Rzeszów, 20 lipca 2023 r.

dr hab. Jacek Chudziak, prof. UR
Instytut Matematyki
Uniwersytet Rzeszowski

Recenzja pracy doktorskiej Pana magistra Chisoma Prince Okeke

Symbolic computation on a new class of functional equations

1. Uwagi wstępne

Przedstawiona rozprawa doktorska została przygotowana w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach pod opieką naukową prof. dra hab. Macieja Sablika. Licząca 87 stron praca napisana jest w języku angielskimi i składa się ze wstępu, sześciu rozdziałów oraz bibliografii zawierającej 40 pozycji. Ponadto rozprawa zawiera streszczenia w języku angielskim i w języku polskim. Ponieważ Autor traktuje wstęp jako pierwszy rozdział pracy, w dalszym ciągu stosuję przyjętą w niej numerację rozdziałów.

Zgodnie z deklaracją doktoranta wszystkie wyniki zaprezentowane w rozprawie pochodzą z publikacji:

[1] T. Nadhomi, C. P. Okeke, M. Sablik, T. Szostok, On a new class of functional equations satisfied by polynomial functions, Aequationes Math. 95 (2016), 1095–1117,

[2] C. P. Okeke, M. Sablik, Functional equations characterizing polynomial functions and an algorithm, Results Math. 77 (2022), 125,

[3] C. P. Okeke, Further results on a new class of functional equations satisfied by polynomial functions, Results Math. 78 (2023), 96

oraz z następujących dwóch prac, które nie były opublikowane w momencie składania rozprawy:

[4] C. P. Okeke, W. Ogala, T. Nadhomi, On symbolic computation of C.P. Okeke functional equations using python programming language,

[5] C. P. Okeke, M. Sablik, Characterizing locally polynomial functions on convex subsets of linear spaces.

2. Omówienie głównych wyników rozprawy

W rozprawie rozważane są rozwiązania szerokiej klasy równań funkcyjnych będących uogólnieniami równania

$$F(x+y) - F(x) - F(y) = xf(y) + yf(x) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

badanego wcześniej przez W. Fechnera i E. Gselmann. Rozdział drugi zawiera podstawowe pojęcia i fakty dotyczące funkcji wielomianowych. W kolejnych pięciu rozdziałach przedstawione są główne wyniki pracy.

W rozdziale trzecim Autor prezentuje wyniki zawarte w pracy [1]. Dotyczą one przede wszystkim rozwiązań równania funkcyjnego

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i F(\alpha_i x + \beta_i y) = xf(y) + yf(x) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ i $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}$ dla $i \in \{1, ..., n\}$ są ustalone, zaś $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są szukanymi funkcjami. Zauważmy, że równanie (2) jest naturalnym uogólnieniem równania (1). W drugiej części rozdziału rozważane są inne uogólnienia równania (1), a mianowicie

$$\Delta_y^n F(x) = xf(y) + yf(x) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{3}$$

oraz

$$\Delta_y^n F(x) - n!F(y) = xf(y) + yf(x) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest ustalone, Δ_y jest operatorem Frécheta i $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są szukanymi funkcjami. Autor prezentuje również wynik dotyczący rozwiązań równania

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i F(x + \beta_i y) + \gamma_{n+1} F(y) = xf(y) + yf(x) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ i $\beta_i \in \mathbb{Q}$ dla $i \in \{1, ..., n\}$ są ustalone, zaś $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są szukanymi funkcjami. Ważnym narzędziem stosowanym w tym rozdziale jest Lemat Sablika (Lemma 3.1.1), który pozwala stwierdzić, że jeżeli para funkcji (F, f) spełnia równanie (2), to f jest funkcją wielomianową. Przy dodatkowych założeniach można pokazać, że F również jest funkcją wielomianową (Proposition 3.2.2 i Proposition 3.2.3). Należy jednak podkreślić, że bez dodatkowych założeń, funkcja F nie musi wielomianowa (Example 3.2.1). Głównym wynikiem tej części rozprawy jest twierdzenie, w którym autor pokazuje, że jeżeli para (F, f) spełnia równanie (2), f jest funkcją jednomianową rzędu $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, F jest funkcją jednomianową rzędu $k + 1$ i $S_k := \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (\alpha_i + \beta_i)^{k+1} \neq 0$, to:

- w przypadku, gdy $k = 0$ lub $k \geqslant 2$, funkcje f i F są ciągłe;
- w przypadku, gdy $k = 1$, mamy następującą sytuację:
  1. jeżeli $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_i^2 \neq 0$ i $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \beta_i^2 \neq 0$, to $f = F = 0$;
  2. jeżeli $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \beta_i^2 = 0$, to f jest dowolną funkcją addytywną oraz
  $$F(x) = \frac{2}{S_1} xf(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kolejne dwa twierdzenia dotyczą rozwiązań równań (3) i (4). Pierwsze z twierdzeń mówi, że para (F, f) spełnia równanie (3) wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ i F jest funkcją wielomianową rzędu co najwyżej $n - 1$. W drugim z wymienionych twierdzeń doktorant pokazuje, że jeżeli $n > 2$ i para (F, f) spełnia równanie (4), to $f = 0$, zaś F jest funkcją jednomianową rzędu n. Przypadek $n = 1$ jest rozważony wcześniej (Proposition 3.2.1). Autor dowodzi również (Proposition 3.2.3), że jeżeli para funkcji (F, f) spełnia równanie (5), to funkcje f i F są wielomianowe.

Rozdział czwarty, oparty na wynikach z pracy [2], poświęcony jest rozwiązaniom równania funkcyjnego

$$F(x + y) - F(x) - F(y) = \sum_{i=1}^{m} (a_i x + b_i y) f(\alpha_i x + \beta_i y) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

gdzie $m \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ i $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}$ dla $i \in \{1, ..., m\}$ są ustalone, zaś $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są szukanymi funkcjami. Najpierw (Theorem 4.1.1) Autor stwierdza, że jeżeli para (F, f) spełnia równanie (6) i istnieje takie $i \in \{1, ..., m\}$, że

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ a_i & b_i \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7}$$

to f jest funkcją wielomianową stopnia co najwyżej $2m$ i F jest funkcją wielomianową stopnia co najwyżej $2m+1$. Następnie rozważa rozwiązania (F, f) równania (6) przy założeniu, że f jest funkcją jednomianową rzędu $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, zaś F jest funkcją jednomianową rzędu $k+1$. Rozwiązań takich dotyczy główny rezultat tego rozdziału (Theorem 4.1.2). Kolejny wynik (Corollary 4.1.1) mówi o rozwiązaniach równania (6) w przypadku, gdy spełniony jest dodatkowy warunek $a_i \alpha_i = b_i \beta_i = 0$ dla $i \in \{1, ..., m\}$. W końcowej części rozdziału podany jest algorytm wyznaczania rozwiązań równania (6) w tym przypadku. Pokazane są również przykłady zastosowań zaproponowanego algorytmu.

Rozdział piąty zawiera wyniki z pracy [3]. Autor rozważa w nim równanie funkcyjne

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i F(a_i x + b_i y) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i x + \beta_i y) f(c_i x + d_i y) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ i $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ dla $i \in \{1, ..., n\}$ oraz $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ i $c_j, d_j \in \mathbb{Q}$ dla $j \in \{1, ..., m\}$ są ustalone, zaś $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są szukanymi funkcjami. Nietrudno zauważyć, że równanie (8) jest wspólnym uogólnieniem równań (2) i (6). W pierwszej części rozdziału w bardzo ogólny sposób przedstawione są argumenty, na podstawie których doktorant stwierdza, że jeżeli para funkcji (F, f) spełnia równanie (8), to przy pewnych dodatkowych założeniach każda z nich jest funkcją wielomianową. Fakt ten stanowi motywację do rozważania rozwiązań równania (8) w klasie par funkcji (F, f), gdzie f jest funkcją jednomianową rzędu $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, zaś F jest funkcją jednomianową rzędu $k+1$. Takim rozwiązaniom poświęcony jest główny wynik rozdziału piątego (Theorem 5.1.1). W drugiej części rozdziału pokazane są zastosowania tego twierdzenia (i Lematu Sablika) do wyznaczania rozwiązań szeregu równań funkcyjnych będących szczególnymi przypadkami równania (8). Warto wspomnieć, że równania te mają rozmaite naturalne źródła i były rozważane przez wielu autorów.

W pierwszej części rozdziału szóstego przedstawiona jest lokalna wersja Lematu Sablika (Lemma 6.1.1). Następnie pokazane są przykłady zastosowań tego rezultatu do wyznaczania rozwiązań kilku szczególnych przypadków lokalnego odpowiednika równania (8).

W rozdziale siódmym zaprezentowany jest algorytm wyznaczania rozwiązań równania (8), zbudowany głównie w oparciu o rezultaty przedstawione w rozdziałach trzecim i piątym. Autor ilustruje jego działanie na wybranych przykładach.

3. **Ocena pracy**

Tematyka podjęta w rozprawie jest interesująca i aktualna, zaś przedstawione wyniki są oryginalnymi rozwiązaniami badanych problemów. Równanie postaci (8) jest uogólnieniem znanych równań funkcyjnych, które były przedmiotem zainteresowania wielu badaczy. Zaproponowane w rozprawie ujednolicone podejście do tego typu równań zasługuje na uznanie. Pozytywnie oceniam również pomysł stworzenia algorytmu pozwalającego wyznaczać rozwiązania równania (8). Prezentowanie rozumowania są na ogół elementarne, ale wymagają pomysłowości. Warto podkreślić, że większość wyników zawartych w pracy jest owocem badań prowadzonych we współpracy z innymi naukowcami. W mojej ocenie wskazane byłoby zatem podanie przynajmniej ogólnych informacji dotyczących wkładu magistra Okeke w uzyskanie poszczególnych rezultatów.

Według mnie tytuł rozprawy nie odpowiada w pełni jej treści, sugerując, że głównym zagadnieniem badanym w pracy jest wspomniany wcześniej algorytm. W istocie jest on jedynie zwieńczeniem pracy, wykorzystującym szereg uzyskanych wcześniej wyników dotyczących rozwiązań równania (8).

Przejdę teraz do omówienia dwóch kwestii dotyczących merytorycznej zawartości pracy, do których mam największe zastrzeżenia.

Na początku rozdziału trzeciego autor rozprawy stwierdza, że Lemat Sablika odgrywa kluczową rolę w całej pracy. W dalszej części tego rozdziału (Example 3.2.1) zauważa, że w przypadku równania (2) Lemat Sablika nie pozwala na ogół stwierdzić, że F jest funkcją wielomianową.

Doktorant ma również świadomość tego, że podobna sytuacja występuje w przypadku równania (6), przy czym zastosowanie Lematu Sablika na ogół nie pozwala tu nawet rozstrzygnąć, czy funkcja f jest wielomianowa. Świadczy o tym przedstawiona w rozdziale czwartym szczegółowa analiza dotycząca warunku (7) oraz zamieszczony po niej przykład (Remark 4.1.1 i Example 4.1.1). Wbrew tym spostrzeżeniom magister Okeke stwierdza (Theorem 4.1.1), że jeżeli para funkcji (F, f) spełnia równanie (6) i dla pewnego $i \in \{1, ..., m\}$ zachodzi warunek (7), to f jest funkcją wielomianową stopnia co najwyżej $2m$, zaś F jest funkcją wielomianową stopnia co najwyżej $2m + 1$. Moim zdaniem w twierdzeniu tym pominięte zostało założenie, które autor formułuje w rozdziale trzecim (w wierszu 3 na s. 18). Podobne zastrzeżenia odnoszą się do argumentacji zamieszczonej w pierwszej części rozdziału piątego. Ponadto wniosek (Corollary 4.1.1) również nie jest prawdziwy. Istotnie, np. równanie

$$F(x + y) - F(x) - F(y) = xf(-y) - xf(y) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

jest spełnione przez dowolną parę funkcji (F, f), gdzie F jest funkcją addytywną i f jest funkcją nieparzystą. Warto pokreślić, że dodanie wspomnianego wcześniej założenia powoduje, że wniosek odnosi się jedynie do równań, które w prosty sposób można sprowadzić do równania (2). W przypadku takich równań użyteczność algorytmu, opisanego w drugiej części rozdziału trzeciego, jest znikoma. W przypadku dowolnego równania spełniającego warunki (4.1.3) i (4.1.25) algorytm może być stosowany jedynie do wyznaczania rozwiązań w klasie par funkcji wielomianowych.

Drugie istotne zastrzeżenie dotyczy analizy przykładów zamieszczonych w rozdziale piątym. Główny rezultat tego rozdziału (Theorem 5.1.1) udowodniony jest przy założeniu, że $L_k := \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(a_i + b_i)^{k+1} \neq 0$ i $R_k := \sum_{i=1}^{m}(\alpha_j + \beta_j)(c_j + d_j)^k \neq 0$. Niestety, we wszystkich przykładach analizowanych przez autora, poza raczej trywialnym przypadkiem równania (5.2.13) (Example 5.2.1), mamy $L_k = R_k = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Według mnie problem ten można rozwiązać stosując odpowiednie podstawienia. Wymaga to jednak przedstawienia poprawnej argumentacji, gdyż ta, która znajduje się w rozprawie, jest w każdym ze wspomnianych wcześniej przypadków błędna.

Przejdę teraz do omówienia usterek, które zauważyłem w rozprawie.

1. Kluczową rolę w pracy odgrywa pojęcie funkcji wielomianowej. W rozdziale pierwszym wprowadzona jest definicja funkcji wielomianowej i podane są dwa wyniki dotyczące postaci takich funkcji (Theorem 2.1.2 i Corollary 2.1.1). W dalszej części rozprawy pan Okeke wielokrotnie korzysta z różnych własności funkcji wielomianowych, bez odwołań do literatury. W szczególności nie odwołuje się do wyników zamieszczonych w podrozdziale 15.9 monografii M. Kuczmy *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*, 2nd edn., Birkhäuser, Berlin (2009). Dodajmy, że monografia ta w ogóle nie jest cytowana w rozprawie, co może budzić zdziwienie.

2. Operator występujący po prawej stronie równania (2.1.1) nie jest zdefiniowany w rozprawie. Ponadto w pracy nie podano definicji funkcji jednomianowej.

3. W pierwszym z twierdzeń zamieszczonych na s. 5 brak założenia dotyczącego podzielności grup G i H. Bez tego założenia wypowiedź twierdzenia nie ma sensu.

4. Na s. 7, w wierszach 19-20, powtórzone jest zdanie sformułowane w wierszach 18-19.

5. Na s. 9, w wierszu 9 i na s. 61, w wierszu 8, zamiast $M > -1$ powinno być $M \geqslant -1$.

6. Na s. 9, w wierszu 20, zamiast „the right-hand side" powinno być „the left-hand side".

7. Na s. 9, w wierszu 3 od dołu, zamiast $\alpha(x)\beta(y)$ powinno być $\alpha(x) + \beta(y)$.

8. Na s. 11, w wierszu 5, zamiast „degree not greater than" powinno być „order at most" (por. Definition 2.1.1). Z kolei, np. na s. 19, w wierszu 16 od dołu, czy na s. 20, w wierszu 7, zamiast „order not greater than" powinno być „order at most".

9. Na s. 12, w wierszu 9 od dołu, zamiast (4.1.5) powinno być (3.2.9).

10. Na s. 13, w wierszu 11 od dołu, zamiast $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_i^2 \neq 0 \neq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \beta_i^2$ powinno być $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_i^2 \neq 0$ or $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \beta_i^2 \neq 0$.

11. Na s. 13, w warunku (3.2.14), w pierwszym członie nie powinien występować czynnik β_i, zaś w drugim nie powinien występować czynnik α_i.

12. Stwierdzenie występujące w pierwszym wierszu na s. 17 powinno być szczegółowo uzasadnione.

13. Na s. 19, w wierszu 6 od dołu i na s. 20, w wierszu 16, zamiast „of order $2n+1$" powinno być „of order at most $2n+1$".

14. Na s. 20, w wierszu 11 od dołu, znajduje się odwołanie do wcześniejszego wyniku (Theorem 3.2.2), przy jednoczesnym stwierdzeniu, że jego założenie nie jest spełnione ($S_k = 0$). Ta kwestia wymaga precyzyjnego wyjaśnienia.

15. Nie jest jasne, jaką rolę w dowodzie Proposition 3.2.3 odgrywa Theorem 3.2.2 (por. komentarz poprzedzający Proposition 3.2.3).

16. W twierdzeniu 4.1.2, w części (b) tezy (ii), sformułowanie „for each" można zastąpić przez „for some" w przypadku, gdy $k = 1$ (co jest oczywiste) i w przypadku, gdy $k = 2$ (co wynika z analizy dowodu). Warto rozstrzygnąć tę kwestię dla $k \geqslant 3$. Uwaga ta dotyczy również wyników zamieszczonych w rozdziale piątym (Theorem 5.1.1) i rozdziale szóstym (Theorem 6.2.2). Zauważmy ponadto, że w każdym z tych twierdzeń ostatnie zdanie jest niefortunnie sformułowane i może sugerować, że twierdzenie obejmuje wszystkie przypadki, w których funkcja f nie jest zerowa.

17. Na s. 26, we wzorze (4.1.10), w przedostatnim składniku brak czynnika α_i.

18. Alternatywa przedstawiona na s. 27, w wierszach 9-10, nie jest prawdziwa. Wobec tego dalsza część rozumowania wymaga korekty. Podobna uwaga dotyczy alternatyw występujących na s. 43, w wierszach 3-4 oraz na s. 45, w wierszach 3-4.

19. Na s. 28, w wierszu 6, zamiast $-D_k[xA_k^*(x) - yA_k^*(y)]$ powinno być $-D_k[xA_k^*(x) + yA_k^*(y)]$.

20. Rozumowanie zamieszczone na s. 28, bezpośrednio po równości (4.1.20), powinno zostać doprecyzowane.

21. Na s. 31, w wierszu 4, zamiast „(4.1.3) and (4.1.25)" powinno być „(4.1.3) or (4.1.25)". Ponadto na tej samej stronie, w wierszu 6, zamiast Example 1 powinno być Example 4.1.1.

22. Na s. 35, w wierszu 2 od dołu, należy usunąć odwołanie do (4.4.6).

23. Sformułowanie występujące na s. 39, w wierszu 6 od dołu, nie jest precyzyjne (wymaga założenia, że (a_n, b_n) jest jedyną parą równą $(0,0)$).

24. Na s. 41, w wierszach 14 i 18, zamiast if powinno być If. Ponadto nie jest jasne, dlaczego w wierszu 18 jest mowa o funkcji addytywnej.

25. Na s. 45, w zdaniu rozpoczynającym się w wierszu 12, brak uzasadnienia dla przedstawionej alternatywy. Powinna ona być zastąpiona układem dwóch warunków prowadzącym do tezy twierdzenia. Podobny problem występuje na s. 73, w zdaniu rozpoczynającym się w wierszu 13.

26. Na s. 46, w wierszu 1, powinno być $A_0 \neq 0$, zaś w wierszu 3 należy dodać założenie, że funkcja A_1 nie jest zerowa. Ponadto pierwsze zdanie w wierszu 10 na tej samej stronie jest zbędne.

27. W przypadku równań (5.2.15) i (5.2.18) wymagane jest założenie, że $x \neq y$.

28. Na s. 63, w wierszu 17, brak czynnika $\binom{q}{s'}\binom{M+1-q}{t'}$.

29. Na s. 64, w wierszu 14, zamiast X powinno być x.

30. Na s. 68, argumentacja przedstawiona w wierszu 10 nie jest poprawna.

31. Warunki (6.2.29) i (6.2.30) na s. 69 oraz warunek (6.2.31) na s. 70 można sformułować w znacznie prostszy sposób.

32. Wartość parametru k w lemacie 6.2.1 wymaga weryfikacji.

33. Na s. 70, na końcu dwóch zdań brak kropki. Ponadto zdanie zamieszczone bezpośrednio po równości (6.2.32) powinno rozpoczynać się od If.

34. Na s. 73, w wierszach 7 od dołu i 5 od dołu, zamiast (6.2.34) powinno być (6.2.33).

Większość ze wskazanych przeze mnie uchybień nie wpływa w istotny sposób na ocenę merytorycznej zawartości pracy. Chciałbym natomiast zaznaczyć, że niektóre z nich znacząco obniżają jej ogólny poziom. Niemniej jednak, moja ocena rozprawy jest pozytywna.

4. **Konkluzja**

Przedstawiona praca stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego i prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną autora w dyscyplinie matematyka. Rozprawa pokazuje również, że pan Okeke posiada umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej w dyscyplinie matematyka. Wobec tego stwierdzam, że rozprawa spełnia warunki określone w art. 187 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2023 r. poz. 742, 1088 i 1234) i **wnioskuję o dopuszczenie magistra Chisoma Prince Okeke do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.**