\left\langle \left[\dot{S}_3(t) + S_3(t)A(t) + A^T(t)S_3(t)\right] C_3(t)x, C_3(t)x\right\rangle \geqslant \|C_3(t)x\|^2,
\end{aligned} \tag{2.2.0.20}$$

z pewnymi $n \times n$-wymiarowymi macierzami $C_j = C_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, których suma jest macierzą niezdegenerowaną, tzn. $\det\left[C_1(t) + C_2(t) + C_3(t)\right] \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *wówczas pochodna formy kwadratowej:*

$$V_\lambda = \lambda_1 \langle S_1(t)x, x\rangle + \lambda_2 \langle S_2(t)x, x\rangle + \lambda_3 \langle S_3(t)x, x\rangle\,,$$

wzdłuż rozwiązań układu (2.2.0.14) będzie dodatnio określona dla dostatecznie dużych wartościach parametrów λ_j, $j = 1, 2, 3$.

Dowód. Rozpatrzmy sumę dwóch symetrycznych macierzy z dodatnim parametrem $\lambda > 0$:

$$S(t;\lambda) = \lambda S_2(t) + S_3(t). \tag{2.2.0.21}$$

Pokażemy, że przy dostatecznie dużych wartościach $\lambda > 0$ spełniona będzie nierówność:

$$\begin{aligned}&\left\langle \left[\dot{S}(t;\lambda) + S(t;\lambda)A(t) + A^T(t)S(t;\lambda)\right](C_2(t)+C_3(t))\,x, (C_2(t)+C_3(t))\,x\right\rangle \geqslant \\ &\geqslant \gamma(\lambda)\|C_2(t)+C_3(t)\|^2, \quad \gamma(\lambda) > 0.\end{aligned} \tag{2.2.0.22}$$

Biorąc pod uwagę liniowość macierzy (2.2.0.21) względem parametru λ, lewą stronę (2.2.0.22) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}&\lambda\left\langle\left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right](C_2(t)+C_3(t))\,x, (C_2(t)+C_3(t))\,x\right\rangle + \\ &+\left\langle\left[\dot{S}_3(t) + S_3(t)A(t) + A^T(t)S_3(t)\right](C_2(t)+C_3(t))\,x, (C_2(t)+C_3(t))\,x\right\rangle \geqslant \\ &\geqslant \lambda||C_2(t)x||^2 + \left\langle\left[\dot{S}_3(t) + S_3(t)A(t) + A^T(t)S_3(t)\right]C_2(t)x, C_2(t)x\right\rangle + \\ &+2\left\langle\left[\dot{S}_3(t) + S_3(t)A(t) + A^T(t)S_3(t)\right]C_2(t)x, C_3(t)x\right\rangle + \\ &+\left\langle\left[\dot{S}_3(t) + S_3(t)A(t) + A^T(t)S_3(t)\right]C_3(t)x, C_3(t)x\right\rangle \geqslant (\lambda - L)\,\|C_2(t)x\|^2 + \\ &-2L\|C_2(t)x\|\|C_3(t)x\| + \|C_3(t)x\|^2 \geqslant \\ &\geqslant \tfrac{\lambda-L-L^2}{2(\lambda-L+1)}\|\left[C_2(t)+C_3(t)\right]x\|^2, \quad \lambda - L - L^2 > 0.\end{aligned}$$

gdzie stałą L wyznaczamy z warunków:

$$\max_{\|x\|=1}\left|\left\langle\left[\dot{S}_j(t) + S_j(t)A(t) + A^T(t)S_j(t)\right]x, x\right\rangle\right| \leqslant L, \quad j = 1, 2, 3.$$

Oznaczając:

$$C_1(t) + C_2(t) + C_3(t) = M_1(t), \quad C_2(t) + C_3(t) = M_2(t), \quad C_3(t) = M_3(t),$$

nierówności (2.2.0.20) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}&\left\langle\left[\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^T(t)S_1(t)\right]M_1(t)x, M_1(t)x\right\rangle \geqslant \|\left(M_1(t) - M_2(t)\right)x\|^2, \\ &\left\langle\left[\dot{S}_2(t) + S_2(t)A(t) + A^T(t)S_2(t)\right]M_2(t)x, M_2(t)x\right\rangle \geqslant \|\left(M_2(t) - M_3(t)\right)x\|^2, \\ &\left\langle\left[\dot{S}_3(t) + S_3(t)A(t) + A^T(t)S_3(t)\right]M_3(t)x, M_3(t)x\right\rangle \geqslant \|M_3(t)x\|^2.\end{aligned}$$

□

W przypadku ogólnym ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.3. *[26] Niech istnieją $n \times n$-wymiarowe macierze symetryczne $S_j(t)$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$ różniczkowalne w sposób ciągły i ograniczone na $\mathbb{R}$ dla których zachodzą* *nierówności:*

$$\begin{aligned}&\left\langle\left[\dot S_j(t)+S_j(t)A(t)+A^T(t)S_j(t)\right]M_j(t)x,M_j(t)x\right\rangle\geqslant\|\left(M_j(t)-M_{j+1}(t)\right)x\|^2,\\&j=1,2,\dots k-1,\\&\left\langle\left[\dot S_k(t)+S_k(t)A(t)+A^T(t)S_k(t)\right]M_k(t)x,M_k(t)x\right\rangle\geqslant\|M_k(t)x\|^2,\end{aligned}\tag{2.2.0.23}$$

z pewnymi $n\times n$-wymiarowymi macierzami $M_j(t)$, $\det M_1(t)\neq 0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Wówczas pochodna formy kwadratowej:

$$V_\lambda=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left\langle S_j(t)x,x\right\rangle,\tag{2.2.0.24}$$

wzdłuż rozwiązań układu (2.1.0.1) będzie dodatnio określona, przy dostatecznie dużych wartościach parametrów $\lambda_j>0$, $j=1,2,\dots,n$.

Dowód. Rozpatrzmy sumę macierzy z parametrem $\lambda_{k-1}>0$:

$$\lambda_{k-1}S_{k-1}(t)+S_k(t)=\tilde S(t).\tag{2.2.0.25}$$

Pokażemy, że przy odpowiednio dobranej wartości parametru λ_{k-1} spełniona będzie nierówność:

$$\left\langle\left[\dot{\tilde S}(t)+\tilde S(t)A(t)+A^T(t)\tilde S(t)\right]M_{k-1}(t)x,M_{k-1}(t)x\right\rangle\geqslant\mu(\lambda_{k-1})\cdot\|M_{k-1}(t)x\|^2,\tag{2.2.0.26}$$

gdzie:

$$\mu(\lambda_{k-1})=\frac{\lambda_{k-1}-L-L^2}{2\left(\lambda_{k-1}-L+1\right)},\quad\lambda_{k-1}>L+L^2,$$

a stałą L wyznacza się na podstawie warunków:

$$\|\dot S_i+S_i(t)A(t)+A^T(t)S_i(t)\|\leqslant L,\quad i=1,2,\dots,k.\tag{2.2.0.27}$$

Lewą stronę nierówności (2.2.0.26) zapiszmy podstawiając sumę (2.2.0.25):

$$\begin{aligned}&\lambda_{k-1}\left\langle\left[\dot S_{k-1}(t)+S_{k-1}(t)A(t)+A^T(t)S_{k-1}(t)\right]M_{k-1}(t)x,M_{k-1}(t)x\right\rangle+\\&\left\langle\left[\dot S_k(t)+S_k(t)A(t)+A^T(t)S_k(t)\right]\left(M_k(t)+\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)\right)x,\left(M_k(t)+\right.\right.\\&\left.\left.+\ \left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)\right)x\right\rangle.\end{aligned}\tag{2.2.0.28}$$

Pierwszy składnik szacujemy na podstawie nierówności:

$$\begin{aligned}&\lambda_{k-1}\left\langle\left[\dot S_{k-1}(t)+S_{k-1}(t)A(t)+A^T(t)S_{k-1}(t)\right]M_{k-1}(t)x,M_{k-1}(t)x\right\rangle\geqslant\\&\geqslant\|\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\|^2,\end{aligned}\tag{2.2.0.29}$$

przy dodatniej stałej λ_{k-1}. Dla drugiej części sumy (2.2.0.28) mamy:

$$\begin{aligned}&\left\langle\left[\dot{S}_k(t)+S_k(t)A(t)+A^T(t)S_k(t)\right]\left(M_k(t)+\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)\right)x,\right.\\&\left(M_k(t)+\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)\right)x\rangle=\left\langle\left[\dot{S}_k(t)+S_k(t)A(t)+A^T(t)S_k(t)\right]\right.\\&M_k(t)x,M_k(t)x\rangle+2\left\langle\left[\dot{S}_k(t)+S_k(t)A(t)+A^T(t)S_k(t)\right]M_k(t)x,\right.\\&\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\rangle+\left\langle\left[\dot{S}_k(t)+S_k(t)A(t)+A^T(t)S_k(t)\right]\right.\\&\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x,\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\rangle\,.\end{aligned}$$

Każdy z warunków szacowany jest w następujący sposób:

$$\begin{aligned}&2\left\langle\left[\dot{S}_k(t)+S_k(t)A(t)+A^T(t)S_k(t)\right]M_k(t)x,\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\right\rangle\geqslant\\&\geqslant-2L\|M_k(t)x\|\|\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\|,\end{aligned}\tag{2.2.0.30}$$

$$\begin{aligned}&2\left\langle\left[\dot{S}_k(t)+S_k(t)A(t)+A^T(t)S_k(t)\right]\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x,\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\right\rangle\geqslant\\&\geqslant-L\|\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\|^2.\end{aligned}\tag{2.2.0.31}$$

Uwzględniając nierówności (2.2.0.29)-(2.2.0.31) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\left\langle\left[\dot{\tilde{S}}(t)+\tilde{S}(t)A(t)+A^T(t)\tilde{S}(t)\right]M_{k-1}(t)x,M_{k-1}(t)x\right\rangle\geqslant\left(\lambda_{k-1}-L\right)\\&\|\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\|^2-2L\|M_k(t)x\|\|\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\|+\|M_k(t)x\|^2.\end{aligned}\tag{2.2.0.32}$$

Oznaczając:

$$\|\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\|=t_1,\quad \|M_k(t)x\|=t_2,$$

możemy zapisać formę kwadratową:

$$\Phi\left(t_1,t_2\right)=\left(\lambda_{k-1}-L\right)t_1^2-2Lt_1t_2+t_2^2,$$

która spełnia nierówność:

$$\Phi\left(t_1,t_2\right)\geqslant\frac{\lambda_{k-1}-L-L^2}{\lambda_{k-1}-L+1}\left(t_1^2+t_2^2\right),\quad \lambda_{k-1}>L+L^2.$$

Z tych oszacowań oraz z nierówności (2.2.0.32) dostajemy:

$$\begin{aligned}&\left\langle\left[\dot{\tilde{S}}(t)+\tilde{S}(t)A(t)+A^T(t)\tilde{S}(t)\right]M_{k-1}(t)x,M_{k-1}(t)x\right\rangle\geqslant\tfrac{\lambda_{k-1}-L-L^2}{\lambda_{k-1}-L+1}\\&(\|\left(M_{k-1}(t)-M_k(t)\right)x\|^2+\|M_k(t)x\|^2)\geqslant\tfrac{\lambda_{k-1}-L-L^2}{2(\lambda_{k-1}-L+1)}\|M_k(t)x\|^2=\\&=\mu(\lambda_{k-1})\|M_{k-1}(t)x\|^2,\end{aligned}$$

co potwierdza prawdziwość nierówności (2.2.0.26). Rozpatrzmy teraz następującą sumę macierzy:

$$\lambda_{k-2}S_{k-2}(t)+\lambda_{k-1}(t)+S_{k-1}(t)+S_k(t)=\lambda_{k-2}(t)+\tilde{S}(t)=\overline{S}(t).$$

Pokażemy, że dla odpowiednio dobranych wartości parametru λ_{k-2} spełniona jest nierówność:

$$\begin{gathered}\left\langle\left[\dot{\overline{S}}(t)+\overline{S}(t)A(t)+A^T(t)\overline{S}(t)\right]M_{k-2}(t)x,M_{k-2}(t)\right\rangle\geqslant\\ \geqslant\mu\left(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1}\right)\|M_{k-2}(t)x\|^2,\end{gathered}\tag{2.2.0.33}$$

gdzie:

$$\mu\left(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1}\right)=\frac{\left(\lambda_{k-2}-L\left(\lambda_{k-1}+1\right)\right)\mu(\lambda_{k-1})-L^2\left(\lambda_{k-1}+1\right)^2}{2\left(\lambda_{k-2}-L\left(\lambda_{k-1}+1\right)+\mu(\lambda_{k-1})\right)}>0.$$

Rozpisując lewą stronę nierówności (2.2.0.33) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\lambda_{k-2}\left\langle\left[\dot{S}_{k-2}(t)+S_{k-2}(t)A(t)+A^T(t)S_{k-2}(t)\right]M_{k-2}(t)x,M_{k-2}(t)x\right\rangle+\\&+\left\langle\left[\dot{\tilde{S}}(t)+\tilde{S}(t)A(t)+A^T(t)\tilde{S}(t)\right]M_{k-2}(t)x,M_{k-2}(t)x\right\rangle\geqslant\\&\geqslant\lambda_{k-2}\|\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\|^2+\left\langle\left[\dot{\tilde{S}}(t)+\tilde{S}(t)A(t)+A^T(t)\tilde{S}(t)\right]\right.\\&\left(M_{k-1}(t)+\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)\right)x,\left(M_{k-1}(t)+\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)\right)x\rangle=\\&=\lambda_{k-2}\|\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\|^2+\left\langle\left[\dot{\tilde{S}}(t)+\tilde{S}(t)A(t)+A^T(t)\tilde{S}(t)\right]\right.\\&M_{k-1}(t)x,M_{k-1}(t)x\rangle+2\left\langle\left[\dot{\tilde{S}}(t)+\tilde{S}(t)A(t)+A^T(t)\tilde{S}(t)\right]M_{k-1}(t)x,\right.\\&\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\rangle+\left\langle\left[\dot{\tilde{S}}(t)+\tilde{S}(t)A(t)+A^T(t)\tilde{S}(t)\right]\right.\\&\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x,\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\rangle\,.\end{aligned}$$

Stąd dostajemy oszacowania:

$$\begin{aligned}&2\left\langle\left[\dot{\tilde{S}}(t)+\tilde{S}(t)A(t)+A^T(t)\tilde{S}(t)\right]M_{k-1}(t)x,\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\right\rangle\\&\geqslant-2L\left(\lambda_{k-1}+1\right)\|M_{k-1}(t)x\|\|\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\|,\\&\left\langle\left[\dot{\tilde{S}}(t)+\tilde{S}(t)A(t)+A^T(t)\tilde{S}(t)\right]\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x,\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\right\rangle\geqslant\\&\geqslant-L\left(\lambda_{k-1}+1\right)\|\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\|^2,\end{aligned}$$

na podstawie których lewą stronę (2.2.0.33) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}&\left\langle\left[\dot{\overline{S}}(t)+\overline{S}(t)A(t)+A^T(t)\overline{S}(t)\right]M_{k-2}(t)x,M_{k-2}(t)\right\rangle\geqslant\left(\lambda_{k-2}-\lambda_{k-1}L-L\right)\\&\|\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\|^2-2L\left(\lambda_{k-1}+1\right)\|M_{k-1}(t)x\|\|\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\|+\\&+\mu\left(\lambda_{k-1}\right)\|M_{k-1}(t)x\|^2\geqslant\tfrac{\left(\lambda_{k-2}-L(\lambda_{k-1}+1)\right)\mu(\lambda_{k-1})-L^2(\lambda_{k-1}+1)^2}{\lambda_{k-2}-L(\lambda_{k-1}+1)+\mu(\lambda_{k-1})}\\&\left(\|\left(M_{k-2}(t)-M_{k-1}(t)\right)x\|^2+\|M_{k-1}(t)x\|^2\right)\geqslant\\&\geqslant\tfrac{\left(\lambda_{k-2}-L(\lambda_{k-1}+1)\right)\mu(\lambda_{k-1})-L^2(\lambda_{k-1}+1)^2}{2(\lambda_{k-2}-L(\lambda_{k-1}+1)+\mu(\lambda_{k-1}))}\|M_{k-2}(t)x\|^2.\end{aligned}$$

W ten sposób możemy zauważyć, że nierówność (2.2.0.33) będzie prawdziwa. Postępując w analogiczny sposób dla kombinacji symetrycznych macierzy:

$$S_\lambda(t) = \lambda_1 S_1(t) + \lambda_2 S_2(t) + \ldots + \lambda_{k-1} S_{k-1}(t) + S_k(t),$$

otrzymujemy następującą nierówność:

$$\begin{aligned} &\left\langle \left[\dot{S}_\lambda(t) + S_\lambda(t)A(t) + A^T(t)S_\lambda\right] M_1(t)x, M_1(t)x \right\rangle \geqslant \\ &\geqslant \mu\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}\right) \|M_1(t)x\|^2, \end{aligned} \tag{2.2.0.34}$$

gdzie dodatnią stałą $\mu\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}\right)$ możemy zapisać:

$$\mu\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}\right) = \frac{\left(\lambda_1 - L(1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-1})\mu(\lambda_2,\ldots,\lambda_{k-1}) - L^2(1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-1})\right)}{2(\lambda_1 - L(1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{k-1}) + \mu(\lambda_2,\ldots,\lambda_{k-1}))}. \tag{2.2.0.35}$$

Dla dodatnich współczynników ma miejsce wzór:

$$\mu\left(\lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_{k-1}\right) = \frac{(\lambda_j - L(1+\lambda_{j+1}+\ldots+\lambda_{k-1}))\mu(\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_{k-1}) - L^2(1+\lambda_{j+1}+\ldots+\lambda_{k-1})}{2(\lambda_1 - L(1+\lambda_{j+1}+\ldots+\lambda_{k-1}) + \mu(\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_{k-1}))}, \tag{2.2.0.36}$$

gdzie przy $j = k-2$, zachodzi równość:

$$\mu\left(\lambda_{k-1}\right) = \frac{\lambda_{k-1} - L - \lambda_2}{2\left(\lambda_{k-1} - \lambda + 1\right)}, \quad \lambda_{k-1} > L + L^2.$$

Stałą L wyznaczamy na podstawie (2.2.0.27). Ponieważ w nierówności (2.2.0.34) macierz $M_1(t)$ jest niezdegenerowana wnioskujemy stąd, że pochodna kwadratowej formy (2.2.0.24) wzdłuż rozwiązań układu (2.1.0.1) będzie dodatnio określona przy dostatecznie dużych wartościach parametrów $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1} > 0$. □

Uwaga 2.2.2. *[26] Ze wzorów (2.2.0.35) oraz (2.2.0.36) wynika, że przy dostatecznie dużych wartościach* $\lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}$ *współczynnik* $\mu\left(\lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}\right)$ *przyjmuje wartość bliską* $\frac{1}{4}$. *Warto zauważyć, że współczynniki* $\mu\left(\lambda_j, \ldots, \lambda_{k-1}\right)$ *przyjmują wartości bliskie do liczbom* $\frac{1}{2^{k-j}}$, $j = 1, 2, \ldots, (k-2)$, $k \geqslant 3$.

3

Okresowe rozwiązania pewnych klas nierówności różniczkowych

Teoria regularności liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie może być zastosowana w badaniach dotyczących istnienia rozwiązań nierówności różniczkowych. Główna idea zastosowania tej teorii do nierówności różniczkowych, związana jest z uogólnioną funkcją Lapunowa w postaci formy kwadratowej. Przypomnijmy w tym miejscu istotny fakt związany z regularnością liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie.

Fakt 3.0.1. *Na to, aby układ równań różniczkowych:*

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \end{cases} \tag{3.0.0.1}$$

gdzie $\varphi \in T_m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a(\varphi) \in C^0(T_m)$, $A(\varphi) \in C^0(T_m)$ *był regularny potrzeba i wystarcza, aby istniała niezdegenerowana forma kwadratowa:*

$$V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x\rangle,$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań (3.0.0.1) będzie dodatnio określona, tzn. spełniona będzie nierówność:

$$\dot{V} = \left\langle \left[\dot{S}(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi)\right] x, x \right\rangle \geqslant \varepsilon \|x\|^2,$$

gdzie $\varepsilon = const > 0$.

Warto przypomnieć, że w przypadku gdy $S(\varphi)$ jest różniczkowalna mamy:

$$\dot{S}(\varphi) = \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} a_1(\varphi) + \frac{\partial S}{\partial \varphi_2} a_2(\varphi) + \ldots + \frac{\partial S}{\partial \varphi_m} a_m(\varphi).$$

Rozpatrzmy układ równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = b(\varphi)x, \end{cases} \tag{3.0.0.2}$$

gdzie $\varphi \in T_1$, $x \in \mathbb{R}$ oraz funkcje skalarne $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_1)$, $b(\varphi) \in C^0(T_1)$. Możemy zapisać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.0.1. *Nierówność różniczkowa:*

$$a(\varphi)\frac{ds}{d\varphi} + 2b(\varphi)s > 0, \tag{3.0.0.3}$$

posiada 2π-okresowe rozwiązanie $s = s(\varphi)$, które nie przyjmujące wartości zerowych dla żadnego $\varphi \in T_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ (3.0.0.2) jest regularny.

Dowód. Załóżmy najpierw, że układ (3.0.0.2) jest regularny. Oznacza to, że istnieje funkcja:

$$V(\varphi, x) = s(\varphi)x^2, \quad \forall\, \varphi \det s(\varphi) \neq 0, \tag{3.0.0.4}$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (3.0.0.2) spełnia nierówność:

$$\dot{V} = \dot{s}(\varphi)x^2 + s(\varphi)2x\dot{x} = \left[\frac{ds}{d\varphi}a(\varphi) + 2s(\varphi)b(\varphi)\right]x^2 \geqslant \varepsilon x^2, \tag{3.0.0.5}$$

gdzie ε jest pewną stałą dodatnią. Na podstawie (3.0.0.5) możemy stwierdzić, że $s(\varphi)$ spełnia nierówność:

$$a(\varphi)\frac{ds(\varphi)}{d\varphi} + 2b(\varphi)s(\varphi) > 0,$$

przy każdej wartości $\varphi \in T_1$. Ponieważ lewa strona powyższej nierówności jest 2π-okresowa względem φ, zatem także funkcja $s(\varphi)$ jest szukanym 2π-okresowym rozwiązaniem nierówności (3.0.0.3). Dodatkowo z faktu, że dla każdego φ mamy $\det s(\varphi) \neq 0$ wnioskujemy, że funkcja nigdzie nie przyjmuje wartości zerowych.
Niech teraz nierówność (3.0.0.3) posiadać będzie 2π-okresowe rozwiązanie $s = s(\varphi)$, które nie przyjmuje wartości zerowych. Wówczas istnieje funkcja (3.0.0.4), której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (3.0.0.2) jest dodatnio określona, o czym świadczy nierówność (3.0.0.5). Otrzymujemy stąd, że układ (3.0.0.2) jest regularny □

Zwrócimy uwagę, że jeśli obliczając pochodną funkcji (3.0.0.4) wzdłuż rozwiązań układu (3.0.0.2) dostajemy nierówność:

$$\dot{V} \leqslant -\varepsilon x^2,$$

gdzie $\varepsilon = const > 0$, wówczas po pomnożeniu funkcji $s = s(\varphi)$ przez -1 otrzymamy inną funkcję, której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (3.0.0.2) będzie dodatnio określona.

Przykład 3.0.1. *Pokażemy, że nierówność:*

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2\varphi\right]\frac{ds}{d\varphi} + 2\left[\cos 2\varphi + \frac{3}{2}\right]s > 0, \tag{3.0.0.6}$$

posiada 2π-okresowe rozwiązanie przyjmujące wartości stałego znaku dla wszystkich φ.

W tym celu rozpatrzmy układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2\varphi, \\ \frac{dx}{dt} = \left(\cos 2\varphi + \frac{3}{2}\right) x. \end{cases} \tag{3.0.0.7}$$

Wybierzmy funkcję postaci:

$$V(\varphi, x) = (2 - \sin 2\varphi)x^2,$$

i obliczmy jej pochodną wzdłuż rozwiązań układu (3.0.0.7). Otrzymujemy wtedy:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left(-2\cos 2\varphi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2\varphi\right) + 2(2 - \sin 2\varphi)\left(\cos 2\varphi + \frac{3}{2}\right)\right) x^2 = \\ &= \left(\frac{8}{3} + (4 - \sqrt{3})\cos 2\varphi - \frac{4}{3}\sin 2\varphi\right) x^2 = \left(\frac{8}{3} + \frac{\sqrt{187 - 72\sqrt{3}}}{3}\cos(2\varphi + \theta)\right) x^2 \geqslant \\ &\geqslant \left(\frac{8}{3} - \frac{\sqrt{187 - 72\sqrt{3}}}{3}\right) x^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

gdzie θ to kąt dla którego $\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{187-72\sqrt{3}}}$ oraz $\cos\theta = \frac{12-3\sqrt{3}}{\sqrt{187-72\sqrt{3}}}$. Widzimy, że układ ten jest regularny a przykładowym rozwiązaniem nierówności (3.0.0.6) jest funkcja $s(\varphi) = 2 - sin2\varphi$. W podobny sposób można pokazać, że rozwiązaniem danej nierówności jest funkcja $s(\varphi) = \frac{3}{2} - \sin 2\varphi$, która również przyjmuje wartości dodatnie.

Zgodnie z teorią przedstawioną w rozdziale 1 wiemy, że jeżeli dla układu sprzężonego do (3.0.0.1) postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} = -A^T(\varphi)y, \end{cases} \tag{3.0.0.8}$$

istnieje forma kwadratowa:

$$W(\varphi, y) = \langle \overline{S}(\varphi)y, y\rangle,$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań jest dodatnio określona, to układ (3.0.0.1) będzie słabo regularny. Dodatkowo gdy symetryczna macierz $\overline{S}(\varphi)$ jest niezdegenerowana, to układy (3.0.0.1), (3.0.0.8) są jednocześnie regularne. Wynika stąd następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.0.2. *Jeżeli nierówność (3.0.0.3) posiada rozwiązanie 2π-okresowe $s = \overline{s}(\varphi)$, które nie przyjmuje wartości zerowych dla żadnego $\varphi \in T_1$, wówczas nierówność postaci:*

$$a(\varphi)\frac{ds}{d\varphi} - 2b(\varphi)s > 0, \tag{3.0.0.9}$$

także posiada rozwiązanie 2π-okresowe $s = s(\varphi)$ nie przyjmujące wartości zerowych przy żadnym $\varphi \in T_1$.

Dowód. Wiedząc, że nierówność (3.0.0.3) posiada 2π-okresowe rozwiązanie, które nie przyjmuje wartości zerowych na mocy twierdzenia 3.0.1 możemy uważać, że układ (3.0.0.2) jest regularny. Oznacza to, że układ sprzężony do (3.0.0.2) postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} = -b(\varphi)y, \end{cases} \tag{3.0.0.10}$$

także jest regularny. Istnieje zatem funkcja:

$$W = s(\varphi)y^2,$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego (3.0.0.10) spełnia nierówność:

$$\dot{W}(\varphi, y) = \dot{s}y^2 + 2sy\dot{y} = \left(\frac{ds}{d\varphi}a(\varphi) - 2s(\varphi)b(\varphi)\right)y^2 \geqslant \varepsilon y^2, \tag{3.0.0.11}$$

gdzie $\varepsilon = const > 0$ oraz $\det s(\varphi) \neq 0$ dla dowolnego $\varphi \in T_1$. Na podstawie (3.0.0.11) wynika, że funkcja $s = s(\varphi)$ jest 2π-okresowym rozwiązaniem nierówności (3.0.0.9), które nie przyjmuje wartości zerowych przy żadnym φ. □

Fakt 3.0.2. *Jeżeli istnieje taka wartość $\varphi = \varphi_0$, dla której spełnione są równocześnie równości:*

$$a(\varphi_0) = 0, \quad b(\varphi_0) = 0,$$

to żadna z nierówności (3.0.0.3), (3.0.0.9) nie będzie posiadała 2π-okresowego rozwiązania $s(\varphi)$ przyjmującego wartości stałego znaku.

Fakt 3.0.3. *Jeżeli w układzie (3.0.0.2) dla każdej wartości φ spełniona jest nierówność:*

$$b(\varphi) > 0,$$

to w formie kwadratowej (3.0.0.4) można wybierać $s(\varphi) \equiv 1$, co oznacza, że nierówność (3.0.0.3) będzie spełniona dla $s(\varphi) \equiv 1$.

Twierdzenie 3.0.3. *Jeżeli istnieje 2π-okresowe rozwiązanie $s = s(\varphi)$ nierówności (3.0.0.3) nie przyjmujące wartości zerowych dla żadnego $\varphi \in T_1$, wówczas funkcja postaci $\overline{s}(\varphi) = -\frac{1}{s(\varphi)}$ spełnia nierówność (3.0.0.9) oraz sama jest stałego znaku w całej swojej dziedzinie.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja $s(\varphi)$ spełnia nierówność (3.0.0.3) oraz nie przyjmuje wartości zerowej. Zgodnie z twierdzeniem 3.0.1 układ (3.0.0.2):

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = b(\varphi)x, \end{cases}$$

jest regularny. Rozpatrzmy układ do niego sprzężony:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} = -b(\varphi)y. \end{cases}$$

Obliczając dla funkcji postaci:

$$W = -\frac{1}{s(\varphi)}y^2,$$

pochodną wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego uzyskujemy:

$$\dot{W} = \frac{\dot{s}}{s^2}y^2 - \frac{2}{s}y\dot{y} = \left(\frac{a(\varphi)\frac{ds}{d\varphi}}{s^2(\varphi)} + 2b(\varphi)\frac{1}{s(\varphi)}\right)y^2 = \frac{a(\varphi)\frac{ds}{d\varphi} + 2b(\varphi)s(\varphi)}{s^2(\varphi)}y^2.$$

Korzystając z założenia widzimy, że funkcja $\overline{s}(\varphi) = -\frac{1}{s(\varphi)}$ spełnia nierówność (3.0.0.9):

$$a(\varphi)\frac{ds}{d\varphi} - 2b(\varphi)s > 0,$$

a także przyjmuje wartości stałego znaku. □

Przykład 3.0.2. *Pokażemy, że nierówność:*

$$(0,8 - \sin 2\varphi)\,\frac{ds}{d\varphi} - (1,6 + 2\cos 2\varphi)\,s > 0, \tag{3.0.0.12}$$

posiada 2π-okresowe rozwiązanie, które nie przyjmuje wartości zerowych. W tym celu zapiszmy układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = 0,8 - \sin 2\varphi, \\ \frac{dx}{dt} = (1,6 + 2\cos 2\varphi)\,x. \end{cases} \tag{3.0.0.13}$$

Obliczając pochodną funkcji:

$$V(\varphi, x) = (3 - sin2\varphi)x^2,$$

wzdłuż rozwiązań układu (3.0.0.13) dostaniemy, że układ ten jest regularny. Zatem na mocy twierdzenia 3.0.1 wiemy, że funkcja $s(\varphi) = 3 - \sin 2\varphi$ spełnia nierówność:

$$(0,8 - \sin 2\varphi)\,\frac{ds}{d\varphi} + (1,6 + 2\cos 2\varphi)\,s > 0,$$

oraz nie przyjmuje wartości zerowych. Na mocy twierdzenia 3.0.3 mamy, że funkcja $\overline{s}(\varphi) = \frac{1}{\sin 2\varphi - 3}$ spełnia nierówność (3.0.0.12).

Ma miejsce także następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.0.4. *Jeżeli istnieje 2π-okresowe rozwiązanie nierówności (3.0.0.9), które przyjmuje w pewnym punkcie φ_0 wartość zerową, to nie istnieje 2π-okresowa funkcja spełniająca nierówność (3.0.0.3).*

Dowód. Dowód tego twierdzenia wynika z faktu, że jeżeli dla układu sprzężonego istnieje zdegenerowana forma kwadratowa, wówczas układ wyjściowy będzie ostro-słabo regularny, tzn. posiadać będzie wiele różnych funkcji Greena-Samojlenki, natomiast sam układ sprzężony nie będzie posiadał żadnej funkcji Greena-Samojlenki. Oznacza to, że nierówność (3.0.0.3) nie będzie posiadać 2π-okresowego rozwiązania. □

Przykład 3.0.3. *Pokażemy, że nie istnieje 2π-okresowa funkcja spełniająca nierówność:*

$$\sin\varphi\frac{ds}{d\varphi} + 2(\cos\varphi)s > 0, \tag{3.0.0.14}$$

W tym celu rozpatrzmy układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \\ \frac{dx}{dt} = (\cos\varphi)x, \end{cases} \tag{3.0.0.15}$$

oraz układ do niego sprzężonego:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \\ \frac{dy}{dt} = -(\cos\varphi)y, \end{cases} \tag{3.0.0.16}$$

Układ (3.0.0.15) jest ostro-słabo regularny, ponieważ pochodna funkcji:

$$V(\varphi, y) = -(cos\varphi)y^2, \tag{3.0.0.17}$$

wzdłuż rozwiązań (3.0.0.16) jest dodatnio określona a ponadto funkcja (3.0.0.17) zeruje się dla $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Oznacza to, że $s(\varphi) = -\cos\varphi$ spełnia nierówność:

$$\sin\varphi\frac{ds}{d\varphi} - 2(\cos\varphi)s > 0,$$

oraz przyjmuje wartość zerową. Powołując się na wcześniejsze twierdzenie uzyskujemy, że nie istnieje 2π-okresowa funkcja, która spełniałaby nierówność (3.0.0.14).

Powyższe twierdzenia można uogólnić rozpatrując następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = b(\varphi)x, \end{cases} \tag{3.0.0.18}$$

gdzie $\varphi \in T_m$, $x \in \mathbb{R}$, funkcja wektorowa $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$, funkcja skalarna $b(\varphi) \in$

$C^0(T_m)$. Poniżej przedstawiona zostanie seria twierdzeń będących uogólnieniem twierdzeń 3.0.1 - 3.0.4.

Twierdzenie 3.0.5. *Na to, aby dla nierówności różniczkowej o pochodnych cząstkowych:*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + 2b(\varphi)s > 0, \tag{3.0.0.19}$$

istniało rozwiązanie $s = s(\varphi)$ 2π-okresowe względem każdej zmiennej, które nie przyjmuje wartości zerowych dla żadnego $\varphi \in T_m$ potrzeba i wystarcza, aby układ (3.0.0.18) był regularny.

Twierdzenie 3.0.6. *Jeżeli istnieje 2π-okresowa ze względu na każdą zmienną funkcja $s = \overline{s}(\varphi)$ spełniająca nierówność (3.0.0.19), która nie przyjmuje wartości zerowych przy żadnym $\varphi \in T_m$, wówczas nierówność:*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) - 2b(\varphi)s > 0, \tag{3.0.0.20}$$

posiada 2π-okresowe względem każdej zmiennej rozwiązanie $s = s(\varphi)$, które nie zeruje się dla żadnej wartości $\varphi \in T_m$.

Twierdzenie 3.0.7. *Jeżeli istnieje 2π-okresowe ze względu na każdą zmienną rozwiązanie $s = \overline{s}(\varphi)$ nierówności (3.0.0.19), które nie przyjmuje wartości zerowych dla żadnej wartości $\varphi \in T_m$, wówczas funkcja $s(\varphi) = -\frac{1}{s(\varphi)}$ jest 2π-okresowym ze względu na każdą zmienną rozwiązaniem nierówności (3.0.0.20) nie przyjmującym wartości zerowych dla żadnych $\varphi \in T_m$.*

Twierdzenie 3.0.8. *Jeżeli istnieje 2π-okresowa ze względu na każdą zmienną funkcja spełniająca nierówność (3.0.0.20), która przyjmuje wartość zerową dla pewnego $\varphi_0 \in T_m$, wówczas żadna funkcja 2π-okresowa ze względu na każdą zmienną nie spełnia nierówności (3.0.0.19):*

Dowody tych twierdzeń są analogiczne do dowodów twierdzeń 3.0.1 - 3.0.4.

Przykład 3.0.4. *Pokażemy, że nierówność różniczkowa o pochodnych cząstkowych:*

$$\begin{gathered}(\sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2 + 3\sin\varphi_3)\frac{\partial s}{\partial \varphi_1} + (4\sin\varphi_1 + 5\sin\varphi_2 + 6\sin\varphi_3)\frac{\partial s}{\partial \varphi_2} + \\ + (7\sin\varphi_1 + 8\sin\varphi_2 + 9\sin\varphi_3)\frac{\partial s}{\partial \varphi_3} + [\mu_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) + \mu_1(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)]\, s > 0,\end{gathered} \tag{3.0.0.21}$$

gdzie:

$\mu_0(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3)^2$,
$\mu_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 10\sin^2\varphi_1 + 11\sin^2\varphi_2 + 12\sin^2\varphi_3 + 13\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + 14\sin\varphi_1\sin\varphi_3 +$
$+15\sin\varphi_2\sin\varphi_3$,

posiada 2π-okresowe rozwiązanie ze względu na każdą zmienną, które nie przyjmuje wartości zerowych. Rozpatrzmy w tym celu układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = \sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2 + 3\sin\varphi_3, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = 4\sin\varphi_1 + 5\sin\varphi_2 + 6\sin\varphi_3, \\ \frac{d\varphi_3}{dt} = 7\sin\varphi_1 + 8\sin\varphi_2 + 9\sin\varphi_3, \\ \frac{dx}{dt} = [\mu_0(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \mu_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)]\, x, \end{cases} \tag{3.0.0.22}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że układ (3.0.0.22) jest regularny korzystając z twierdzenia 1.2.1 oraz uwagi 1.2.1. Rozpatrzmy równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych:

$$\begin{aligned} &(\sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2 + 3\sin\varphi_3)\,\tfrac{\partial s}{\partial\varphi_1} + (4\sin\varphi_1 + 5\sin\varphi_2 + 6\sin\varphi_3)\,\tfrac{\partial s}{\partial\varphi_2} + \\ &+ (7\sin\varphi_1 + 8\sin\varphi_2 + 9\sin\varphi_3)\,\tfrac{\partial s}{\partial\varphi_3} = \mu_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) - \overline{\mu}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \\ &= (10 - \overline{\mu}_1)\sin^2\varphi_1 + (11 - \overline{\mu}_2)\sin^2\varphi_2 + (12 - \overline{\mu}_3)\sin^2\varphi_3 + (13 - \overline{\mu}_{12})\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ &(14 - \overline{\mu}_{13})\sin\varphi_1\sin\varphi_3 + (15 - \overline{\mu}_{23})\sin\varphi_2\sin\varphi_3. \end{aligned} \tag{3.0.0.23}$$

Przypuśćmy, że współczynniki $\overline{\mu}_1$, $\overline{\mu}_2$, $\overline{\mu}_3$, $\overline{\mu}_{12}$, $\overline{\mu}_{13}$, $\overline{\mu}_{23}$ możemy dobrać w taki sposób, aby równanie (3.0.0.23) posiadało rozwiązanie postaci:

$$s = s_0(\varphi) = c_1\cos\varphi_1 + c_2\cos\varphi_2 + c_3\cos\varphi_3, \tag{3.0.0.24}$$

gdzie c_1, c_2, c_3 to stałe rzeczywiste. Podstawiając funkcję (3.0.0.24) do równania (3.0.0.23) dostajemy:

$$\begin{aligned} &\overline{\mu}_1 = 10 + c_1, \quad \overline{\mu}_2 = 11 + 5c_2, \quad \overline{\mu}_3 = 12 + 9c_3, \\ &\overline{\mu}_{12} = 13 + 2c_1 + 4c_2, \quad \overline{\mu}_{13} = 14 + 3c_1 + 7c_3, \quad \overline{\mu}_{23} = 15 + 6c_2 + 8c_3. \end{aligned}$$

W ten sposób widzimy, że wprowadzona funkcja $\overline{\mu}(\varphi)$ powinna mieć postać:

$$\begin{aligned} &\overline{\mu}(\varphi) = (10 + c_1)\sin^2\varphi_1 + (11 + 5c_2)\sin^2\varphi_2 + (12 + 9c_3)\sin^2\varphi_3 + (13 + 2c_1 + 4c_2)\sin\varphi_1 \\ &\sin\varphi_2 + (14 + 3c_1 + 7c_3)\sin\varphi_1\sin\varphi_3 + (15 + 6c_2 + 8c_3)\sin\varphi_2\sin\varphi_3, \end{aligned}$$

aby równanie (3.0.0.23) miało rozwiązanie (3.0.0.24). Rozważmy teraz formę kwadratową:

$$\Phi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(10+c_1)\sigma_1^2+(11+5c_2)\sigma_2^2+(12+9c_3)\sigma_3^2+(13+2c_1+4c_2)\sigma_1\sigma_2+$$
$$+(14+3c_1+7c_3)\sigma_1\sigma_3+(15+6c_2+8c_3)\sigma_2\sigma_3, \tag{3.0.0.25}$$

i dobierzmy stałe c_1*,* c_2*,* c_3 *tak, aby była ona dodatnio określona. Wybierając* $c_1=-4$*,* $c_2=-1$*,* $c_3=-1$ *forma kwadratowa (3.0.0.25) przyjmuje postać:*

$$\Phi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=6\sigma_1^2+6\sigma_2^2+3\sigma_3^2+\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3. \tag{3.0.0.26}$$

Oczywiście (3.0.0.26) jest dodatnio określona:

$$6\sigma_1^2+6\sigma_2^2+3\sigma_3^2+\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3\geqslant\varepsilon(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2).$$

W ten sposób uzyskujemy:

$$\overline{\mu}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)=6\sin^2\varphi_1+6\sin^2\varphi_2+3\sin^2\varphi_3+\sin\varphi_1\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_3+$$
$$\sin\varphi_2\sin\varphi3\geqslant\varepsilon(\sin^2\varphi_1+\sin^2\varphi_2+\sin^2\varphi_3),\quad \varepsilon=const>0.$$

Teraz dla układu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt}=\sin\varphi_1+2\sin\varphi_2+3\sin\varphi_3,\\ \frac{d\varphi_2}{dt}=4\sin\varphi_1+5\sin\varphi_2+6\sin\varphi_3,\\ \frac{d\varphi_3}{dt}=7\sin\varphi_1+8\sin\varphi_2+9\sin\varphi_3,\\ \frac{dx}{dt}=\left[(\mu_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)+\overline{\mu}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3))+(\mu_1(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)-\overline{\mu}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3))\right]x, \end{cases}$$

obliczmy pochodną funkcji:

$$V(\varphi,x)=x^2e^{-2s_0(\varphi)},$$

wzdłuż jego rozwiązań. Mamy:

$$\dot V=2x\dot x e^{-2s_0(\varphi)}-2x^2\dot s_0(\varphi)e^{-2s_0(\varphi)}=2x^2\left[(\mu_0(\varphi)+\overline{\mu}(\varphi))+(\mu_1(\varphi)-\overline{\mu}(\varphi))\right]e^{-2s_0(\varphi)}+$$
$$-2x^2\dot s_0(\varphi)e^{-2s_0(\varphi)}=2x^2(\mu_0(\varphi)+\overline{\mu}(\varphi))e^{-2s_0(\varphi)}+2x^2\left[(\mu_1(\varphi)-\overline{\mu}(\varphi))-\dot s_0(\varphi)\right]e^{-2s_0(\varphi)}.$$

Uwzględniając fakt, że funkcja (3.0.0.24) jest rozwiązaniem równania (3.0.0.23) otrzymujemy:

$$\dot V=2x^2(\mu_0(\varphi)+\overline{\mu}(\varphi))e^{-2s_0(\varphi)}.$$

Oznacza to, że warunkiem regularności układu (3.0.0.22) jest spełnienie nierówności:

$$\mu_0(\varphi)+\overline{\mu}(\varphi)>0. \tag{3.0.0.27}$$

Nierówność (3.0.0.27) w naszym przypadku zachodzi i wynika z:

$$(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3)^2+\overline{\mu}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\geqslant(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3)^2+$$
$$+\varepsilon\left(\sin^2\varphi_1+\sin^2\varphi_2+\sin^2\varphi_3\right)>0.$$

Kolejne twierdzenia dotyczą ogólnej postaci układu:

$$\begin{cases}\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\\ \frac{dx}{dt}=A(\varphi)x,\end{cases}\tag{3.0.0.28}$$

gdzie $\varphi\in T_m$, $x\in\mathbb{R}^n$, funkcja wektorowa $a(\varphi)\in C_{Lip}(T_m)$ oraz $A(\varphi)$ to macierz kwadratowa stopnia n-tego o elementach będących funkcjami ciągłymi 2π-okresowymi ze względu na każdą zmienną.

Twierdzenie 3.0.9. *Niech nierówność:*

$$\left\langle\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial S}{\partial\varphi_i}a_i(\varphi)+SA(\varphi)+A^T(\varphi)S\right]x,x\right\rangle\geqslant\|x\|^2,\tag{3.0.0.29}$$

posiada ograniczone na T_m rozwiązanie $S=S(\varphi)$ oraz niech dla każdego $\varphi\in T_m$ mamy $\det S(\varphi)\neq 0$. *Wówczas każde ograniczone na T_m rozwiązanie (3.0.0.29) $S=\overline{S}(\varphi)$ będzie niezdegenerowane, tzn* $\det\overline{S}(\varphi)\neq 0$ *dla dowolnego $\varphi\in T_m$.*

Dowód. Nierówność (3.0.0.29) oznacza, że pochodna formy kwadratowej:

$$V(\varphi,x)=\langle S(\varphi)x,x\rangle,$$

wzdłuż rozwiązań układu (3.0.0.28) jest dodatnio określona. Wiemy także, że $\det S(\varphi)\neq 0$ dla dowolnych $\varphi\in T_m$. Oznacza to, że układ (3.0.0.28) posiada dokładnie jedną funkcję Greena-Samojlenki:

$$G_0(\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega^0_\tau(x)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau\leqslant 0,\\ \Omega^0_\tau\left[C(\varphi_\tau(\varphi))-I_n\right], & \tau>0.\end{cases}$$

Udowodnione zostało [15], że każda macierz $S=\overline{S}(\varphi)$ spełniająca nierówność (3.0.0.29), razem z macierzą $C(\varphi)$ spełnia:

$$\langle\overline{S}(\varphi)x,[I_n-2C(\varphi)]\,x\rangle\geqslant\beta\|x\|^2,\tag{3.0.0.30}$$

gdzie $\beta=const>0$. Zakładając teraz, że istnieje pewien punkt $\varphi_0\in T_m$ dla którego $\det\overline{S}(\varphi_0)=0$, możemy znaleźć niezerowy wektor $x_0\in\mathbb{R}^n$ taki, że $\overline{S}(\varphi_0)x_0=0$. Wstawiając x_0 do lewej strony nierówności (3.0.0.30) dostalibyśmy wartość zerową. Jednocześnie prawa strona (3.0.0.30) byłaby dodatnia. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dla każdego $\varphi \in T_m$ mamy $\det \overline{S}(\varphi) \neq 0$. □

Twierdzenie 3.0.10. *Niech nierówność (3.0.0.29) posiada rozwiązanie $S = S(\varphi)$ ograniczone na T_m oraz niech $\det S(\varphi) \neq 0$ dla wszystkich $\varphi \in T_m$. Wówczas następująca nierówność:*

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) - SA^T(\varphi) - A(\varphi)S \right] x, x \right\rangle \geqslant \|x\|^2, \tag{3.0.0.31}$$

także posiada ograniczone na T_m niezdegenerowane rozwiązanie $S = \overline{S}(\varphi)$.

Dowód. Z założenia mamy, że nieosobliwa macierz $S(\varphi)$ spełnia nierówność:

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + SA(\varphi) + A^T(\varphi)S \right] x, x \right\rangle \geqslant \|x\|^2.$$

Dokonując podstawienia $x = S^{-1}(\varphi)z$ otrzymujemy:

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + SA(\varphi) + A^T(\varphi)S \right] S^{-1}(\varphi)z, S^{-1}(\varphi)z \right\rangle \geqslant \|S^{-1}(\varphi)z\|^2.$$

Wynika stąd:

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} S^{-1}(\varphi) \tfrac{\partial S}{\partial \varphi_i} S^{-1}(\varphi) a_i(\varphi) + A(\varphi)S^{-1}(\varphi) + S^{-1}(\varphi)A^T(\varphi) \right] z, z \right\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \|S^{-1}(\varphi)z\|^2 \geqslant \tfrac{1}{\|S\|_0^2}\|z\|^2.$$

Korzystając z tożsamości:

$$S^{-1}(\varphi)\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} S^{-1}(\varphi) \equiv -\frac{\partial S^{-1}(\varphi)}{\partial \varphi_i},$$

otrzymujemy:

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S^{-1}(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) - A(\varphi)S^{-1}(\varphi) - S^{-1}(\varphi)A^T(\varphi) \right] z, z \right\rangle \leqslant -\frac{1}{\|S\|_0^2}\|z\|^2.$$

Oznaczając $\overline{S} = S^{-1}(\varphi)$, $\alpha = \frac{1}{\|S\|_0^2}$ uzyskujemy:

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \overline{S}}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) - A(\varphi)\overline{S} - \overline{S}A^T(\varphi) \right] z, z \right\rangle \leqslant -\alpha\|z\|^2.$$

Jeżeli teraz oznaczymy:

$$\overline{S}(\varphi) = -\frac{1}{\alpha}\overline{S}(\varphi),$$

to otrzymamy:

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \overline{S}}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) - A(\varphi)\overline{S} - \overline{S}A^T(\varphi) \right] z, z \right\rangle \geqslant \|z\|^2.$$

Oznacza to, że nierówność (3.0.0.31) posiada rozwiązanie:

$$S = \overline{S}(\varphi) = -\|S\|_0^2 S^{-1}(\varphi).$$

Ograniczoność na T_m wynika z oszacowania [15]:

$$\|S^{-1}(\varphi)\| \leqslant \|A + A^T\|_0.$$

□

Wnioski

Praca doktorska dotyczy badania warunków regularności układów równań różniczkowych linearyzowanych w otoczeniu wielowymiarowego torusa oraz metody dołączenia układów słabo-regularnych do układów regularnych. Głównym narzędziem wykorzystywanym podczas badań powyższych zagadnień była uogólniona funkcja Lapunowa w postaci formy kwadratowej. W wyniku prowadzonych badań uzyskano następujące wyniki:

- uzyskane zostały metody konstrukcji uogólnionej funkcji Lapunowa w postaci formy kwadratowej dla pewnych klas liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie;

- uzyskane zostały klasy układów zachowujące regularność przy dowolnych zaburzeniach fazowych. Dodatkowo otrzymano informacje w jakim przypadku dla tych układów nie istnieje funkcja Lapunowa w postaci formy kwadratowej o stałych współczynnikach;

- uzyskane zostały klasy układów regularnych o zmiennych macierzach współczynników wymiarów 2×2, 3×3 oraz 4×4, których rząd wynosi 1;

- otrzymano warunki dołączenia słabo-regularnych liniowych układów równań różniczkowych do układów regularnych;

- zaprezentowany został sposób w jaki można zastosować wyniki teorii regularności liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie do znajdywania rozwiązań pewnych klas nierówności różniczkowych.

Zastosowanie uzyskanych wyników należy rozpatrywać z punktu widzenia teoretycznego charakteru powyższej pracy.

Bibliografia

1. Arnold V. I., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1978.
2. Arnold V. I., *Small denominators and the problem of stability of motion in classical and clestial mechanics* Russian Math. Surveys, 18:6, str.86-191, 1963.
3. Bogdanow Ju. S., *O prieobrazowanii pieriemionnoj matricy k kanoniczieskomu widu*, Dokl. AN USSR, 7(3):152-154, 1963.
4. Bogolyubov N. N., *On certain statistical methods in mathematical physics*, Lwów, 1945.
5. Bogolyubov N. N., Krylov N. M., *Introduction to non-linear mechanics*, Pronceton Univ. Press, 1947.
6. Bogolyubov N. N., Krylov N. M., *Methodes approchees de la mecanique non-lineaire dans leurs applocation a l'etude de la perturbation des mouvements periodiques de divers phenomenes de resonsnce s'y rapportant*, Kiev, 1935.
7. Bogolyubov N. N., Mitropolskij Yu. A., *Asimptoticzieskije miedoty w tieorii nieliniejnych koliebanij*, Nauka, 1974.
8. Byłow B. F., Winograd R. E., Lin W. J., Łokucyjewskij O. W., *O topologiczieskich prepkatswijach k błocznoj diagonalizacii nektorych eksponencialno-rasszczeplenych poczti-periodiczeskich sistem*, AN USSR In-t prikł. matematiki, 1977.
9. Byłow B. F., Winograd R. E., Lin W. J., Łokucyjewskij O. W., *O topologiczieskich priczinach anomalnawa pawiedienija niekotorych poczti-pieriodiczieskich sistiem*, Probl. asimptot. tieorii nieliniejn. koliebanij, Nauk. dumka, Kijew, 1977.
10. Burd W. Sz., Krasnosielskij M. A., Ju. S. Koliesow, *Nieliniejnyje poczti-pieriodiczieskije koliebanija*, Nauka, 1970.
11. Buriłko O. A., Samoilenko A. M., *Pitanija gladkosti funkcij Grina zadaczi pro obmiezeni inwariantni mnogowidi*, Ukr. mat. żurn., 51(4):570-584, 1998.
12. Diliberto S. P., *Perturbations theorems for periodical surfaces*, Rend Ciricolo Mat. Palermo, I, str.265-299, 1960.

13. Diliberto S. P., *Perturbations theorems for periodical surfaces*, Rend Ciricolo Mat. Palermo, II, 111-161, 1961.

14. Fridrichs K. O., *Symmetric positive linear differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 11, str.333-418, 1958.

15. Grod I.M., Kulik V.L., *Relationship between the Green and Lyapunov Functions in Linear Extensions of Dynamical Systems*, Ukr. mat. żurn., 66(4):550-557, 2014

16. Kolmogorov A. N., *On dynamic systems with an integral invariant on a torus*, Dokl. Akad. Nauk SSRR, 93:5, str 763-766, 1953.

17. Kolmogorov A. N., *On the preservation of quasi-periodic motions in classical and celestial mechanics*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 98, str 525-530, 1954.

18. Kulik V. L., Samoilenko A. M., *Eksponiencijalnaja dichotomija inwariantonogo tora dinamiczeskich sisitem*, Diffierenc. urawnienija, 15(8):1434-1444, 1979.

19. Kulik V. L., Samoilenko A. M., *O riegularnosti diffieriencialnych urawnienij liniearizowanych po czasti pieriemiennych*, Diffierienc. urawnienija, 31(5):773-777, 1995.

20. Kulik V. L., *K woprosu o sochranienii inwariantnawa tora pro wazmuszczienii*, Mietod intiegralnych mnogoobrazij w nieliniejnych diffieriencialnych urawnienijach. In-t matiematiki AN USSR, Kijew, 1973

21. Kulik V.L., Paczko D., *Wybrane zagadnienia jakościowej teorii równań różniczkowych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2012.

22. Lapunow A. M., *The general problem on stability of motion*, Gostekhizdat, Moskwa, 1950.

23. Mitropolskii Y. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L., *Issliedowania dichotomii liniejnych sistem differencjalnych urawnienij s pomoszcziu funkcji Lapunowa*, Naukowa Dumka, Kijów, 1990.

24. Morawiak M., *Some classes of linear extensions of dynamical system on a torus*, Mathematica Applicanda, vol. 45 iss. 2, str. 153-161, 2017.

25. Morawiak M., *Regular classes of linear extensions of dynamical systems on a torus*, Silesian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 8 iss. 1, str.21-31, 2018.

26. Morawiak M., *On regularity of linear systems of differential equations*, Silesian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 8 iss. 1, str. 5-20, 2018.

27. Moser J. K., *Lectures on Hamiltonian systems*, Amer. Math. Soc., 1968.

28. Moser J. K., *A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. ,47(11):1824-1831, 1961.

29. Muszynski J., Myszkis A.D., *Równania różniczkowe zwyczajne*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1984.

30. Palczewski A., *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa, 1999.

31. Pelczar A., Szarski J., *Wstęp do teorii równań różniczkowych zwyczajnych i równań cząstkowych pierwszego rzędu*, Wydawnictwo Naukowo Naukowe, Warszawa, 1987.

32. Pelczar A., Szarski J., *Elementy jakościowej teorii równań różniczkowych*, Wydawnictwo Naukowo Naukowe, Warszawa, 1987.

33. Poincare H., *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*, Tom 1, Paris, 1892.

34. Poincare H., *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*, Tom 2, Paris, 1893.

35. Poincare H., *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*, Tom 3, Paris, 1899.

36. Poincare H., *O kriwych, opriedielamych diffieriencialnymi urawnienijami*, Gostiechzdat, Moskwa, Leningrad, 1947.

37. Samoilenko A. M., *O sochranienii inwariantnego tora pri wozmuszczienijach*, Izw. AN SSSR Sier. mat., 34(6):1219-1240,1970.

38. Samoilenko A. M., *On perturbation theory of invariant manifolds of dynamical systems*, Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrainy SSR, Kijów, str 495-499, 1970.