mgr inż. Marek Morawiak
Wydział Matematyki Stosowanej
Politechnika Śląska

Katowice, 9 luty 2023

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Problemy regularności układów równań różniczkowych linearyzowanych w otoczeniu torusa

Prace A. M. Samoilenki z 1970 roku [5, 6] zapoczątkowały nowe badania nad teorią zaburzeń i stabilnością inwariantnych rozmaitości liniowego rozszerzenia układu dynamicznego na m-wymiarowym torusie. W pracach tych po raz pierwszy wprowadzona została funkcja Greena-Samojlenki. Przyczyniło się to do wprowadzenia pojęć takich jak układ regularny, układ słabo regularny czy układ ostro-słabo regularny.

Liniowymi rozszerzeniami układów dynamicznych na torusie nazywamy układy postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in T_m$[1], funkcja wektorowa $a(\varphi)$ jest ciągła i 2π-okresowa z względu na każdą zmienną oraz dodatkowo spełnia warunek Lipschitza, $A(\varphi)$ to macierz $n \times n-$wymiarowa, której elementami są funkcje ciągłe, 2π-okresowe względem każdej zmiennej. Razem z powyższym układem rozpatruje się układ do niego sprzężony względem normalnej zmiennej:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \frac{dy}{dt} = -A^T(\varphi)y, \end{cases} \tag{2}$$

Układ (1) jest regularny, czyli posiada dokładnie jedną funkcję Greena-Samojlenki, jeżeli istnieje funkcja [1]:

$$V(\varphi, y) = \langle S(\varphi)y, y \rangle \,, \tag{3}$$

gdzie $S(\varphi) \in C^1(T_m)$[2], której pochodna wzdłuż rozwiązań układu sprzężonego (2) jest dodatnio określona [3]. W przypadku gdy wyznacznik macierzy $S(\varphi)$ zeruje się dla pewnego $\varphi_0 \in T_m$, wówczas układ (1) będzie ostro-słabo regularny, czyli posiadać będzie wiele różnych funkcji Greena-Samojlenki, natomiast układ sprzężony nie będzie posiadał żadnej takiej funkcji. Funkcję (3) nazywa się często uogólnioną funkcją Lapunowa.

Celami pracy były opracowanie nowych metod doboru uogólnionej funkcji Lapunowa dla pewnych

[1] T_m to m-wymiarowym torus.

[2] $S(\varphi)$ to nieosobliwa, kwadratowa macierz $n \times n$-wymiarowa, której elementami są różniczkowalne w sposób ciągły funkcje 2π-okresowe względem każdej zmiennej.

[3] Regularność układu (1) jest równoważna regularności układu (2).

klas liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie, a także uzyskanie metod dołączenia słabo regularnych układów liniowych do układów regularnych.

Rozdział pierwszy dotyczy liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie. Rozpoczyna się od wprowadzenia teoretycznego, w którym przedstawione zostały najważniejsze definicje oraz wiadomości potrzebne do zrozumienia uzyskanych wyników. Wstęp teoretyczny zawiera także przykłady ułatwiające zrozumienie materiału. W drugiej części rozdziału przedstawione zostały wyniki prac [2], [3], podczas których udało się wydzielić pewne klasy układów regularnych, dla których zaprezentowane zostały metody doboru uogólnionej funkcji Lapunowa. Podczas badań udało się znaleźć układy równań różniczkowych zachowujące regularność przy dowolnych zaburzeniach fazowych. Wydzielone zostały także klasy układów regularnych o zdegenerowanych macierzach współczynników.

Rozdział drugi poświęcony jest zagadnieniu dołączenia układów słabo regularnych do układów regularnych. Rozpoczyna się od wprowadzenia teoretycznego, które zawiera liczne przykłady ukazujące różne podejścia do badania regularności układów liniowych. W drugiej części rozdziału przedstawione zostały wyniki [4], jakie udało się uzyskać w badaniach nad dołączeniem słabo regularnych układów liniowych do układów regularnych.

Rozdział trzeci dotyczy istnienia rozwiązań pewnych klas nierówności różniczkowych. Przedstawione zostało w jaki sposób można do tego celu zastosować teorię regularności liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie.

Literatura

[1] Mitropolskii Y. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L., *Issliedowania dichotomii liniejnych sistem differencjalnych urawnienij s pomoszcziu funkcji Lapunowa*, Naukowa Dumka, Kijów, 1990.

[2] Morawiak M., *Some classes of linear extensions of dynamical system on a torus*, Mathematica Applicanda, vol. 45 iss. 2, str. 153-161, 2017.

[3] Morawiak M., *Regular classes of linear extensions of dynamical systems on a torus*, Silesian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 8 iss. 1, str.21-31, 2018.

[4] Morawiak M., *On regularity of linear systems of differential equations*, Silesian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 8 iss. 1, str. 5-20, 2018.

[5] Samoilenko A. M., *O sochranienii inwariantnego tora pri wozmuszczienijach*, Izw. AN SSSR Sier. mat., 34(6):1219-1240,1970.

[6] Samoilenko A. M., *On perturbation theory of invariant manifolds of dynamical systems*, Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrainy SSR, Kijów, str 495-499, 1970.