dr hab. Włodzimierz Fechner
Instytut Matematyki
Politechniki Łódzkiej

Recenzja rozprawy doktorskiej

SYMBOLIC COMPUTATION ON A NEW CLASS OF FUNCTIONAL EQUATIONS

autorstwa

mgra Chisom Prince Okeke

Recenzowana rozprawa jest poświęcona równaniom funkcyjnym spełnianym przez funkcje wielomianowe. Można ją podzielić na dwie przecinające się części: rozważania teoretyczne i kody komputerowe. Autor rozwiązuje kilka równań funkcyjnych, które mają skomplikowaną postać, oraz uogólnia szereg wcześniejszych wyników. Oprócz tego podaje kilka algorytmów, jeden zaimplementowany w Maple i jeden w języku Python, które pozwalają znaleźć rozwiązania dla klasy równań funkcyjnych z wykorzystaniem wyników teoretycznych udowodnionych w rozprawie. Część teoretyczna jest kontynuacją badań wielu autorów, w tym recenzenta. Dlatego wyniki niniejszej rozprawy doktorskiej, zarówno teoretyczne, jak i obliczeniowe, są dobrze umotywowane i są przedmiotem zainteresowania znacznej grupy naukowców.

Rozprawa podzielona jest na siedem rozdziałów; zamieszczono streszczenia w języku angielskim i polskim. Zawiera 87 numerowanych stron.

Pierwszy krótki rozdział ma charakter wprowadzający, zawiera m.in listę kilku równań funkcyjnych znanych z literatury oraz kilka wspólnych uogólnień, które stanowią główny temat recenzowanej rozprawy.

W rozdziale drugim Autor przypomina definicje funkcji addytywnych, wielomianowych i lokalnie wielomianowych oraz podstawowe fakty na ich temat.

Pierwsza część głównych wyników teoretycznych pracy zawarta jest w rozdziale 3. Autor formułuje i udowadnia lemat, który jest modyfikacją wyniku Macieja Sablika z 2000 roku. Podaje warunki, pod którymi dana funkcja jest funkcją wielomianową. Ponadto podane jest oszacowanie górne jego stopnia. Wynik ten odgrywa fundamentalną rolę dla dalszych rozważań Autora. W kolejnych rozdziałach Autor pokazuje, jak można rozwiązać szereg znanych równań wykorzystując ten lemat.

Rozdział 4 dotyczy uogólnienia równania zbadanego przez Eszter Gselmann i recenzenta w 2012 r. (równanie (4.1.1) w rozprawie). Autor najpierw pokazuje korzystając z lematu Sablika z poprzedniego rozdziału, że przy dodatkowym warunku mówiącym, że równanie jest w pewnym sensie niezdegenerowane, jego rozwiązaniami są funkcje wielomianowe. Ponadto znane jest oszacowanie ich stopni. Następnie, wykorzystując ten fakt i wykonując obliczenia, podano pełny opis rozwiązań. W dalszej części rozdziału 4 przedstawiono algorytm rozwiązywania szczególnych przypadków tego równania oraz podano implementację w Maple. Ta część rozprawy jest ściśle związana z wcześniejszymi pracami matematyków węgierskich, którzy wykorzystali klasyczny wynik Laszlo Székelyhidiego i stworzyli podobny kod komputerowy. Rozdział kończy się kilkoma zastosowaniami tego kodu.

Rozdział 5 jest poświęcony innemu równaniu funkcyjnemu, które jest bardziej ogólne niż równania badane wcześniej. Podobnie jak w rozdziale 4, Autor wykorzystuje lemat Sablika, aby pokazać, że przy pewnych założeniach jego rozwiązania są wielomianami. Następnie po żmudnych obliczeniach znajduje się pełny opis rozwiązań. Następnie Autor pokazuje, że wynik ten uogólnia kilka wcześniejszych prac. W szczególności dwie prace Barbary Koclęgi-Kulpy, Tomasza Szostoka i Szymona Wąsowicza oraz klasyczny wynik Janosa Aczéla z 1985 roku dotyczący własności wartości średniej dla pochodnej, która charakteryzuje wielomiany stopnia drugiego.

W rozdziale 6 Autor bada równania funkcyjne dla odwzorowań zdefiniowanych na wypukłym podzbiorze przestrzeni liniowej. Mówiąc dokładniej, zajmuje się odwzorowaniami, które spełniają warunkową wersję równania Frécheta. Udowodniono techniczny lemat uogólniający wynik Iwony Pawlikowskiej z 2008 roku. Następnie wynik ten stosuje się do badania lokalnych wersji kilku równań funkcyjnych znanych z literatury. Następnie Autor rozwiązuje lokalne wersje równań funkcyjnych, które wprowadził wcześniej w rozprawie.

W rozdziale 7 Autor przedstawia algorytm rozwiązywania klasy równań funkcyjnych wykorzystujący teorię rozwiniętą we wcześniejszych rozdziałach. Podana jest implementacja w języku Python, którą Autor szczegółowo omawia. Następnie ilustruje swój kod komputerowy i stosuje go do rozwiązania wybranych równań funkcyjnych.

Uzupełnieniem rozprawy jest krótkie omówienie możliwych kierunków dalszych badań.

Wyniki rozprawy opierają się na trzech opublikowanych artykułach Autora, jednym autorskim i dwóch współautorskich oraz dwóch kolejnych manuskryptach, które są złożone w czasopismach w momencie składania rozprawy. Ponadto w repozytorium GitHub złożony jest kod w języku Python „CPOkeke-Polynomial-Solutions-of-Functional-Equations" napisany przez mgra Okeke.

Poniżej zamieszczam listę uwag szczegółowych do rozprawy:

- Rozprawa zawiera sporo błędów edycyjnych, które w znacznej części są efektem tzw. techniki „kopiuj-wklej". Wszystkich nie wymienię. Tylko jeden przykład: strona 7, wiersz 19, tekst „We denote also..." pojawia się dwukrotnie.
- Twierdzenie 2.1.1. w tym twierdzeniu G jest grupą abelową, więc mnożenie jej elementów przez liczby wymierne nie musi być zdefiniowane.
- strona 12: nie jest jasne, w jaki sposób Autor wyprowadza równość
$$2B_2(x, y) = xA_1(y) + yA_1(x)$$
używając tylko (3.2.1).
- na tej samej stronie, nie wyjaśniono, w jaki sposób otrzymujemy
$$A_2(x, 1) = xA_2^*(1)$$
z (3.2.8).
- Strona 12: czy Autor naprawdę użył (4.1.5), aby otrzymać (3.2.10)?
- Twierdzenie 3.2.2 i Twierdzenie 3.2.3: F i f to ten sam wielomian? Prawdopodobnie Autor miał na myśli „wielomiany".
- Uwaga 4.1.1, część druga. Widzę dwa problemy: mniejszy dotyczy mnożenia przez liczby wymierne w grupie abelowej G, które w ogólnym przypadku może nie być wykonalne. Poważniejszy problem dotyczy

równania (4.4.6). Mianowicie, jeśli $\gamma_i \in G$ oraz F przyjmuje wartości w H, to po lewej stronie tego równania występują dwie operacje algebraiczne. Pierwszym jest mnożenie elementów z G przez elementy z H, które jest nieokreślone, a drugim jest dodawanie, które prawdopodobnie jest operacją grupową na H. Aby to równanie miało sens, potrzebne są przynajmniej pewne dodatkowe założenia dotyczące G i H.

- Przykład 5.2.1. nie jest interesujący, ponieważ jego tezę można otrzymać przez łatwe podstawienie i nie ma potrzeby wykorzystywania wyników do ogólnego równania (5.1.1).

- Lemat 3.1.1 i Lemat 6.1.1 są bardzo podobne. Brakuje mi dyskusji ich potencjalnych różnic. W szczególności Autor mógłby wyjaśnić, czy Lemat 6.1.1 uogólnia Lemat 3.1.1.

- strona 64: „Lemma 6.1.1" zamiast „Lemma (6.1.1)".

- strona 66: W mojej opinii zapis "$\{0, \ldots, 2\}$" jest przesadą. Z pewnością „$\{0, 1, 2\}$" jest krótsze.

Podsumowując, moim zdaniem przedłożone do recenzji wyniki są poprawne, nowe i ciekawe. Ponadto Autor wykazuje się umiejętnością prowadzenia badań, łączenia aspektów teoretycznych i praktycznych tematu swojej rozprawy. Dlatego **wnoszę o dopuszczenie Pana mgr. Chisom Prince Okeke do dalszych procedur wymaganych polskim prawem zmierzających do nadania mu stopnia doktora**.

Włodzimierz Fechner

Łódź, 10 lipca 2023 (-) Włodzimierz Fechner