prof. dr hab. Józef Banaś
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej
Politechnika Rzeszowska

Recenzja

rozprawy doktorskiej p. mgr. Marka Morawiaka
pt. *Problemy regularności układów równań różniczkowych linearyzowanych w otoczeniu torusa*

Rozprawa doktorska p. mgr. Marka Morawiaka została napisana na bazie trzech publikacji, które zgodnie z bibliografią zamieszczoną w rozprawie noszą numerację [24], [25] i [26]. Dwie z tych prac zostały opublikowane w czasopiśmie Silesian Journal of Pure and Applied Mathematics a jedna w czasopiśmie Mathematica Applicanda. Warto zaznaczyć, że Autor omawianej rozprawy dość często odwołuje się w niej do wyników uzyskanych przez promotora rozprawy, p. Profesora Wiktora Kułyka (stosuję polską pisownię nazwiska) jak również przez kilku współpracowników p. prof. W. Kułyka, wśród których z pewnością należy wyróżnić jednego z twórców teorii rozwijanej w omawianej rozprawie doktorskiej, a mianowicie prof. A. M. Samoilenko.

W recenzowanej rozprawie doktorskiej Autor rozważa układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} & = & a(\varphi) \\ \frac{dx}{dt} & = & A(\varphi)x, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$ natomiast φ należy do m-wymiarowego torusa oznaczonego w rozprawie symbolem T_m. Ponadto, $a(\varphi) = (a_1(\varphi), a_2(\varphi), \ldots, a_m(\varphi))$ jest ciągłą, 2π-okresową względem każdej zmiennej funkcją wektorową, natomiast $A(\varphi)$ jest macierzą kwadratową stopnia n, której elementy $a_{ij}(\varphi)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ są funkcjami ciągłymi okresowymi, o okresie równym 2π. Sformułowane tutaj założenia o funkcjach $a = a(\varphi)$ oraz $A = A(\varphi)$ są zapisywane w postaci $a(\varphi) \in C^o(T_m)$, $A(\varphi) \in C^o(T_m)$, gdzie symbol $C^o(T_m)$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych określonych na torusie T_m.
W rozprawie zakłada się ponadto, że funkcja $a(\varphi)$ spełnia warunek Lipschitza. Założenie to gwarantuje, że problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} & = & a(\varphi) \\ \varphi(0) & = & \varphi_0 \end{cases} \tag{2}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla każdej wartości $\varphi_0 \in T_m$, które oznaczamy przez $\varphi_t(\varphi_0)$. Przyjęte w pracy założenia gwarantują, że rozwiązanie to jest określone na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$.

W dalszym ciągu symbolem $\Omega^t_\tau(\varphi)$ oznacza się macierz fundamentalną układu liniowego

$$\frac{dx}{dt} = A\left(\varphi_t\left(\varphi_0\right)\right)x \tag{3}$$

taką, że $\Omega^t_\tau(\varphi_0)|_{t=\tau} = I_n$, gdzie I_n oznacza n-wymiarową macierz jednostkową.
W trakcie prowadzonych w pracy rozważań, wraz z układem (1) rozpatruje się niejednorodny układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi) \\ \frac{dx}{dt} &= A(\varphi)x + f(\varphi), \end{cases} \tag{4}$$

gdzie $f(\varphi) \in C^o(T_m)$.

Mówimy, że układ (4) posiada **inwariantnego torusa** wyznaczonego równością $x = u(\varphi)$, jeżeli $u(\varphi)$ spełnia równość

$$\dot{u}(\varphi) = A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi)$$

oraz pewne dodatkowe założenia.

Jeżeli istnieje $n \times n$-wymiarowa macierz $C(\varphi) \in C^o(T_m)$ taka, że dla funkcji $G_o(\tau, \varphi)$ postaci

$$G_o(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi)C\left(\varphi_\tau\left(\varphi_0\right)\right) & \text{dla} \quad \tau \leqslant 0 \\ \Omega^0_\tau(\varphi)\left[C\left(\varphi_\tau\left(\varphi_0\right)\right) - I_n\right] & \text{dla} \quad \tau > 0 \end{cases} \tag{5}$$

spełnione jest oszacowanie

$$\|G_o(\tau, \varphi)\| \leqslant Ke^{-\gamma|\tau|}, \tag{6}$$

gdzie K, γ są pewnymi stałymi dodatnimi, to funkcję (5) nazywamy **funkcją Greena-Samoilenki** układu (1).
Pokazuje się, że istnienie funkcji Greena-Samoilenki implikuje, że układ niejednorodny (4) posiada inwariantnego torusa dla każdej ustalonej funkcji $f(\varphi) \in C^o(T_m)$, który możemy przedstawić w postaci całkowej

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_o(\tau, \varphi) f\left(\varphi_\tau\left(\varphi_0\right)\right) d\tau. \tag{7}$$

Podstawowym pojęciem rozpatrywanym w rozprawie doktorskiej, oprócz pojęcia funkcji Greena-Samoilenki, jest pojęcie układu regularnego.
Mianowicie, układ równań różniczkowych (1) nazywa się **układem regularnym**, jeżeli układ ten ma dokładnie jedną funkcję Greena-Samoilenki spełniającą nierówność (6).

Ponadto, układ (1) nazywa się **układem słabo regularnym**, jeżeli istnieje co najmniej jedna funkcja Greena-Samoilenki spełniająca warunek (6).
Jeżeli dla układu (1) istnieje nieskończenie wiele funkcji Greena-Samoilenki spełniających warunek (6), to wtedy układ (1) nazywa się **układem ostro-słabo regularnym**.

Można powiedzieć, że większość rozważań prowadzonych w rozprawie doktorskiej oraz zawartych w niej wyników związana jest z warunkami wystarczającymi na to, żeby układ równań różniczkowych postaci (1) był układem regularnym, słabo regularnym lub też ostro-słabo regularnym. Dotyczy to zarówno wyników natury ogólnej jak też bardzo dużej liczby konkretnych przykładów układów postaci (1), gdzie funkcje $a(\varphi)$ oraz $A(\varphi)$ są zadane w konkretnej postaci (głównie jako kombinacje liniowe funkcji trygonometrycznych sinus i cosinus). Ponadto, wiele wyników pracy ma postać implikacji wywodzących się z założenia o regularności układu (1) lub też z założenia o istnieniu funkcji Greena-Samoilenki.

Warto również zwrócić uwagę na fakt, że bezpośrednie sprawdzenie, czy układ równań różniczkowych jest regularny, jest rzeczą bardzo trudną. W niektórych sytuacjach staje się to możliwe poprzez wyniki związane z konstruowaniem uogólnionej funkcji Lapunowa. Autor przytacza sporo tego typu wyników i ilustruje je odpowiednimi przykładami. Przykłady te z pewnością nie należą do "łatwych" części rozprawy doktorskiej.

W swoich badaniach realizowanych w pracy doktorskiej Autor uzyskał również wiele wyników, które pokazywały, że istnieją układy równań różniczkowych postaci (1) takie, że macierz $A(\varphi)$ jest macierzą stałą, osobliwą, a mimo to układ (1) jest układem regularnym. Tego typu wyniki umieszczone są w podrozdziale 1.2.3.

Rozdział 2 recenzowanej rozprawy rozpatruje zagadnienia regularności liniowych układów równań różniczkowych. Autor rozważa tutaj układy mające postać

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{8}$$

gdzie $A(t)$ jest macierzą kwadratową stopnia n, której elementami są funkcje ciągłe i ograniczone na $\mathbb{R}$. Układ (8) nazywa się **układem regularnym** na $\mathbb{R}$, jeżeli układ niejednorodny

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{9}$$

(przy założeniu, że $f(t)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną na $\mathbb{R}$) ma dokładnie jedno rozwiązanie ograniczone na $\mathbb{R}$. Podobnie definiujemy, kiedy układ (8) jest **słabo regularny** i **ostro-słabo regularny**.
Badanie regularności układu (8) - podobnie jak dla układu (1) - przeprowadza się posiłkując się analogonem funkcji Greena-Samoilenki, którą tutaj nazywa się **funkcją Greena dla układu** (8).

W omawianym rozdziale Doktorant zamieścił również wyniki dotyczące tzw. **dołączania do regularnych układów** (8) **układów słabo regularnych.** Chodzi tutaj o to, że układ słabo regularny można doprowadzić do układu regularnego postaci

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= A(t)x \\ \frac{dy}{dt} &= x - A^T y. \end{cases} \tag{10}$$

Wiele wyników związanych z tym podejściem jest zamieszczonych i zilustrowanych odpowiednimi przykładami w Rozdziale 2.

Ostatni rozdział pracy, Rozdział 3, poświęcony jest przedstawieniu zastosowań teorii regularności omawianych w pracy układów dynamicznych na torusie do badania istnienia rozwiązań pewnych nierówności różniczkowych. Zastosowania te bazują na twierdzeniu mówiącym, że układ równań różniczkowych (1) jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niezdegenerowana forma kwadratowa postaci

$$V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x \rangle ,$$

której pochodna wzdłuż rozwiązań układu (1) jest dodatnio określona.

Podsumowując, chciałbym wyrazić przekonanie, że wyniki uzyskane w rozprawie doktorskiej p. mgr. M. Morawiaka są interesujące i nietrywialne.
Jednakże sposób zredagowania rozprawy nie jest w pełni zadawalajacy. Przede wszystkim, wiele faktów przedstawionych jest w rozprawie dość chaotycznie i w wielu sytuacjach trudno znaleźć definicje pojęć, którymi się w pracy operuje. Definicje te są często porozrzucane po całej pracy.
Niektóre stwierdzenia podawane w pracy nie są w pełni precyzyjne i zrozumiałe. Przykładem może być chociażby pojęcie m-wymiarowego torusa czy też pojęcie funkcji Lapunowa. Odnoszę wrażenie, że Autor rozprawy pisze tekst adresowany do specjalistów bardzo dobrze zorientowanych w tematyce.

Ponadto, Autor popełnił dość dużo drobnych błędów o charakterze językowym i nie tylko. Np. czasami Autor pisze nie po polsku. Przykłady: strona 20_6: "Niech dany jest układ równań"; strona 37^{11} - to samo; strona 38_{11}: "Niech dana jest forma"; strona 67^{10}: "Niech dany jest układ równań"; strona 75_{3-4}: "dla dostatecznie dużych wartościach parametrów"; strona 76_2: "Niech istnieją $n \times n$-wymiarowe macierze". Przykładów takich można podać więcej. Oprócz tego, w Bibliografii, pozycje [31] i [32]: Co to jest za wydawnictwo "Naukowo Naukowe"? Pozycja [21] w Bibliografii: przekręcone nazwisko autora - ma być "Pączko D.".
Koniec końców, trudno jest na podstawie rozprawy ustalić dokładnie nazwisko promotora.

Mimo wielu niedociągnięć uważam pracę doktorską za wartościową i interesującą. W mojej opinni spełnia ona wymogi stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie p. mgr. Marka Morawiaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego i o nadanie Mu stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

Rzeszów, 20 lipca 2023 r.