dr hab. Romuald Ryszard Andruszkiewicz,
prof. Uniwersytetu w Białymstoku

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
Macierze trójkątne nieskończone skończonego rzędu oraz ich iloczyny
oraz dorobku naukowego
dr Roksany Słowik

Na rozprawę habilitacyjną doktor Roksany Słowik składa się siedem samodzielnych prac opublikowanych w bardzo dobrych czasopismach matematycznych:

[A1] R. Słowik, *Expressing infinite matrices as products of involutions*, Linear Algebra Appl. **438**(1) (2013), 399-404.

[A2] R. Słowik, *Involutions in triangular groups*, Linear Multilinear Algebra **61**(7) (2013), 909-916.

[A3] R. Słowik, *On products of matrices of a fixed order*, Linear Algebra Appl. **446** (2014), 104-114.

[A4] R. Słowik, *How to construct a triangular matrix of a given order*, Linear Multilinear Algebra **62**(1) (2014), 28-38.

[A5] R. Słowik, *Some new facts about (pseudo) involutions in the Riordan group*, Indan J. Appl. Math. **54**(4) (2020), 1769-1777.

[A6] R. Słowik, *More about involutions in the group of almost-Riordan arrays*, Linear Algebra Appl. **624** (2021), 247-258.

[A7] R. Słowik, *Products of Riordan arrays of finite orders*, J. Algebra Comb., w druku.

Rozprawa habilitacyjna doktor Roksany Słowik jest jednotematycznym cyklem publikacji i dotyczy faktoryzacji różnorodnych nieskończonych macierzy ze szczególnym uwzględnieniem rozkładów, których czynniki są inwolucjami. Dokładniej, przez macierz nieskończoną Autorka rozumie dowolną funkcję $M\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to R$, gdzie R jest pierścieniem z jedynką 1, przy czym M można naturalnie utożsamić z $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-macierzą $[m_{ij}]_{i,j=1,2,\ldots}$, gdzie $m_{ij} = M(i,j)$ dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$. Dodawanie tych macierzy jest określone po współrzędnych, zaś iloczyn MN macierzy M i N jest określony jedynie w przypadku, gdy dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ zbiór $\{k \in \mathbb{N} : m_{ik} \cdot n_{kj} \neq 0\}$ jest skończony i $[MN]_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_{ik} \cdot n_{kj}$. Dla ustalonego pierścienia R wprowadzono następujące oznaczenia ważnych pierścieni macierzy nieskończonych o współrzędnych z R:

• $\mathcal{M}_{Cf}(R)$ - pierścień macierzy, których każda kolumna posiada jedynie skończoną liczbę niezerowych współrzędnych,

• $\mathcal{M}_{Rf}(R)$ - pierścień macierzy, których każdy wiersz posiada jedynie skończoną liczbę niezerowych współrzędnych,

• $\mathcal{M}_{RCf}(R) = \mathcal{M}_{Cf}(R) \cap \mathcal{M}_{Rf}(R)$,

• $\mathcal{T}_\infty(R)$ - pierścień macierzy górnotrójkątnych, czyli takich macierzy M, że $[M]_{ij} = 0$ dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$ takich, że $i > j$.

Duże znaczenie pierścieni $\mathcal{M}_{Cf}(R)$ i $\mathcal{M}_{Rf}(R)$ wynika między innymi z twierdzenia K. R. Goodearla o tym, że każda łączna algebra nad ciałem F przeliczalnego wymiaru ma wierną reprezentację w algebrze $\mathcal{M}_{RCf}(F)$.

Dodatkowo dla dowolnego ciała F Autorka przez $T_\infty(F)$ oznacza grupę elementów odwracalnych pierścienia $\mathcal{T}(F)$, przez $UT_\infty(F)$ oznacza podgrupę grupy $T_\infty(F)$ złożoną z macierzy M takich, że $[M]_{ii} = 1$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$, a przez $\pm UT_\infty(F)$ podgrupę złożoną z macierzy M takich, że $[M]_{ii} = \pm 1$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Dowolny element rzędu dwa grupy nazywamy inwolucją tej grupy.

Omówienie rozprawy habilitacyjnej. Za główne wyniki uzyskane w pracach [A1] i [A2] uważam następujące:

Twierdzenie 1. *Niech F będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Macierz $T = [t_{ij}] \in T_\infty(F)$ jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:*

(i) $t_{ii} \in \{1, -1\}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$,

(ii) dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$, gdzie $i < j$ oraz $t_{ii} = -t_{jj}$, element t_{ij} może być wybrany dowolnie,

(iii) dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$, gdzie $i < j$ oraz $t_{ii} = t_{jj}$, element $t_{ij} = 0$, jeśli $j = i + 1$ oraz $t_{ij} = -(2t_{ii})^{-1} \cdot \sum_{p=i+1}^{j-1} t_{ip} \cdot t_{pj}$, jeśli $j > i + 1$.

Twierdzenie 2. *Dla dowolnego ciała F każdy element grupy $\pm UT_\infty(F)$ jest iloczynem co najwyżej czterech inwolucji.*

Twierdzenie 3. *Jeśli macierz $G = [g_{ij}] \in UT_\infty(F)$, gdzie F jest dowolnym ciałem, spełnia warunek: $g_{i,i+1} \neq 0$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$, to G jest iloczynem co najwyżej dwóch inwolucji z grupy $\pm UT_\infty(F)$.*

Warto podkreślić, że chociaż uzyskane rezultaty mają swoje odpowiedniki w przestrzeniach Hilberta oraz dla macierzy skończonych stopni, to Autorka użyła zupełnie innych metod i pomysłów dowodząc najpierw twierdzeń 1 i 2, a następnie wyprowadzając stąd twierdzenie 3. Ponadto, metody zastosowane w dowodach tych twierdzeń Autorka wykorzystała do badania grupy Vershika-Kerowa $GL_{VK}(F)$:

$$GL_{VK}(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \begin{bmatrix} G & H \\ 0 & K \end{bmatrix} \;:\; G \in GL_n(F),\ K \in T_\infty(F),\ H \in M_{n\times\mathbb{N}}(F) \right\}$$

Mianowicie wykazała, że dla dowolnego ciała F, jeśli $A = \begin{bmatrix} G & H \\ 0 & K \end{bmatrix} \in GL_{VK}(F)$, $\det(G) = \pm 1$ oraz $K \in \pm UT_\infty(F)$, to A jest iloczynem co najwyżej pięciu inwolucji.

Na uwagę zasługuje także następujący rezultat z pracy [A2]:

Twierdzenie 4. *Niech F będzie ciałem skończonym o q elementach, gdzie $2 \nmid q$ i niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $\alpha = 0$, gdy $2 \nmid n$ i $\alpha = \binom{n}{\frac{n}{2}}$, gdy $2 \mid n$. Wówczas liczba wszystkich inwolucji grupy $T_n(F)$ wyraża się wzorem:*

$$\mathcal{I}(n, F) = \alpha q^{\frac{n^2}{4}} + 2 \cdot \sum_{1 \leqslant p \leqslant n, 2 \mid n-p} \binom{n}{\frac{n-p}{2}} q^{\frac{n^2-p^2}{4}}.$$

W pracach [A3] i [A4] uogólniono wyniki otrzymane w [A1] i [A2] uzyskując między innymi następujące ważne rezutaty:

Twierdzenie 5. *Niech $k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ oraz niech F będzie ciałem, którego charakterystyka nie dzieli k. Macierz $T = [t_{ij}] \in T_\infty(F)$ ma rząd k wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:*

(i) $t_{ii}^k = 1$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$ oraz $\mathrm{NWW}\{\mathrm{ord}_{F^*}(t_{ii}) : i \in \mathbb{N}\} = k$,

(ii) jeśli $t_{ii} \neq t_{jj}$, to element t_{ij} może być wybrany dowolnie,

(iii) jeśli $t_{ii} = t_{jj}$, to element $t_{ij} = 0$, gdy $j = i + 1$ oraz $t_{ij} = -(kt_{ii})^{-1} \cdot s_{ij}$, gdy $j > i + 1$, przy czym s_{ij} jest sumą iloczynów postaci $t_{ir_1} \cdot t_{r_1 r_2} \cdot \ldots \cdot t_{r_{k-1} j}$ po wszystkich ciągach $(r_1, \ldots, r_{k-1})$ liczb naturalnych takich, że $i = r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_{k-1} \leqslant j = r_k$ oraz istnieje $u \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ takie, że $r_u \neq i$ lub $r_{u+1} \neq j$.

Twierdzenie 6. *Niech F będzie ciałem q-elementowym, gdzie $q > 2$. Każdy element grupy $T_\infty(F)$ jest iloczynem co najwyżej czterech macierzy z $T_\infty(F)$, których rzędy są dzielnikami liczby $q-1$. Ponadto grupa $GL_{VK}(F)$ jest generowana przez elementy, których rzędy są dzielnikami $q - 1$.*

Twierdzenie 7. *Niech F będzie ciałem zawierającym pierwiastek pierwotny stopnia k z jedynki. Jeśli macierz $T = [t_{ij}] \in T_\infty(F)$ spełnia warunek $\mathrm{NWW}\{\mathrm{ord}_{F^*}(t_{ii}) : i \in \mathbb{N}\} = k$, to T jest iloczynem co najwyżej czterech macierzy, których rzędy są dzielnikami k.*

Prace [A5]-[A7] dotyczą grup Riordana $\mathcal{R}(F)$. Elementy tej grupy utożsamiane są z parami $(d(t), h(t))$ formalnych szeregów potęgowych zmiennej t nad ciałem F postaci $d(t) = \sum_{n=0}^\infty d_n t^n$, $h(t) = \sum_{n=1}^\infty h_n t^n$, gdzie $d_0, h_1 \neq 0$. Natomiast mnożenie zadane jest wzorem:

$$(d(t), h(t)) * (D(t), H(t)) = (d(t) \cdot D(h(t)), H(h(t))).$$

Element odwrotny do $(d(t), h(t)) \in \mathcal{R}(F)$ jest równy $(d(t), h(t))^{-1} = (\frac{1}{d(\overline{h}(t))}, \overline{h}(t))$, gdzie $\overline{h}$ oznacza szereg formalny odwrotny do h w sensie składania szeregów. Para $(d(t), h(t)) \in \mathcal{R}(F)$ jest utożsamiana z $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$-macierzą dolnotrójkątną $R = [r_{nm}]$ następująco: $r_{nm} = [t^n] d(t)(h(t))^m$, przy czym $[t^n] f(t) = a_n$ dla $f(t) = \sum_{k=0}^\infty a_k t^k$. Zatem:

$$(d(t), h(t)) = [d(t) | d(t) \cdot h(t) | d(t) \cdot (h(t))^2 | \ldots].$$

Oznaczmy przez $\tilde{I} = [a_{ij}]$ macierz Riordana taką, że $a_{ii} = (-1)^i$ dla $i \in \mathbb{N}_0$ oraz $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i \neq j$. Różnorodne problemy związane z macierzami Riordana były przedmiotem badań wielu matematyków. Autorka wniosła moim zdaniem istotny wkład z rozwój tej teorii dowodząc między innymi następujących rezultatów:

Twierdzenie 8. *Niech $R = (d(t), h(t)) \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ będzie pseudo-inwolucją (tzn. $R\tilde{I}$ jest inwolucją w $\mathcal{R}(\mathbb{R})$) o elementach nieujemnych taką, że $d_1 \neq 0$. Wtedy szereg h jest jednoznacznie wyznaczony przez szereg d.*

Twierdzenie 9. *Niech $k \geqslant 3$ oraz niech $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{C}$. Wtedy istnieje funkcja $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n t^n$, której rząd względem składania jest równy k.*

Twierdzenie 10. *Każdy element R grupy $\mathcal{R}(\mathbb{C})$, którego główna przekątna składa z samych jedynek, może być zapisany w postaci iloczynu co najwyżej pięciu macierzy Riordana skończonych rzędów. W szczególności, jeśli R może być zapisana jako iloczyn inwolucji, to jest iloczynem co najwyżej czterech inwolucji; w przeciwnym przypadku, R może być zapisana jako iloczyn trzech iwolucji i dwóch elementów rzędów większych niż 2.*

Zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ \frac{a(t)-a_0}{t} & (d(t), h(t)) \end{bmatrix}$, gdzie $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n$, $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n t^n$, przy czym $a_0, d_0, h_1 \neq 0$, oznaczamy przez $\mathcal{R}^{(1)}(F)$ i nazywamy macierzami prawie-Riordana stopnia 1. Jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ mamy już zdefiniowany zbiór $\mathcal{R}^{(n)}(F)$, to przez $\mathcal{R}^{(n+1)}(F)$ oznaczamy zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ \frac{a(t)-a_0}{t} & R \end{bmatrix}$, gdzie $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$ i $R \in \mathcal{R}^{(n)}(F)$. Tak zdefiniowane zbiory macierzy nieskończonych $\mathcal{R}^{(n)}(F)$ tworzą grupy ze względu na mnożenie macierzy. W tej tematyce Autorka udowodniła między innymi następujące:

Twierdzenie 11. *Każda inwolucja grupy $\mathcal{R}^{(n)}(F)$ jest sprzężona z diagonalną inwolucją.*

Podsumowując, stwierdzam, że doktor Roksana Słowik wniosła w swojej rozprawie habilitacyjnej istotny wkład do ogólnej teorii macierzy, teorii grup i kombinatoryki, rozwiązała szereg problemów stawianych przez matematyków prowadzących badania w tym zakresie, uzyskała nowe wyniki naukowe, wypracowała pewne własne metody badawcze, a wyniki jej rozprawy zostały opublikowane w bardzo dobrych i widzianych na arenie międzynarodowej czasopismach. Można więc uznać, że spełnione są wymagania stawiane przez Ustawę rozprawom habilitacyjnym.

Pozostały dorobek naukowy. Na pozostały dorobek naukowy (po doktoracie) doktor Roksany Słowik składają się wyniki zaprezentowane w kilkudziesięciu pracach opublikowanych w dobrych i widzianych na arenie międzynarodowej czasopismach matematycznych jak np.: Linear Algebra and its Applications (4 prace), Results in Mathematics (3 prace), Linear and Multilinear Algebra (11 prac), Communications in Algebra (3 prace), Taiwanese Journal of Mathematics (1 praca). Poza dwiema pracami, wszystkie te artykuły są samodzielne. Uważam, że ten dorobek jest bardzo imponujący zarówno ze względu na liczebność prac, jak też ze względu na ich znaczenie dla rozwoju m.inn. teorii macierzy i teorii grup. Autorka zajmuje się zagadnieniami, które są przedmiotem badań wielu matematyków. Uzyskane przez nią wyniki wzbudziły też duże zainteresowanie w środowisku specjalistów, co jest widoczne w cytowaniach jej prac. Habilitantka zgrupowała w Autoreferacie swój pozostały dorobek naukowy w pięciu grupach tematycznych B, C, D, E, F. Ze zrozumiałych względów ograniczę się do omówienia go w sposób mniej szczegółowy niż w przypadku omawiania jej rozprawy habilitacyjnej i będę odwoływał się do pojęć i oznaczeń użytych przez habilitantkę w Autoreferacie.

W serii prac z grupy B ważnymi rezultatami są według mnie następujące twierdzenia:

• Niech R będzie pierścieniem łącznym z jedynką, niech $m \in \mathbb{N}$ i niech H będzie podgrupą normalną grupy $UT_\infty(R)$ zawierającą $UT_{band,\infty}(m, R)$. Wówczas $UT_\infty(m, R) \subseteq H$.

• Jeśli R jest pierścieniem łącznym z jedynką, stabilnej rangi co nawyżej 1, to $UT_\infty(R)$ jest komutantem grupy $T_\infty(R)$.

• Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach. Wówczas każda podgrupa $UT_{Rf}(F)$, która jest całkowicie niezmiennicza w $T_{Rf}(F)$ jest równa pewnemu wyrazowi dolnego ciągu centralnego grupy $UT_{Rf}(F)$.

• Jeśli H jest podgrupą paraboliczną grupy $GL_n(\mathbb{F}_2)$, to istnieje jednoznacznie wyznaczona T-sieć ideałów taka, że $H = G(\sigma)$. Ponadto, jeśli H jest podgrupą paraboliczną grupy $GL_{VK}(\mathbb{F}_2)$, to istnieje jednoznacznie wyznaczona T-sieć ideałów taka, że $H = G(\sigma)$.

• Zbiór macierzy trójkątnych, które w $\mathcal{T}_\infty(\mathbb{C})$ są podobne do uogólnionej macierzy Jordana jest gęsty w $\mathcal{T}_\infty(\mathbb{C})$.

W serii prac C na wyróżnienie zasługują moim zdaniem następujące wyniki:

• Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach. Jeśli φ jest epimorfizmem grupy $UT_\infty(F)$, to istnieją $U \in UT_\infty(F)$, $D \in D_\infty(F)$, $k \in \mathbb{N}_0$ oraz epimorfizm σ ciała F takie, że $\varphi(X) = (\mathcal{D}iag_D \circ \mathcal{I}nn_U \circ \overline{\sigma} \circ \mathcal{U}p_k)(X)$.

• Opis automorfizmów grup $UT_\infty(F)$ i $T_\infty(F)$ dla ciał F mocy większej od 2 (twierdzenie 47 z Autoreferatu).

• Opis epimorfizmów pierścienia $\mathcal{T}_\infty(F)$ dla ciał F mocy większej od 2 (twierdzenie 48 z Autoreferatu).

• Opis różniczkowań pierścienia $\mathcal{T}_\infty(R)$ dla dowolnego pierścienia łącznego R z jedynką (twierdzenie 53 z Autoreferatu).

• Niech F będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 i posiadającym co najmniej cztery elementy. Jeśli $\varphi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest surjektywnym, liniowym odwzorowaniem zachowującym odwrotności, to dla pewnej odwracalnej macierzy $T \in \mathcal{T}_\infty(F)$ zachodzi jedna z tożsamości $\varphi(X) = T^{-1}XT$ lub $\varphi(X) = -T^{-1}XT$.

Z serii prac D wyróżnimy nastepujące rezultaty:

• Opis prawostronnych dzielników zera pierścienia $\mathcal{T}_\infty(F)$ dla dowolnego ciała F (twierdzenie 77 z Autoreferatu).

• Niech F będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Każda macierz z $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ jest sumą co najwyżej dziesięciu macierzy o zerowych kwadratach.

• Dla dowolnego ciała F każda macierz z $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ jest suma co najwyżej czternastu idempotentów.

• Wyniki uzyskane dla macierzy Hessenberga (twierdzenia 84, 65 i 86 z Autoreferatu).

• Wyniki uzyskane dla macierzy Laurenta (twierdzenia 87 i 88 z Autoreferatu).

W serii prac E na wyróżnienie zasługują moim zdaniem następujące wyniki:

• Opis postaci Jordana z $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ (twierdzenie 89 z Autoreferatu).

• Opis macierzy Riordana posiadających macierz przejścia (twierdzenie 90 z Autoreferatu).

• Załóżmy, że $R = [r_{nm}] = (d(t), h(t))$ jest macierzą Riordana wyznaczoną przez ciągi $A = (a_0, a_1, 0, 0, \ldots)$ i $Z = (z_0, z_1, 0, 0, \ldots)$, gdzie $d_0, a_0 > 0$, $a_1, z_0, z_1 \geqslant 0$. Jeśli $r_{00} \geqslant 0$ i $a_1 z_0 \geqslant a_0 z_1$, to R jest całkowicie dodatnia, $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem częstotliwości Polyi, ale $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ nie jest.

Prace [F1]-[F3] to monografie. Habilitantka jest jednym z wielu współautorów tych pozycji przeznaczonych głównie dla studentów pragnących poszerzyć swoją wiedzę o szeregach lub w zakresie teorii mnogości. Monografie te wzbogacają dydaktyczny arsenał habilitantki i wnoszą zauważalny wkład w popularyzację matematyki wyższej.

Reasumując, stwierdzam, że przedstawioną do oceny rozprawę habiltacyjną i dorobek należy uznać za w pełni spełniające zwyczajowe i ustawowe wymagania i w związku z tym, wnoszę o dopuszczenie doktor Roksany Słowik do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Białystok, 4 maja 2023 Romuald Ryszard Andruszkiewicz