Dr hab. Błażej Szepietowski, prof. UG
Uniwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
ul. Wita Stwosza 57, 80-309 Gdańsk
blazej.szepietowski@ug.edu.pl

Recenzja dorobku naukowego dr inż. Roksany Słowik w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego.

Uwagi wstępne.

Pani dr inż. Roksana Słowik, zwana dalej Habilitantką uzyskała stopień doktora w 2013 roku na Uniwersytecie Śląskim, na podstawie rozprawy doktorskiej na temat „Podgrupy grupy Vershika-Kerova". Od 2013 roku pracuje jako adiunkt na Wydziale Matematyki Stosowanej w katedrze Matematyki Politechniki Śląskiej.

Ocena osiągnięcia pod tytułem „Macierze trójkątne nieskończone skończonego rzędu oraz ich iloczyny".

Jako osiągnięcie wymagane w art. 219 ust. 1 pkt. 2 lit. b ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, zwanej dalej Ustawą, Habilitatnka przedstawia cykl siedmiu prac pod tytułem „Macierze trójkątne nieskończone skończonego rzędu oraz ich iloczyny". Prace zostały opublikowane w czasopismach, których ewaluacja w wykazie czasopism punktowanych ogłoszonym przez Ministra Edukacji i Nauki dnia 9 lutego 2021 r. przedstawia się następująco:

- Linear Algebra and its Applications (3 prace) – 100 p.
- Journal of Algebraic Combinatorics (1 praca) – 100 p.
- Linear and Multilinear Algebra (2 prace) – 70 p.
- Indian J. Pure Appl. Math. (1 praca) – 20 p.

Jest to cykl jednotematyczny spełniający wymagania wymienione w art. 219 ust. 1 pkt. 2 lit b. Ustawy.

Tematyka cyklu leży na pograniczu algebry liniowej, teorii grup i kombinatoryki. Prace [A1-A4], opublikowane w latach 2013-2014, a więc zaraz po doktoracie, dotyczą grup macierzy trójkątnych, nieskończonych lub skończonego stopnia. Niech $T_\infty(K)$ oznacza grupę nieskończonych macierzy górnotrójkątnych o współczynnikach w ciele K. Niech $T_\infty(K)$ (odpowiednio $\pm UT_\infty(K)$) oznacza podgrupę grupy $T_\infty(K)$ składającą się z macierzy, których wszystkie współczynniki leżące na głównej przekątnej są równe 1 (odpowiednio 1 lub -1). Analogiczne grupy macierzy skończonego stopnia n oznacza się przez $T_n(K)$, $UT_n(K)$ i $\pm UT_n(K)$. Zacznę od omówienia prac:

[A2] R. Słowik, Involutions in triangular groups, Linear Multilinear Algebra 61(7) (2013), 909-916.

[A4] R. Słowik, How to construct a triangular matrix of a given order, Linear Multilinear Algebra 62(1) (2014), 28–38.

Głównym wynikiem pracy [A2] jest twierdzenie charakteryzujące inwolucje, to znaczy elementy rzędu 2 w grupach $T_n(K)$ i $T_\infty(K)$, gdzie K jest ciałem o charakterystyce różnej od 2. Zawiera ono warunki (konieczne i wystarczające) jakie muszą spełniać współczynniki macierzy trójkątnej, aby była ona inwolucją. Twierdzenie to pozwala na konstruowanie inwolucji g w następujący sposób. Zaczynamy od wybrania współczynników g_{ii} leżących na głównej przekątnej, które muszą być równe 1 lub -1. Następnie wybieramy współczynniki $g_{i,i+1}$ leżące bezpośrednio nad główną przekątną. W kolejnym kroku wybieramy współczynniki $g_{i,i+2}$ na następnej przekątnej i tak dalej. W każdym kroku tej konstrukcji jesteśmy w stanie wybrać współczynniki w taki sposób, żeby spełniały wymienione w twierdzeniu warunki. Twierdzenie to zostało wykorzystane przez Habilitantkę w pracach [A1,A5,A6]. Może być ono także użyte do zliczania inwolucji w grupach $T_n(K)$ w sytuacji, gdzie K jest ciałem skończonym. W pracy [A2] Habilitatntka wyznaczyła liczby inwolucji w $T_n(K)$ dla dowolnego skończonego ciała K. Otrzymane liczby są wielomianami zmiennej $q = |K|$.

W pracy [A4] wyniki uzyskane w [A2] dla inwolucji zostały uogólnione na przypadek elementów dowolnego skończonego rzędu. Głównym wynikiem jest twierdzenie charakteryzujące elementy skończonego rzędu k w grupach $T_n(K)$ i $T_\infty(K)$, gdzie K jest ciałem o charakterystyce nie będącej dzielnikiem k. Twierdzenie to ma taką samą strukturę jak główne twierdzenie pracy [A2]. Dowód jest trudniejszy, bo rozważane są wyższe potęgi macierzy. Także zastosowanie głównego twierdzenia do zliczania elementów rzędu k w grupach $T_n(K)$ w sytuacji, gdzie K jest ciałem skończonym, jest analogiczne do tego z pracy [A2]. Uzyskane wzory są znacznie bardziej skomplikowane.

[A1] R. Słowik, Expressing infinite matrices as products of involutions, Linear Algebra Appl. 438(1) (2013), 399–404.

W pracy [A1] Habilitatntka dowodzi, że dla dowolnego ciała K o charakterystyce różnej od 2, każdy element grupy $\pm UT_\infty(K)$ lub $\pm UT_n(K)$ jest produktem co najwyżej czterech inwolucji. Habilitantka podkreśla w swoim autoreferacie, że twierdzenie to jest prawdziwe także dla ciał charakterystyki 2, co łatwo wynika z dowodu Twierdzenia 1.1 w pracy [A1], gdzie zostało to niestety przeoczone. Pomijając kwestię zbędnego założenia, twierdzenie jest zgrabne, a jago dowód pomysłowy i elegancki. Warto je porównać (co Habilitatntka zrobiła zarówno w pracy [A1] jak i w autoreferacie) z twierdzeniem, które w 1967 udowodnili Gustafson, Halmos i Radjavi: Dla dowolnego ciała K każda macierz $A \in GL_n(K)$, taka że $\det A = \pm 1$ jest iloczynem co najwyżej czterech inwolucji. Należy przy tym podkreślić, że praca [A1] nie naśladuje dowodu zacytowanego twierdzenia. Dowód z pracy [A1] opiera się na własnościach macierzy trójkątnych, a przy tym jest całkiem elementarny w tym sensie, że nie korzysta z żadnego zaawansowanego aparatu matematycznego.

[A3] R. Słowik, On products of matrices of a fixed order, Linear Algebra Appl. 446 (2014), 104-114.

Praca [A3] poświęcona jest problemowi generowania grup $T_n(K)$ i $T_\infty(K)$ przez elementy ustalonego skończonego rzędu. Głównym wynikiem jest następujące Twierdzenie 1.2.

Niech K będzie ciałem o q elementach, $q > 2$ i niech G oznacza grupę $T_\infty(K)$ lub $T_n(K)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy G jest generowana przez zbiór elementów rzędu $q-1$. Ponadto, każdy element G jest produktem co najwyżej czterech elementów, których rzędy są dzielnikami $q-1$.

Zauważmy, że ostatnie zdanie powyższego twierdzenia wynika natychmiast z głównego twierdzenia pracy [A1], jako że 2 jest dzielnikiem $q-1$. Dopiero po przeczytaniu dowodu można się zorientować o co w tym zdaniu naprawdę chodzi. Habilitantka wykazała, że dowolny element grupy G jest produktem czterech elementów, z których trzy mają rząd równy $q-1$, a czwarty jest macierzą diagonalną, której rząd jest dzielnikiem $q-1$. Taka macierz diagonalna jest produktem pewnej liczby diagonalnych macierzy rzędu $q-1$, a stąd wynika, że G jest generowana przez elementy rzędu $q-1$. Ten ostatni argument czytelnik musi sam sobie dopowiedzieć, bo w pracy go brakuje. Ciekawym wnioskiem z przytoczonego powyżej Twierdzenia 1.2 jest Twierdzenie 1.3 mówiące o tym, że także grupy $GL_n(K)$ są generowane przez elementy rzędu $q-1$ (przy takich samych założeniach jak w Twierdzeniu 1.2). Wynika to z dobrze znanego faktu, że każda macierz nieosobliwa jest iloczynem macierzy (górno- i dolno-) trójkątnych. Oba twierdzenia uważam za ciekawe, rzucające nowe światło na problem generowania klasycznych grup macierzowych. Dowód jest pomysłowy. Pewne jego elementy pochodzą z pracy [A1]. Wykorzystana jest też charakteryzacja macierzy trójkątnych ustalonego skończonego rzędu udowodniona w pracy [A4].

Prace [A5,A6,A7] opublikowane w latach 2020–2022 poświęcone są grupie Riordana $\mathcal{R}(F)$. Elementami tej grupy są pary formalnych szeregów potęgowych $(d(t), h(t))$ o współczynnikach w pierścieniu F, gdzie $d(t) = d_0 + d_1t + d_2t^2 + \dots$, $h(t) = h_1x + h_2t^2 + h_3t^3 + \dots$, $d_0, h_1 \neq 0$. Każdej takiej parze odpowiada nieskończona macierz dolnotrójkątna M, zwana macierzą Riordana, taka że $d(x)[h(x)]^i$ jest funkcją tworzącą i-tej kolumny M. Mnożenie w grupie Riordana jest zgodne z mnożeniem odpowiadających macierzy, co oznacza, że $\mathcal{R}(F)$ jest izomorficzna z podgrupą grupy nieskończonych macierzy dolnotrójkątnych o współczynnikach w F. Przyznaję, że o grupie Riordana dowiedziałem się po raz pierwszy dopiero z autoreferatu Habilitatntki. Tłumaczę to tym, że grupa ta jest mocno zakorzeniona w kombinatoryce, a zatem poza obszarem moich zainteresowań badawczych. Zdefiniował ją Luis Shapiro wspólnie z innymi autorami w artykule z 1991 roku, który według bazy Web of Scence był cytowany 366 razy. W bazie MathSciNet można zleźć przeszło 150 publikacji z „Riordan array” lub „Riordan group” w tytule, z czego większość pochodzi z okresu ostatnich 20 lat.

[A5] R. Słowik, Some new facts about (pseudo) involutions in the Riordan group, Indian J. Pure Appl. Math. 51(4) (2020), 1769–1777.

Praca [A5] poświęcona jest pseudo inwolucjom w grupie Riordana $\mathcal{R}(\mathbb{R})$. Z definicji, element R grupy $\mathcal{R}(F)$ jest pseudo inwolucją jeżeli $R\tilde{I}$ jest inwolucją, gdzie $\tilde{I} = (1, -t)$. Jako motywację do rozważań opisanych w pracy [A5] Habilitantka wskazuje dwa pytania o postać inwolucji w grupie Riordana postawione przez L. Shapiro (w autoreferacie zacytowane jest nieco inne pytanie niż w pracy [A5]). Jednocześnie Habilitantka przyznaje, że otrzymany przez nią wynik „nie całkiem odpowiada” na te pytania. Główny wynik pracy [A5] jest następujący. Załóżmy, że $(d(t), h(t)) \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ jest pseudo inwolucją o nieujemnych współczynnikach i $d_1 \neq 0$. Wtedy $h(t)$ jest jednoznacznie wyznaczone przez $d(t)$. Ostatnie zdanie oznacza, że współczynniki $h(t)$ można wyrazić za pomocą współczynników $d(t)$. Jest to mało konkretny wynik, ponieważ w pracy nie podano jawnych wzorów na współczynniki $h(t)$. Co więcej, nie dla każdego $d(t)$ istnieje takie $h(t)$, że $(d(t), h(t))$ jest pseudo inwolucją. Dowód wykorzystuje charakteryzację inwolucji w grupie nieskończonych macierzy trójkątnych z pracy [A2]. Praca [A5] jest zdecydowanie najsłabszą w całym cyklu i została opublikowana w słabym czasopiśmie, które mocno odstaje poziomem od pozostałych.

[A6] R. Słowik, More about involutions in the group of almost-Riordan arrays, Linear Algebra Appl. 624 (2021), 247-258.

W pracy [A6] badane są inwolucje w grupach macierzy prawie-Riordana będących uogólnieniem grupy Riordana. Grupa macierzy prawie Riordana stopnia n, oznaczana przez $\mathcal{R}^{(n)}(F)$, składa się z macierzy postaci $\begin{pmatrix} a_n & 0 \\ B & R \end{pmatrix}$, gdzie a_n jest nieosobliwą macierzą dolnotrójkątną stopnia n, a R jest nieskończoną macierzą Riordana. Główne twierdzenie pracy [A6] mówi, że każda macierz prawie-Riordana będąca inwolucją jest sprzężona z diagonalną macierzą prawie-Riordana. Analogiczne twierdzenie dla macierzy Riordana będących inwolucjami zostało udowodnione 13 lat wcześniej przez Cheona i Kima i stanowi ono punkt wyjścia dla pracy [A6]. Używając głównego twierdzenia, Habilitantka podaje w pracy [A6] przykłady inwolucji w grupach $\mathcal{R}^{(n)}(F)$ oraz charakteryzację inwolucji pewnej szczególnej postaci.

[A7] R. Słowik, Products of Riordan arrays of finite orders, J. Algebr. Comb. 56 (2022), 1055–1062.

Celem pracy [A7] jest odpowiedź na pytanie, które elementy grupy Riordana $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ są produktami elementów skończonego rzędu. Główne twierdzenie tej pracy mówi, że dowolna macierz R z grupy $\mathcal{R}(\mathbb{C})$, której główna przekątna składa się z elementów 1 lub -1 jest produktem co najwyżej pięciu elementów skończonego rzędu. Wiadomo, że nie każda taka macierz jest produktem inwolucji, a więc twierdzenie analogiczne do głównego wyniku pracy [A1] nie jest prawdziwe dla grupy Riordana. Jednak wiadomo dokładnie, które elementy grupy $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ są produktami inwolucji. Ponadto, jeśli element R może być zapisany jako produkt inwolucji, to cztery inwolucje wystarczą (Luzón, Morón, Prieto-Martinez 2022). Habilitatntka dowodzi w [A7], że jeśli R nie jest produktem samych inwolucji, to jest produktem trzech inwolucji i dwóch elementów wyższego skończonego rzędu.

Według bazy Web of Science, prace cyklu [A1-A7] były cytowane 13 razy, nie licząc autocytowań, w tym 9 razy praca [A1]. Większość z tych cytowań pochodzi z lat 2020-2022 co świadczy o aktualności tematyki badawczej. Praca [A6] z roku 2021 ma już dwa cytowania. Sądzę, że także praca [A7], która ukazała się (online) w lipcu 2022 roku ma potencjał do bycia cytowaną. W tym miejscu pozwolę sobie wyrazić rozczarowanie faktem, że Habilitantka nie udostępnia preprintów swoich prac w repozytorium arXiv. Mogłoby to przyspieszyć oddziaływanie jej prac na środowisko naukowe.

Za najciekawsze uważam wyniki uzyskane w pracach [A1,A3]. Co ważne, dotyczą one zarówno macierzy skończonego stopnia jak i nieskończonych. Praca [A1] jest najczęściej cytowaną publikacją Habilitantki. Główne twierdzenie tej pracy zostało uogólnione na przypadek macierzy o współczynnikach w pewnych pierścieniach (X.Hou at al. 2017). Wśród prac cytujących [A1] znajdują się także artykuły poświęcone problemowi rozkładu macierzy symplektycznych na iloczyn komutatorów. Wyniki prac [A6, A7] nawiązują do tych uzyskanych w [A1, A3] ale dotyczną już wyłącznie nieskończonych macierzy Riordana lub prawie-Riordana i mają inny, bardziej kombinatoryczny charakter. Habilitantka wykazała się w nich dużą zręcznością i wyczuciem. Prace [A2,A4] to z kolei prace bardziej techniczne, ale odgrywające ważną rolę w całym cyklu.

Przedstawiony do oceny cykl publikacji stanowi rezultat solidnej i konsekwentnej pracy naukowej, chociaż nie zawiera on głębokich twierdzeń, ani nie wprowadza nowych metod badawczych. Wszystkie prace są dobrze napisane. Tematyka cyklu dotyczy macierzy, które należą do najbardziej podstawowych obiektów, odgrywających bardzo istotną rolę w matematyce i jej zastosowaniach. Każde niebanalne twierdzenie dotyczące macierzy uznałbym więc za wartościowe. Trzy publikacje poświęcone macierzom Riordana dotyczą aktualnej tematyki łączącej algebrę z kombinatoryką. Podoba mi się, że Habiltantka nie zasklepiła się w wąskiej tematyce i śmiało wkroczyła na nowy grunt badawczy, podejmując nowe wyzwania. Podsumowując, oceniam, że cykl prac [A1-A7] stanowi istotny wkład w rozwój matematyki.

Ocena pozostałego dorobku naukowego

Łączny przedstawiony do oceny dorobek naukowy Habilitantki liczy 42 publikacje.

To bardzo duża liczba jak na dziesięć lat pracy badawczej, zwłaszcza że tylko dwie z tych publikacji są współautorskie. Ponad połowa prac została opublikowana w czterech czasopismach: Linear Algebra and its Applications (7 artykułów, w tym 1 errata), Linear and Multilinear Algebra (12 artykułów, w tym 2 erraty), Comminications in Algebra (3 artykuły) i Results in Mathematics (3 artykuły). Są to dobre czasopisma. W dorobku Habilitatnki znajduje się też kilka publikacji w słabszych czasopismach. Jak widać, Habiltatnka najczęściej publikuje w dwóch tematycznych czasopismach poświęconych algebrze liniowej: Linear Algebra and its Applications oraz Linear and Multilinear Algebra, co jest naturalne przy jej tematyce badawczej. Szkoda jednak, że w jej dorobku nie ma choć jednej publikacji w czasopiśmie z wyższej półki, lub bardzo dobrym czasopiśmie ogólnoalgebraicznym, jak na przykład Journal of Algebra.

Wszystkie prace Habilitantki dotyczą zagadnień związanych z grupami lub pierścieniami macierzy skończonego stopnia lub nieskończonych. Habilitantka szczegółowo opisała w sowim autoreferacie wybrane wyniki nie wchodzące w skład cyklu [A1-A7], dzieląc swój dorobek publikacyjny na kilka wątków tematycznych. Jest wątek związany z badaniem różnych grup macierzy nieskończonych i ich podgrup [B1-B6], bardzo obszerny wątek poświęcony odwzorowaniom określonym na grupach bądź pierścieniach macierzy nieskończonych [C1-C15], wątek macierzy Riordana [E1-E4] oraz grupa prac również poświęconych nieskończonym macierzom, ale nie pasujących do pozostałych wątków [D1-D7]. Lektura tej części autoreferatu była dla mnie trudna, ponieważ większość opisanych tam wyników ma techniczny charakter, a ich sformułowanie wymaga wprowadzenia coraz to nowych definicji. Moje ogólne wrażenie z tej lektury jest jednak pozytywne, bo okazuje się, że tematyka badawcza Habilitantki jest zróżnicowana, a wachlarz podejmowanych przez nią zagadnień całkiem szeroki. Za szczególnie obiecujący uważam wątek macierzy Riordana, ponieważ jest to aktualna tematyka łącząca algebrę z kombinatoryką.

Według bazy Web of Science, wszystkie prace Habilitantki były cytowane 58 razy, nie licząc autocytowań, co jest całkiem dobrym wynikiem.

Ocena aktywności naukowej

Dużą słabością wniosku jest brak informacji o kierowaniu projektami finansowanymi ze źródeł zewnętrznych lub udziale w takich projektach w roli wykonawcy. To się przekłada na małą liczbę wystąpień na zagranicznych konferencjach (cztery) i słabą współpracę z matematykami z zagranicznych ośrodków (dwie publikacje ze współautorami z zagranicy). To ostatnie może też wynikać po części z charakteru i stylu pracy Habilitantki, bo w jej dorobku zdecydowanie przeważają prace samodzielne. Habilitantka podała informację o pobycie naukowym w Lizbonie w 2019 roku.

Konkluzja

Pomimo opisanych powyżej słabości, moja ocena osiągnięć naukowych pani dr Roksany Słowik jest pozytywna. Uważam, że przedstawione do oceny osiągnięcia stanowią znaczny wkład w rozwój matematyki, spełniają wymagania wymienione w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy, a pani dr Roksana Słowik zasługuje na stopnień doktora habilitowanego.

Gdańsk, 28 maja 2023

Błażej Szepietowski