dr hab. Eliza Jabłońska
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo–Hutnicza im. S. Staszica w Krakowie
e-mail: elizajab@agh.edu.pl

Kraków, 24.07.2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Chisoma P. Okeke
pt. *„Symbolic computation on a new class of functional equations satisfied by polynomial functions”*

W przedłożonej do recenzji rozprawie autor skupia się na scharakteryzowaniu rozwiązań następujących równań funkcyjnych:

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i F(a_i x+b_i y)=yf(x)+xf(y),\qquad x,y\in\mathbb{R},\tag{1}$$

$$F(x+y)-F(x)-F(y)=\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j x+\beta_j y)f(c_j x+d_j y),\qquad x,y\in\mathbb{R}\tag{2}$$

oraz ich uogólnienia

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i F(a_i x+b_i y)=\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j x+\beta_j y)f(c_j x+d_j y),\qquad x,y\in\mathbb{R},\tag{3}$$

gdzie $m,n\in\mathbb{N}$, $\gamma_i,a_i,b_i\in\mathbb{R}$ dla $i\in\{1,\dots,n\}$ i $\alpha_j,\beta_j,c_j,d_j\in\mathbb{R}$ dla $j\in\{1,\dots,m\}$ są ustalone, zaś $f,F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są szukanymi funkcjami. Równania te uogólniają wiele dobrze znanych równań funkcyjnych takich jak: równania Cauchy'ego i Jensena [1)], równanie Drygas'a [2)], równanie funkcji kwadratowej [3)], a także równania rozważane przez Fechnera i Gselmann [4)],

$$F(x+y)-F(x)-F(y)=xf(y)+yf(x),$$

Aczéla [5)],

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x}=f(x+y),\tag{4}$$

Aczéla i Kuczmę [6)],

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x}=f\left(\frac{x+y}{2}\right),\tag{5}$$

czy Koclęgę-Kulpę, Szostoka i Wąsowicza [7)],

$$F(y)-F(x)=(y-x)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(c_i x+d_i y).\tag{6}$$

---

1) M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality.* PWN i Wyd. Uniwersytetu Śląskiego, Warszawa – Kraków – Katowice 1985.

2) H. Drygas', *Quasi-inner products and their applications*, Springer Netherlands (1987), 13–30.

3) J. Aczél, J. Dhombres, *Functional equations in several variables: with applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge – New York – New Rochelle – Melbourne – Sydney 1989.

4) W. Fechner, E. Gselmann, *General and alien solutions of a functional equation and of a functional inequality.* Publ. Math. Deberecen 80 (2012), 143–154.

5) J. Aczél, *A mean value property of quadratic polynomials – without mean values and derivatives.* Math. Magazine 58 (1985), 42–45.

6) J. Aczél, M. Kuczma, *On two mean value properties and functional equations associated with them.* Aequationes Math. 38 (1989), 216–235.

7) B. Koclęga–Kulpa, T. Szostok, S. Wąsowicz, *On functional equations connected with quadrature rules.* Georgian Math. J. 16 (2009), pp. 725–736.

Rosnąca liczba prac dotyczących różnych uogólnień powyżej wspomnianych równań funkcyjnych (obszerna bibliografia znajduje się w ocenianej pracy doktorskiej) jest dobrą motywacją do podjęcia badań nad daleko idącym uogólnieniem (3) tych równań.

We wstępie pracy (nietypowo nazwanym przez autora rozdziałem pierwszym) autor zaznacza, że praca powstała w oparciu o pięć publikacji:

[1] T. Nadhomi, C.P. Okeke, M. Sablik, T. Szostok, *On a new class of functional equations satisfied by polynomial functions.* Aequationes Math. 95 (2021), 1095–1117.

[2] C.P. Okeke, M. Sablik, *Functional equation characterizing polynomial functions and an algorithm.* Results Math. 77, 125 (2022).

[3] C.P. Okeke, *Further results on a new class of functional equations satisfied by polynomial functions.* Results Math. 78, 96 (2023).

[4] C.P. Okeke, M. Sablik, *Characterizing locally polynomial functions on convex subsets of linear spaces.* (submitted).

[5] C.P. Okeke, W. Ogala, T. Nadhomi, *On symbolic computation of C.P. Okeke functional equations using python programming language.* (submitted).

Niestety nie ma żadnej informacji na temat wkładu doktoranta w przygotowanie prac współautorskich.

Rozdział drugi zawiera podstawowe definicje i fakty na temat funkcji wielomianowych oraz lokalnie wielomianowych. Cały rozdział (tak bardzo istotny w dalszych rozważaniach) jest zredagowany dość chaotycznie i nieprecyzyjnie, o czym napiszę w szczegółowych uwagach.

W rozdziale trzecim scharakteryzowano rozwiązania równania (1) (Twierdzenie 3.2.2.), a następnie zastosowano udowodniony rezultat do dwóch uogólnień równania Fechnera-Gselmann:

$$\Delta_y^n F(x) = xf(y) + yf(x), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

$$\Delta_y^n F(x) - n!F(y) = xf(y) + yf(x), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Cały rozdział jest właściwie kopią współautorskiej publikacji [1].

W rozdziale czwartym scharakteryzowano rozwiązania równania (2) (Twierdzenie 4.1.2.) oraz wykorzystano udowodniony rezultat do stworzenia algorytmu rozwiązującego takie równania funkcyjne w zależności od parametrów $\alpha_j, \beta_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}$ dla $j \in \{1, \ldots, m\}$. Rozdział ten jest kopią współautorskiej publikacji [2].

Najbardziej interesujące wydają się być rozdziały piąty i siódmy, oparte odpowiednio na publikacjach [3] i [5]. W rozdziale 5. autor charakteryzuje rozwiązania równania (3) (Twierdzenie 5.1.1.), aby otrzymany rezultat zastosować w rozdziale 7. do stworzenia algorytmu wyznaczającego rozwiązania równania (3). Ponieważ równanie (3) jest uogólnieniem równań (1) i (2), więc Twierdzenie 5.1.1. uogólnia wspomniane Twierdzenia 3.2.2. i 4.1.2., co rodzi pytanie o zasadność zamieszczania rozdziałów 3. i 4. (zajmujących około 30 stron całej blisko 90-stronicowej rozprawy); zapisanie rezultatów z rozdziałów 3. i 4. jako wniosków z Twierdzenia 5.1.1. wydaje się być znacznie korzystniejsze. W rozdziale tym autor pokazuje również zastosowanie udowodnionego twierdzenia do scharakteryzowania rozwiązań równań (4) i (5), a także pewnych szczególnych form równania funkcyjnego (6).

Z kolei w rozdziale szóstym autor charakteryzuje lokalne rozwiązania równania (3) w klasie funkcji $F, f : \mathcal{K} \to \mathbb{K}$, gdzie $\mathcal{K}$ jest niepustym podzbiorem $\mathbb{K}$–wypukłym przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. Ten rozdział jest zredagowany w najmniej staranny sposób. Zawiera wiele błędów i nieścisłości (zostaną omówione w dalszej części recenzji), które wręcz uniemożliwiają zrozumienie istoty rozważanego problemu.

Redakcja rozprawy

Trudno nie oprzeć się wrażeniu, że redakcja rozprawy opierała się na kopiowaniu plików kolejno przygotowanych publikacji w nieco bezkrytyczny sposób: publikacja [1] - rozdział 3., publikacja [2] - rozdział 4. itd., przez co podział treści rozprawy jest raczej nieprzemyślany. Jak już wspomniałam, moim zdaniem wyniki z rozdziałów 3. i 4. powinny zostać umieszczone jako wnioski z rezultatów rozdziału 5., oszczędzając w ten sposób czytelnikowi technicznych dowodów Twierdzeń 3.2.2. i 4.1.2. Podrozdziały 4.2.–4.4. (algorytm rozwiązywania równania (2) wraz z zastosowaniami) wydają się być zbędne, gdyż algorytm z rozdziału 7. obejmuje również podawane w tym rozdziale przypadki. Nie rozumiem też, po co utworzono podrozdziały 4.1.1. i 5.1.1., skoro są to jedyne podrozdziały w podrozdziałach 4.1. i 5.1. Ponadto wydaje mi się, że korzystniejszym byłoby umieszczenie algorytmu z rozdziału 7. jako ostatni podrozdział rozdziału 5., gdyż algorytm ten dotyczy rozwiązań równania rozważanego w rozdziale 5. (nie 6.). Podrozdział 7.2. powinien być raczej zakończeniem pracy, standardowo nienumerowanym (podobnie zresztą jak wstęp).

Dodatkowo tytuły wybranych rozdziałów i podrozdziałów są zupełnie niesugestywne; tytuły rozdziałów 3.–7. odpowiadają tytułom publikacji [1]–[5]. Numery równań ze wstępu powinny zostać wykorzystane w tytułach rozdziałów 3.–7., aby tytuł rozdziału 3. sugerował rozważania nad równaniem (1), rozdziału 4. – nad równaniem (2), zaś tytuły rozdziałów 5. i 6. – nad równaniem (3).

Choć wspomniane kopiowanie kolejnych publikacji do kolejnych rozdziałów rozprawy miało wiele negatywnych skutków, to dzięki temu możemy łatwo śledzić rozwój naukowy doktoranta; pierwsze dwie prace są współautorskie i zapewne wprowadzają doktoranta w tematykę badanego zagadnienia, ale w trzeciej pracy doktorant już samodzielnie uogólnia wyniki z poprzednich prac, stosując wcześniej poznane narzędzia, dzięki czemu nie ma wątpliwości co do rozumienia tematu badawczego oraz umiejętności samodzielnego prowadzenia pracy naukowej przez doktoranta.

Nieczytelna jest też numeracja równań; to samo równanie ma kilka numerów, np. równanie Fechnera-Gselmann ma numery (1.0.1), (3.2.1), (5.1.9), (6.2.1). Ponadto, w podrozdziale 6.1, autor odbiegł od przyjętej wcześniej konwencji nadawania kolejnych numerów równaniom, określając je przez (E_M), (E_{-1}), (*), (**).

Rozprawa napisana jest w języku angielskim. Nie czuję się specjalistką w tej dziedzinie, ale w pracy występuje kilka ewidentnych błędów językowych, np. 1_{11} powinno być *their particular forms*, na str. 8. jest *Sablik Lemma* zamiast *the Sablik Lemma* albo *Sablik's Lemma*, w Remarku 3.2.5. jest *these equation*, 23_6 jest *the sequences* $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$, 40_5 powinno być *to admit*, 71^1 powinno być *there exists*, 73_7 powinno być *equations* 73_6 powinno być *F has* itd.

Podejrzewam, że napisanie streszczenia w języku polskim było dla doktoranta sporym wyzwaniem. Da się w nim zauważyć zbyt dosłowne tłumaczenie z języka angielskiego, które, oprócz wielu niedociągnięć językowych i interpunkcyjnych, zawiera kilka bezsensownych sformułowań, np. *Maple jest mniej elastyczny w użyciu i stanowi tylko niewielką część akademickiej społeczności naukowej.*

W pracy występują też inne niedociągnięcia redakcyjne, tj.:

- numeracja wzorów we wstępie nie powinna zawierać zer,
- duże litery w środku zdania w niektórych tytułach rozdziałów i podrozdziałów,
- niektóre zdania powinny być podzielone na dwa, np. 19_{18-19}, 19_{4-5}, 24_{5-6}, 47_{8-9}, 57^{3-4}, 59^1 itd.,
- brak wcięć akapitowych, zwłaszcza w rozdziałach 5. i 6.,
- wprowadzenia do rozdziałów i podrozdziałów są w większości skopiowanymi fragmentami ze wstępu do całej pracy, zwłaszcza wstępy do podrozdziału 5.1. oraz rozdziału 7.,

- wypowiedzi definicji i uwag piszemy zwyczajowo prostą czcionką,
- braki spacji, np. 21_7, 59_6, a także w bibliografii,
- połowicznie pusta strona 61., niedokończone linie 63_{10}, 63_3, 64^1, 65^1 itd.,
- redakcja wzorów (6.2.10), (6.2.17) – (6.2.23).

Uwagi merytoryczne

- Definicje 2.1.1. i 2.2.1.: zamiast $\Delta^{n+1}_{y_{n+1}\ldots y_1} f(x)$ powinno być $\Delta_{y_{n+1}\ldots y_1} f(x)$.

  Skoro autor wyjaśnia symbol $\Delta^{n+1}_h f(x)$, to chyba warto byłoby też wprowadzić symbol $\Delta_{y_{n+1}\ldots y_1} f(x)$.
- Definicja 2.1.2. i Twierdzenie 2.1.1.: brak informacji o G, H. Jeśli przyjmiemy, że autor wciąż ma na myśli grupy abelowe (jak na początku rozdziału), to w Twierdzeniu 2.1.1. takie założenie jest niewystarczające!
- Dowód Twierdzenia 2.1.1. w przypadku funkcji addytywnej odwzorowującej przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ jest zbędny jako dobrze znany; wystarczy zacytować choćby monografię Kuczmy (zob. [1)]).
- Twierdzenie 2.1.2.: przy notacji addytywnej półgrupy $(G, +)$ mówimy o półgrupie z zerem, a nie z jedynką.
- Należałoby dopisać wniosek z Twierdzenia 2.1.2. o postaci funkcji jednomianowej (autor często korzysta z tego faktu).
- Twierdzenie 2.2.1.: jako źródło powinna być cytowana praca [35, Theorem 9.5], gdyż jest to rezultat Székelyhidi'ego.
- W Definicji 2.2.3. autor używa pojęcia *zbiór wypukły* dla zbioru $\mathbb{K}$–wypukłego, z kolei na str. 69 pojęcia *zbiór* $\mathbb{K}$*–wypukły*. Przyjęta notacja powinna być jednolita.
- 9^{11}: powinno być *(3.1.3)* w miejscu *(3.1.1)*.
- 9_{17}: powinno być *left–hand* w miejscu *right–hand*.
- 12_9: powinno być *(3.2.9)* w miejscu *(4.1.5)*.
- Twierdzenie 3.2.2.: na początku zostało ustalone k, więc założenie $S_k \neq 0,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ powinno zostać zastąpione przez $S_k \neq 0$.
- Twierdzenie 3.2.2.: skoro już autor zdecydował się na zamieszczenie rozdziałów ze szczególnymi postaciami równania (3), to po Twierdzeniu 3.2.2. powinien rozważyć również przypadek $S_k = 0$ (uzupełnienie znajdujemy dopiero w rozdziale 5. dla ogólniejszego równania (3)). Ponadto, w Twierdzeniu 3.2.2. *(ii)* powinien znaleźć się warunek $F(x) = \frac{2}{S_k} x f(x)$.
- 17^{8-9}: sformułowanie *after some easy though tedious calculations* jest usprawiedliwione w publikacji, jednak w rozprawie doktorskiej wszystkie przekształcenia (nawet te żmudne) powinny zostać zamieszczone. Chciałabym zobaczyć je podczas obrony rozprawy doktorskiej.

  Analogiczna uwaga dotyczy wyrażenia *rather easily* w Uwadze 3.2.3.

- Przykład 3.2.2.: należy wykazać, jak z Lematu 3.1.1. otrzymujemy, że f jest funkcją wielomianową co najwyżej 2-go rzędu (metoda staje się zrozumiała dopiero w dowodzie Lematu 3.2.1.).

  Analogiczna uwaga dotyczy dowodów Twierdzeń 5.2.3. i 5.2.4. oraz Przykładu 5.2.4.

- Przykłady 3.2.2. i 3.2.3.: równania (3.2.35) i (3.2.36) są szczególnymi postaciami ogólniejszego równania

$$F(x) - 2^n F\left(\frac{x+y}{2}\right) + F(y) = xf(y) + yf(x), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

  z pewnym $n \in \mathbb{N}$, a użyte w obu przykładach metody pokazują, że wystarczyłoby umieścić jeden przykład.

- Twierdzenie 4.1.2.: pojęcie funkcji k–jednomianowej nie zostało wprowadzone, więc autor powinien napisać precyzyjnie, że f *jest jednomianem stopnia co najwyżej* k.

  Podobna uwaga dotyczy Twierdzenia 6.2.2.

- Twierdzenie 4.1.2.: jeśli się nie mylę, w dowodzie całego twierdzenia autor wykorzystuje założenie $R_k \neq 0$ tylko dla $k = 0$, a jest ono łatwe do pominięcia; wystarczy osłabić tezę w przypadku $k = 0$, pisząc, że f *jest stała, zaś* F *jest dowolną funkcją addytywną.*

  Podobna uwaga dotyczy Twierdzeń 5.1.1. oraz 6.2.2.

- 27_7: co to znaczy, że B_3 jest generowana przez $xA_2^*(x)$? Ponadto autor powinien precyzyjnie napisać, że $f = A_2$ i $F = B_3^*$.

- Dobór przykładów w podrozdziale 4.4. nie jest satysfakcjonujący; brakuje równań funkcyjnych, których prawa strona równania (2) nie jest uproszczonej postaci

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i y f(\beta_i x) + \gamma_i x f(\delta_i y)\right).$$

- Uwaga 4.4.1. na końcu rozdziału 4. to niepotrzebna zapowiedź rozdziału 5. W dodatku pierwsze zdanie sugeruje zapowiedź kolejnej publikacji, a nie kolejnego rozdziału (wspomniany wcześniej efekt kopiowania publikacji).

- Symbol L_k w (5.1.10) jest wprowadzony dla tej samej sumy, co symbol S_k w (3.2.12).

- Proposition 5.1.2. wymaga choćby krótkiego uzasadnienia.

- Uwaga 5.2.1.: zamiast krótkiej uwagi, korzystniej byłoby pokazać zastosowanie Twierdzenia 5.1.1. do scharakteryzowania rozwiązań wspomnianego w niej równania (6).

- W Twierdzeniach 5.2.3. i 5.2.4. oraz Przykładzie 5.2.4. zapis $y = x + y$ jest dość nieprecyzyjny. W takich sytuacjach lepiej zapisać słownie wykonywane podstawienie.

- Uwaga 5.2.4. jest raczej niekonieczna; wystarczy, że autor cytuje [Theorem 5, 2] w Przykładzie 5.2.3.

- Uwaga 5.2.5. jest zbędna (autor wspomniał już o tym we wstępie do rozprawy).

- Uwaga 5.2.7. jest raczej zbędną zapowiedzią rozdziałów 6. i 7. Ponadto Uwaga 5.2.7 jest dla mnie zupełnie niezrozumiała. Co to znaczy, że równanie jest rozpatrywane przy założeniu $x = y \in \mathbb{R}$? Podobnie nie rozumiem sformułowania podpunktu a).

W dalszej części pracy, w podrozdziale 6.2.4., autor nawiązuje do tej uwagi, jednak brak wystarczającej precyzji we wprowadzeniu do równania (6.2.33) powoduje, że można tylko domniemywać istotę rozpatrywanego problemu. Co to znaczy *Let us consider the case* $x \neq y \in \mathcal{K}$? Czy chodzi o rozważanie równania (6.2.28) jako równania warunkowego? Dla jakich x, z rozważane jest równanie (6.2.33)? Bez tych informacji nie jestem w stanie zweryfikować poprawności dowodu Twierdzenia 6.2.2. Już w pierwszej linii pojawia się wątpliwość co do możliwości podstawienia $x = z$ w (6.2.33): czy $(2-\beta_j)x, (2-\lambda_i)x \in \mathcal{K}$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$ i $j \in \{1, \dots, m\}$?

- 65^{10}: treść rezultatu Gera z [14] powinna zostać zacytowana w rozdziale 2. z wiadomościami wstępnymi.

- Wniosek 6.1.2. powinien zostać uzupełniony o dowód.

- 66^{11}: zamiast $\{0, \dots, 2\}$ raczej preferowałabym $\{0, 1, 2\}$; podobna uwaga dotyczy zbioru $\{0, \dots, 3\}$ na str. 66–67.

- 66^{19}: sformułowanie *using similar argument in Chapter 3* jest niewystarczające – należy sprecyzować dokładnie, o które miejsce chodzi.

- 66_5: brak cytowania pracy Ridel i Sahoo.

- Twierdzenie 6.2.2.: inkluzja $[0, 1] \cap \mathbb{K} \subset \mathbb{Q}$ oznacza, że $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, a zatem należałoby ją zastąpić przez $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Podsumowanie

Chociaż rozprawa została zredagowana w sposób budzący pewne zastrzeżenia, to zawiera merytorycznie poprawne rezultaty (mam nadzieję, że doktorant rozwieje moje wątpliwości co do wartości merytorycznej podrozdziału 6.2.4. podczas obrony rozprawy doktorskiej). Imponujący jest też dorobek publikacyjny doktoranta: trzy opublikowane prace w czasopismach 70–100 pkt., z czego jedna samodzielna, a także dwie prace wysłane do recenzji. Autor nie precyzuje, jaki był jego wkład w powstanie publikacji współautorskich, jednak rezultaty z samodzielnej publikacji opublikowanej w czasopiśmie za 100 pkt. (zawarte w rozdziale 5.) wskazują na **dobry ogólny poziom wiedzy teoretycznej kandydata w dyscyplinie matematyka oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej**. Dlatego uważam, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Chisoma P. Okeke do dalszych etapów przewodu doktorskiego.