Załącznik nr 3

Autoreferat

1. **Imię i nazwisko:** Roksana Słowik

2. **Posiadane dyplomy**

   (a) Dyplom magistra inżyniera matematyki uzyskany 30 czerwca 2010 roku, Wydział Matematyczno-Fizyczny, temat pracy magisterskiej: *Podgrupy macierzy nieskończonych.*

   (b) Dyplom doktora nauk matematycznych uzyskany 25 czerwca 2013 roku, Uniwersytet Śląski, Wydział Matematyczno-Fizyczno-Chemiczny, Instytut Matematyki, temat pracy doktorskiej: *Podgrupy grupy Vershika-Kerova.*

3. **Informacja o dotychczasowym zatrudnienie w jednostkach naukowych**

   01.10.2013 – 07.11.2022 jako adiunkt na Wydziale Matematyki Stosowanej w katedrze Matematyki Politechniki Śląskiej.

4. **Osiągnięcie, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.):**

   Macierze trójkątne nieskończone skończonego rzędu oraz ich iloczyny

   Lista publikacji wchodzących w skład ww. osiągnięcia:

[A1] R. Słowik, *Expressing infinite matrices as products of involutions*, Linear Algebra Appl. **438**(1) (2013), 399–404.

[A2] R. Słowik, *Involutions in triangular groups*, Linear Multilinear Algebra **61**(7) (2013), 909-916.

[A3] R. Słowik, *On products of matrices of a fixed order*, Linear Algebra Appl. **446** (2014), 104-114.

[A4] R. Słowik, *How to construct a triangular matrix of a given order*, Linear Multilinear Algebra **62**(1) (2014), 28–38.

[A5] R. Słowik, *Some new facts about (pseudo) involutions in the Riordan group*, Indian J. Pure Appl. Math. **51**(4) (2020), 1769–1777.

[A6] R. Słowik, *More about involutions in the group of almost-Riordan arrays*, Linear Algebra Appl. **624** (2021), 247-258.

[A7] R. Słowik, *Products of Riordan arrays of finite orders*, J. Algebr. Comb., w druku, `https://doi.org/10.1007/s10801-022-01145-y`.

Wprowadzenie

W celu umotywowania moich zainteresowań związanych z macierzami nieskończonymi, warto przyjrzeć się nieco historii tego pojęcia. Prawdopodobnie pierwsze[1] wzmianki dotyczące macierzy nieskończonych, a także ich wyznaczników znajdują się w pracach Poincaré'go [146, 147], w których obiekty te używane są w sposób intuicyjny do rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu. To innowacyjne podejście zostało następnie sformalizowane przez von Kocha [96, 97], który kontynuował rozważania dotyczące równań różniczkowych – przede wszystkim równania Fuchsa i ich powiązań z macierzami nieskończonymi [101], ale również interesował się zbieżnością nieskończonych wyznaczników samych w sobie [98, 99, 100, 102]. Prawdziwą popularność macierze nieskończone zdobyły jednak dzięki Hilbertowi, który w pracy [75], po utożsamieniu ich z nieskończonymi formami kwadratowymi, zastosował je do rozwiązywania równań całkowych. Badania Hilberta były kontynuowane przez Schmidta [161], Hellingera i Toeplitza [72, 73]. Macierze nieskończone, a w zasadzie ich wyznaczniki związane z teorią Fredholma pojawiają się również w pracach polskich matematyków – przede wszystkim Leżańskiego, który zajmował się równaniami funkcyjnymi w przestrzeniach unormowanych [109], oraz Sikorskiego, który rozważał równania funkcyjne w przestrzeniach Banacha [166, 150] (zob. też rozdział IV w monografii [150]). W 1929 roku von Neumann [136] zaprezentował bardziej abstrakcyjne, ale także dużo skuteczniejsze podejście do problemu rozwiązywania równań całkowych, co oczywiście, umniejszyło rolę macierzy nieskończonych w problemach związanych z teorią operatorów[2]. Jednak, obiekty te, jak postaram się przedstawić w niniejszym autoreferacie, nadal stanowią, nie tylko istotną, ale nadal twórczą, gałąź algebry liniowej.

W większości zaprezentowanych poniżej prac przez macierz nieskończoną rozumiem dowolną funkcję $M\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to R$, gdzie R jest łącznym, przemiennym pierścieniem z jedynką oznaczaną symbolem 1, najczęściej ciałem, natomiast $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich, a $\mathbb{N}_0$ to zbiór $\{0\}\cup\mathbb{N}$. Naturalnym jest utożsamienie tychże funkcji z $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-macierzami:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

W zbiorze wszystkich takich macierzy równie naturalnym jest wprowadzenie "tradycyjnego" dodawania po współrzędnych, tzn.

$$M=[m_{ij}]_{i,j\in\mathbb{N}},\ N=[n_{ij}]_{i,j\in\mathbb{N}} \quad\Rightarrow\quad [M+N]_{ij}=m_{ij}+n_{ij},\ i,j\in\mathbb{N}.$$

Oczekuje się, aby mnożenie takich macierzy również było zdefiniowane w sposób wręcz analogiczny jak dla macierzy kwadratowych skończonego stopnia, jednak przypadek nieskończony jest nieco bardziej problematyczny. W ogólności, iloczyn taki może nie być poprawnie zdefi-

[1] Warto dodać przy okazji, że nieskończone układy równań były rozważane jeszcze wcześniej – przez Fouriera [58], jednak, mimo, iż nie pozostają one bez związku z przedstawionym tu tematem, ograniczę się do macierzy. Czytelników zainteresowanych tymże tematem pozwalam sobie odwołać do [17].

[2] Choć nie zmarginalizowało jej zupełnie; warto tu wymienić na przykład pracę [118] poświęconą spektrum macierzy nieskończonych reprezentujących operatory.

niowany[3], jak pokazuje trywialny przykład $M = N = [1]_{i,j\in\mathbb{N}}$. Ponadto, nawet jeśli iloczyny macierzy nieskończonych z pewnej rodziny są poprawnie określone, mnożenie może okazać się niełączne – jak w szczególności w klasycznym przykładzie z [91], gdzie

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

są takie, że

$$(MN)P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad M(NP) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Macierze nieskończone dostarczają dobrych przykładów pierścieni niełącznych. Dokładniej, w [186, 123] można znaleźć konstrukcję takich pierścieni opartą na istnieniu macierzy nieskończonych, które mają nieskończenie wiele odwrotnych. Niemniej jednak, przy rozpatrywaniu grup, łączność mnożenia jest, oczywiście, niezbędna. Stąd, rozpatrując iloczyn MN – macierzy $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ należy założyć, że dla dowolnych $i, j \in \mathbb{N}$ zbiór $\{k \in \mathbb{N} \colon m_{ik}n_{kj} \neq 0\}$ jest skończony[4]. Aby zapewnić łączność całej rodzinie macierzy nieskończonych[5] najczęściej rozpatruje się jeden z następujących pierścieni macierzowych $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ nad ustalonym pierścieniem R: $\mathcal{M}_{Cf}(R)$ (Cf – column finite), $\mathcal{M}_{Rf}(R)$ (Rf – row finite), $\mathcal{M}_{RCf}(R)$ (RCf – row and column finite), które w każdej kolumnie, odpowiednio wierszu lub kolumnie i wierszu, mają skończoną liczbę elementów niezerowych. W obu tych pierścieniach można wprowadzić operację mnożenia macierzy przez skalar zgodnie ze wzorem:

$$[\alpha \cdot [m_{ij}]_{ij}]_{nk} = \alpha \cdot m_{nk}$$

i, dzięki temu, uzyskać w $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ ($\mathcal{M}_{Rf}(F)$ odpowiednio), gdzie F jest ciałem, strukturę algebry. Algebry te posiadają następującą uniwersalną własność.

[3]Zagadnienie *poprawnej określoności* iloczynu macierzy nieskończonych jest delikatną sprawą. Z jednej strony, w pierścieniach nad którymi rozważane są macierze dodawanie jest działaniem dwuargumentowym, zatem każda rozważana suma powinna składać się ze skończonej liczby elementów. Z drugiej strony, jak przedstawiono powyżej, pierwotnie macierze nieskończone były nierozerwalnie związane z operatorami rzeczywistymi bądź zespolonymi, których mnożenie pociągało za sobą rozważanie pewnych szeregów. Stąd ustalmy, że iloczyn dwóch macierzy nad ustalonym ciałem rozmiaru $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ jest poprawnie określony, jeśli każdy szereg (odpowiadający iloczynowi i-tego wiersza "pierwszej" macierzy i j-tej kolumny "drugiej" macierzy), tj. sum częściowych $\left\{\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w ustalonej dla danego ciała metryce. W zasadniczej części tego referatu rozpatrywane będą macierze dla których szeregi te będą po prostu ciągami prawie stałymi, czyli o dobrze określonych sumach.

[4]Należy wspomnieć, że iloczyny macierzy nieskończonych dla których zbiory $\left\{k \in \mathbb{N} \colon m_{ik}n_{kj} \neq 0\right\}$ są nieskończone również są przedmiotem badań w kontekście przestrzeni składających się z ciągów, a zapis $\sum_{k\in\mathbb{N}} m_{ik}n_{kj}$ oznacza tam szereg $\left\{\sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj}\right\}_{n=1}^{\infty}$, który może być rozbieżny, np. w [46, 133, 141, 93, 157, 181], jednak aby nie odchodzić zbyt daleko od tematu rozprawy pozostanę przy założeniu, że $|\left\{k \in \mathbb{N} \colon m_{ik}n_{kj} \neq 0\right\}| < \infty$ dla dowolnej pary $(i, j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

[5]Więcej o łączności i poprawnej określoności konkretnych trójek można przeczytać w [22].

Twierdzenie 1. *([63], Prop.2.1) Każda łączna F-algebra przeliczalnego wymiaru ma wierną reprezentację w $\mathcal{M}_{Rf}(F)$ (odpowiednio w $\mathcal{M}_{Cf}(F)$).*

Przedstawione tutaj główne osiągnięcie naukowe dotyczy grup zawartych w pierścieniu $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ – przede wszystkim grupy $T_\infty(F)$ składającej się z macierzy górnotrójkątnych o elementach odwracalnych na głównej przekątnej. W dalszej części przedłożonej rozprawy pojawi się również wiele rozważań na temat pierścienia macierzy górnotrójkątnych oznaczanego przez $\mathcal{T}_\infty(F)$.

Opis cyklu prac [A1]-[A7]

Inwolucją w grupie G nazywamy dowolny element należący do G rzędu 2. Oczywiście, w szczególności oznacza to, że dla dowolnej inwolucji A spełniona jest równość $A^{-1} = A$, dzięki czemu macierz o takiej własności bardzo dobrze nadaje się do operacji szyfrowania [76]. Można zauważyć, że w pełnej grupie liniowej $GL_n(F)$ nad ciałem F charakterystyki różnej od 2, każda inwolucja jest sprzężona z macierzą diagonalną postaci

$$\begin{bmatrix} -I_{n-k} & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \quad \text{dla pewnego } k,\ 0 < k < n. \tag{1}$$

Gdy F jest ciałem charakterystyki 2, to inwolucje z $GL_n(F)$ są sprzężone z sumami prostymi bloków postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a także z macierzami postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} I_{n-2k} & 0 & 0 \\ 0 & I_k & I_k \\ 0 & 0 & I_k \end{bmatrix}$$

- co jest nieco mniej oczywiste.

Niewiele jest prac w których rozważane są inwolucje macierzowe nad ciałem charakterystyki 2. Najprawdopodobniej jedyne takie prace to [108, 61, 84], przy czym [84] dotyczy przede wszystkim reprezentacji, natomiast praca [61] poświęcona jest *klasom liniowym*[6] inwolucji, tj. klasom postaci

$$\{(1+\theta)A + \theta B \colon \theta \in F\}, \quad \text{gdzie } A,\ B, \text{ to ustalone inwolucje.}$$

Artykuły te nie zawierają żadnego rodzaju charakteryzacji inwolucji nad ciałem skończonym, co oczywiście rodzi wątpliwości czy w tym przypadku istnieje jakiś prosty opis tych elementów.

W przypadku podgrup właściwych $GL_n(F)$, jak na przykład w rozważanej tutaj grupie macierzy górnotrójkątnych, nie każda inwolucja musi być sprzężona z inwolucją diagonalną postaci (1). Łatwo natomiast zauważyć, że główna przekątna każdej macierzy górnotrójkątnej, stopnia skończonego bądź nieskończonego, musi składać się z elementów należących do zbioru $\{-1, 1\}$. Prawdziwe jest stwierdzenie nieco słabsze od powyżej wspomnianego. Mianowicie:

[6] W oryginale autor nazywa je *linear classes*.

Lemat 1. *([A6], Lem.2.1) Jeśli F jest ciałem charakterystyki różnej od 2, natomiast A inwolucją będącą macierzą górno-, odpowiednio dolnotrójkątną dowolnego ustalonego stopnia $n \in \mathbb{N}$, to istnieje macierz B górno-, odpowiednio dolnotrójkątna, taka, że $A^B := B^{-1}AB$ jest macierzą diagonalną.*

Dowód tego lematu dodatkowo pozwala sformułować:

Wniosek 1. *Jeśli F jest ciałem charakterystyki różnej od 2, natomiast A inwolucją będącą macierzą $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ górno-, odpowiednio dolnotrójkątną, to istnieje macierz G górno-, odpowiednio dolnotrójkątna, taka, że A^G jest macierzą diagonalną.*

Wniosek 1 stanowi pewien punkt wyjścia do sformułowania charakteryzacji inwolucji z $T_\infty(F)$.

Twierdzenie 2. *([A2], Thm.1.1) Niech* $\mathrm{char}(F) \neq 2$. *Macierz $T = [t_{ij}] \in T_\infty(F)$ jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są poniższe warunki.*

(a) *Dla wszystkich $i \geqslant 1$ mamy $t_{ii} \in \{-1, 1\}$.*

(b) *Dla wszystkich par i, j, $1 \leqslant i < j$, takich że $t_{ii} = -t_{jj}$, elementy t_{ij} mogą być wybrane dowolnie.*

(c) *Dla wszystkich par i, j, $1 \leqslant i < j$, takich że $t_{ii} = t_{jj}$, element t_{ij} musi być równy*

$$t_{ij} = \begin{cases} -(2t_{ii})^{-1} \sum\limits_{p=i+1}^{j-1} t_{ip}t_{pj} & \textit{jeśli} \quad j > i+1, \\ 0 & \textit{jeśli} \quad j = i+1. \end{cases}$$

Oczywiście analogiczne twierdzenie jest spełnione dla macierzy kwadratowych skończonego stopnia. W tym przypadku twierdzenie 2 jest punktem wyjścia do wyznaczenia liczby inwolucji trójkątnych ustalonego stopnia n nad ciałem q-elementowym. Dokładniej, ustaliwszy, że główna przekątna macierzy $T \in T_n(F)$ spełniającej $T^2 = I_n$ ma postać $(t_{ii})_{i=1}^n$, można zauważyć, że liczba elementów, które mogą być wybrane dowolnie, a które znajdują się na przekątnej k-tej, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, jest równa liczbie par postaci $(t_{ii}, t_{i+k,i+k})$ takich, że $t_{ii}t_{i+k,i+k} = -1$. Sumując po wszystkich przekątnych ostatecznie można otrzymać poniższe:

Twierdzenie 3. *([A2], Thm.1.2) Niech F będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Jeśli $|F| = q$, to liczba macierzy $T = [t_{ij}] \in T_n(F)$ spełniających $T^2 = I_n$ jest równa*

$$\mathcal{I}(n,F) = \alpha q^{\frac{n^2}{4}} + 2 \sum_{\substack{1 \,\leq\, p \,\leq\, n \\ 2|(n\,-\,p)}} \binom{n}{\frac{n-p}{2}} q^{\frac{n^2-p^2}{4}},$$

gdzie

$$\alpha = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} & \textit{gdy} \quad 2|n, \\ 0 & \textit{gdy} \quad 2 \nmid n. \end{cases}$$

Tabela 1 zawiera zestawienie liczb $\mathcal{I}(n,F)$ dla kilku wybranych wartości $n \in \mathbb{N}$.

Inwolucje bardzo często są rozważane w kontekście generatorów. W szczególności wiadomo, że jeśli skończona prosta grupa nieabelowa jest generowana przez inwolucje, to każdy element tej grupy może być zapisany jako iloczyn co najwyżej czterech inwolucji [117]. Teoria grup liniowych zawiera bardzo wiele podobnych wyników. Prawdopodobnie pierwszy z nich należy do Samsona [156].

Tabela 1: Tabela zawierająca $\mathcal{I}(n, F)$ dla F, $|F| = q$.

n	$\mathcal{I}(n, F)$
2	$2 + 2q$
3	$2 + 6q^2$
4	$2 + 8q^3 + 6q^4$
5	$2 + 10q^4 + 20q^6$
6	$2 + 12q^5 + 30q^8 + 20q^9$
7	$2 + 14q^6 + 42q^{10} + 70q^{12}$
8	$2 + 16q^7 + 56q^{12} + 112q^{15} + 70q^{16}$
9	$2 + 18q^8 + 72q^{14} + 168q^{18} + 252q^{20}$
10	$2 + 20q^9 + 90q^{16} + 240q^{21} + 420q^{24} + 252q^{25}$

Twierdzenie 4. *([156], Thm.1) Jeśli A jest macierzą o elementach rzeczywistych taką, że $\det(A) = \pm 1$, to A jest iloczynem skończonej liczby inwolucji.*

W pracy [156] nie jest wyznaczona dokładna liczba inwolucji potrzebna do zapisu ustalonego elementu. Pierwszą konkretną wartość podał Radjavi [152].

Twierdzenie 5. *([152], Thm.8) Dla dowolnego ciała F każda macierz $A \in GL_n(F)$ taka, że $\det A = \pm 1$ jest iloczynem $2n - 1$ inwolucji takich, że $\operatorname{rank}(M - I_n) = 1$. Ponadto, jeśli $\operatorname{char}(F) = 2$, to liczba prostych inwolucji w rozkładzie może być zmniejszona do $2n - 2$.*

Powyższe wyniki sugerują, że liczba ta rośnie wraz ze stopniem macierzy, jednak w istocie w przypadku macierzy określonych nad ciałami oraz niektórymi pierścieniami, liczba ta jest ustalona dla dowolnego stopnia. Jako pierwszy zauważył to (również) Radjavi [151] dla klasy macierzy unitarnych korzystając m.in. z pewnego twierdzenie Frobeniusa.

Twierdzenie 6. *([151], Thm.3) Niech U będzie macierzą unitarną określoną nad ciałem liczb zespolonych. Mamy $\det(U) = \pm 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy U jest iloczynem czterech inwolucji[7].*

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla macierzy symplektycznych[8] [47]. Wynik dla przypadku ogólnego, korzystający z macierzy stowarzyszonych z wielomianami, został udowodniony przez Gustafsona, Halmosa i Radjavi'ego [67].

Twierdzenie 7. *([67]) Dla dowolnego ciała F każda macierz $A \in GL_n(F)$ taka, że $\det A = \pm 1$ jest iloczynem co najwyżej czterech inwolucji.*

Co ciekawe, jeszcze przed opublikowaniem dowodu twierdzenia 7 wiadomo było, że pojawiająca się tam liczba 4 nie może być zmniejszona do 3, a dowód tego faktu [68] jest czysto

[7] Warto dodać, że Radjavi zaobserwował również, że w takim rozkładzie: $U = \prod_{k=1}^{4} A_i$, iloczyn $A_1 A_2$ jest przemienny z $A_3 A_4$.

[8] Jednak warto dodać, że w tym przypadku dowód jest bardziej skomplikowany niż w przypadku macierzy unitarnych.

teorio-grupowy[9]. Warto wspomnieć, że istnieją pewne charakteryzacje iloczynów mniejszej liczby inwolucji. Dla iloczynu dwóch takich elementów kryterium zostało udowodnione najpierw przez Wonenburger [195] w przypadku ciała o charakterystyce różnej od 2, a następnie przez Djokovića [54] oraz Hoffmana i Paige'a [77] w przypadku dowolnego ciała. Dokładniej, spełnione jest

Twierdzenie 8. *Macierz $A \in GL_n(F)$ taka, że $\det A = \pm 1$, jest iloczynem dwóch inwolucji wtedy i tylko wtedy, gdy A jest sprzężona z A^{-1}.*

Istnieją pewne warunki [7, 113] opisujące iloczyny trzech inwolucji. Dokładniej, warunki te sprowadzają się do nierówności, które muszą spełniać jądra tych iloczynów. Kryteria te są bardziej skomplikowane niż stosowne kryteria w przypadku iloczynu dwóch inwolucji.

W przypadku nieskończenie wymiarowym liczba wyników dotyczących rozkładów z użyciem inwolucji nie jest imponująca. Niemniej, znane jest pewne twierdzenie "operatorowe" analogiczne do twierdzenia 7, udowodnione zresztą prawie dwadzieścia lat wcześniej.

Twierdzenie 9. *([68], Thm.1) W nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta każdy operator unitarny jest iloczynem czterech inwolucji.*

Praca [A1] poświęcona jest rozkładom górnotrójkątnych macierzy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na iloczyny inwolucji. Oczywiście główna przekątna takiego iloczynu składa się z elementów równych 1 bądź -1. Stąd, niech $\pm UT_\infty(F)$ oznacza grupę górnotrójkątnych macierzy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o właśnie takich przekątnych. Pomimo, iż główny wynik uzyskany w [A1] jest analogiczny jak w twierdzeniach 7, 9, to nie sposób wykorzystać w przypadku $\pm UT_\infty(F)$ zastosowanych tam metod dowodu – rozpatrywane macierze niekoniecznie reprezentują operatory unitarne, nie zawierają również jako podmacierzy macierzy nie będących trójkątnymi, np. wykorzystanych w [67] inwolucji postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix},$$

czy macierzy stowarzyszonych z wielomianami. Niemniej w [A1] wykorzystywane są proste inwolucje stopnia 2, tzn. macierze:

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przy ich pomocy udowodnione jest poniższe

Twierdzenie 10. *([A1], Thm.3.1) Niech F będzie dowolnym ciałem. Jeśli macierz $G = [g_{ij}] \in UT_\infty(F)$ spełnia warunek $g_{i,i+1} \neq 0$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$, to G jest iloczynem co najwyżej dwóch inwolucji z grupy $\pm UT_\infty(F)$.*

Korzystając ponownie z prostych inwolucji oraz inwolucji będącymi macierzami diagonalnymi można otrzymać główny wynik [A1].

[9] Dokładniej, uwaga ta dotyczy dowodu przedstawionego w [68].

Twierdzenie 11. *([A1], Thm.1.2[10]) Dla dowolnego ciała F, każdy element grupy $\pm UT_\infty(F)$ może być przedstawiony jako iloczyn co najwyżej czterech inwolucji.*

Twierdzenie to zostało później uogólnione na przypadek macierzy określonych nad pewnymi pierścieniami [82, 83].

Najoczywistszą konsekwencją twierdzenia 11 jest fakt, że każda macierz skończonego stopnia określona nad dowolnym ciałem, górno- lub dolnotrójkątna, o elementach głównej przekątnej równych ± 1, również jest iloczynem co najwyżej czterech inwolucji. Ponadto, metody zastosowane przy dowodzie twierdzeń 10, 11 mogą być wykorzystane również przy badaniu grupy Vershika-Kerova $GL_{VK}(F)$:

$$GL_{VK}(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left[\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline 0 & K \end{array}\right] :\ G \in GL_n(F),\ K \in T_\infty(F),\ H \in M_{n\times\mathbb{N}}(F) \right\}.$$

Dokładniej, łącząc twierdzenia 7, 11, a także korzystając z rozkładu:

$$\left[\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline 0 & K \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} -I_n & HK^{-1} \\ \hline 0 & I_\infty \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} -G & 0 \\ \hline 0 & K \end{array}\right]$$

można otrzymać następujący

Wniosek 2. *([A1], Cor.4.1[11]) Jeśli F jest dowolnym ciałem, natomiast*

$$A = \left[\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline 0 & K \end{array}\right]$$

jest elementem $GL_{VK}(F)$ takim, że $\det(G) = \pm 1$ oraz $K \in \pm UT_\infty(F)$, to A jest iloczynem co najwyżej pięciu inwolucji.

W teorii macierzy nieskończonych pojawia się pewna grupa macierzy dolnotrójkątnych, dla której problemy dotyczące inwolucji, a także elementów związanych z inwolucjami stały się już klasyczne. Chodzi o grupę Riordana $\mathcal{R}(F)$. Grupa ta została zdefiniowana w [160]. Jej elementy utożsamiane są z parami formalnych szeregów potęgowych $(d(t), h(t))$ postaci:

$$d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n, \quad h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n t^n, \qquad \text{gdzie } d_0, h_1 \neq 0.$$

Mnożenie tychże par zdefiniowane jest za pomocą wzoru

$$(d(t), h(t)) * (D(t), H(t)) = (d(t)D(h(t)), H(h(t)))\,;$$

[10] Bez trudu można zauważyć, że w rzeczywistości w [A1] twierdzenie to jest sformułowane dla ciał charakterystyki różnej od 2. Jest to moje niedopatrzenie. W [A1] przed twierdzeniem 1.2 udowodnione jest twierdzenie 1.1 stwierdzające, że dowolna macierz z $\pm UT(F)$, gdzie F jest dowolnym ciałem, może być zapisana jako iloczyn co najwyżej pięciu inwolucji. Rozkład ten zawiera inwolucję diagonalną, która oczywiście w przypadku ciała o charakterystyce 2 jest macierzą jednostkową.

[11] Podobnie jak w przypadku twierdzenia 11, oryginalnie we wniosku 4.1 pojawia się iloczyn sześciu inwolucji.

jest ono łączne, a każdy element z $\mathcal{R}(F)$ posiada element odwrotny równy

$$(d(t), h(t))^{-1} = \left(\frac{1}{d(\bar{h}(t))}, \bar{h}(t)\right),$$

gdzie $\bar{h}$ oznacza szereg formalny potęgowy odwrotny do h w sensie składania szeregów. Para $(d(t), h(t))$ jest utożsamiana z macierzą $R = [r_{nm}]$ rozmiaru $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ następująco:

$$r_{nm} = [t^n]d(t)\,(h(t))^m\,,$$

gdzie notacja $[t^n]f(t)$ standardowo oznacza współczynnik szeregu $f(t)$ stojący przy jednomianie t^n. Innymi słowy, szereg $d(t)\,(h(t))^m$ jest funkcją generującą m-tej kolumny macierzy R:

$$(d(t), h(t)) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} d(t) & d(t)\cdot h(t) & d(t)\cdot (h(t))^2 & \cdots \end{array}\right].$$

Z definicji macierzy Riordana wynika, że główna przekątna dowolnej macierzy z $\mathcal{R}(F)$ tworzy ciąg geometryczny. Zatem biorąc pod uwagę fakt, że główna przekątna inwolucji składa się z elementów ± 1, w $\mathcal{R}(F)$ główna przekątna inwolucji musi być postaci $1, -1, 1, -1, \ldots$ lub $-1, 1, -1, 1, \ldots$ Bez utraty ogólności skupię się tu na pierwszym przypadku. Niech $\tilde{I}$ oznacza macierz Riordana:

$$(1, -t) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

W [158] Shapiro postawił kilka problemów, głównie kombinatorycznych, spośród których dwa dotyczyły inwolucji w $\mathcal{R}(F)$. Mianowicie:

> **Q8** Czy każda inwolucja z $\mathcal{R}(F)$ jest sprzężona z $\tilde{I}$ w $\mathcal{R}(F)$?
>
> **Q9.1** Jeśli $R = (d(t), h(t)) \in \mathcal{R}(F)$ jest inwolucją, to czy istnieje prosty warunek wyrażający d za pomocą h?

Już od kilkunastu lat znane są odpowiedzi na obydwa pytania[12]. Rozwiązania przedstawili jako pierwsi Cheon i Kim [36] posługując się pewnymi równaniami funkcyjnymi.

Twierdzenie 12. *([36], Thm.2.3) Jeśli $(d(t), h(t)) \in \mathcal{R}(F)$ jest inwolucją, to*

$$d(t) = \pm \exp\left(\Phi(t, th(t))\right)$$

dla pewnej antysymetrycznej funkcji Φ. Ponadto

$$B^{-1}(d(t), h(t))B = \tilde{I}, \quad \textit{gdzie} \quad B = \left(\exp\left(\frac{\Phi(t, th(t))}{2}\right), \frac{\Phi(t, th(t))}{t}\right).$$

[12]Oczywiście nieco niejednoznaczne słowo ”prosty” występujące w sformułowaniu problemu **Q9.1** rodzi możliwość nieskończonego podtrzymywania negatywnej odpowiedzi, jednak pozwolę sobie na uwagę, że przez wzgląd na pewne prace dotyczące **Q9.1** wiemy już wystarczająco wiele, by uznać, iż na to pytanie również znaleziono odpowiedź.

Niedługo później Kida [94] polegając na szeregach formalnych i korzystając, między innymi z wyników O'Farrell'a [138][13], również udowodnił, że każda inwolucja Riordana jest sprzężona z $\tilde{I}$. Jeszcze jeden dowód tego faktu, który zaowocował jeszcze prostszą formą macierzy przejścia przedstawił Cohen. Dokładniej, udowodnił poniższe

Twierdzenie 13. *([45], Rem.1.6) Jeśli $R = (d(t), h(t)) \in \mathcal{R}(F)$ jest inwolucją, to*

$$\left(\sqrt{\frac{d(t)}{d_0}}, \frac{t-h(t)}{2}\right)^{-1} (d(t), h(t)) \left(\sqrt{\frac{d(t)}{d_0}}, \frac{t-h(t)}{2}\right) = \tilde{I}.$$

Oczywiście, poruszenie tematu inwolucji w grupie Riordana spowodowało zainteresowanie istnieniem różnych charakteryzacji inwolucji z $\mathcal{R}(F)$. Można uznać, że znane są dwa, zdecydowanie różniące się od siebie, opisy tychże elementów. Pierwszy z nich wykorzystuje podwyznaczniki danej inwolucji.

Twierdzenie 14. *([38], Thm.3.1) Niech $R = [r_{i,j}]$ będzie macierzą Riordana o głównej przekątnej $1, -1, 1, \dots$ Wówczas R jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu kolejnych indeksów $\alpha = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \mathbb{N}_0$ $(k \geqslant 3)$ spełniona jest równość:*

$$\det(\bar{R}[\alpha]) = (-1)^{i_2+\cdots+i_{k-1}} r_{i_k, i_1},$$

gdzie $\bar{R}[\alpha]$ powstaje z macierzy $R[\alpha]$ poprzez "wykreślenie" pierwszego wiersza i ostatniej kolumny, a $R[\alpha]$ to podmacierz R składająca się z wierszy i kolumn indeksowanych elementami ciągu α.

Pomimo, iż powyższe kryterium jest wyrażone za pomocą zwartego wzoru, może być oczywiście trudne do zweryfikowania. Prostsze wydaje się poniższe kryterium zaproponowane w [115], które przypomina nieco warunek z twierdzenia 2.

Twierdzenie 15. *([115], Thm.6) Niech R_n oznacza macierz stopnia n, która powstaje z ustalonej macierzy Riordana R poprzez wybranie pierwszych n wierszy oraz pierwszych n kolumn.*

(a) *Jeśli $2|n$, to R_{n+1} jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy*

- ***i.*** *Element r_{n1} może być wybrany dowolnie,*
- ***ii.*** *Element r_{n0} jest równy*

$$r_{n0} = -\frac{1}{2r_{00}} \sum_{k=1}^{n-1} r_{nk} r_{k0}.$$

(b) *Jeśli $2 \nmid n$, to R_{n+1} jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy*

- ***i.*** *Element r_{n0} może być wybrany dowolnie,*
- ***ii.*** *Element r_{n1} jest równy*

$$r_{n1} = -\frac{1}{2r_{11}} \sum_{k=1}^{n-1} r_{nk} r_{k1}.$$

[13] Zacytowana tu praca jest świetnym źródłem wiedzy na temat szeregów będących inwolucjami. Warto jednak dodać, że pierwsze wyniki w tym temacie znane były dużo wcześniej [90].

Shapiro nazwę grupy Riordana zaproponował na cześć znakomitego kombinatoryka Johna Riordana[14]. Istotnie praca [160] poświęcona jest wyłącznie interpretacjom kombinatorycznym. Z tego też powodu niektórzy autorzy rozpatrują jedynie te macierze Riordana, których elementy są całkowite, a nawet wyłącznie całkowite nieujemne. Oczywiście, nawet po ograniczeniu się do macierzy, których główna przekątna składa się wyłącznie z jedynek, zbiór macierzy Riordana o elementach z $\mathbb{N}_0$ nie tworzy grupy. Co więcej, zbiór ten nie zawiera żadnych inwolucji. Stąd w [31] wprowadzono poniższą definicję.

Definicja 1. ([31], Def.1) Mówimy, że $R \in \mathcal{R}(\mathbb{N}_0)$ ma pseudo-rząd równy 2 lub że R jest pseudo-inwolucją, jeśli $R\tilde{I}$ jest inwolucją.

Co ciekawe macierz Riordana określona nad $\mathbb{Z}$ lub nad $\mathbb{R}$ może mieć rząd równy 1 albo 2 albo nieskończony [158, 31].

Cameron i Nkwanta [31], którzy jako pierwsi studiowali pseudo-inwolucje, wskazali w szczególności rodziny uogólnionych trójkątów Pascala oraz uogólnionych trójkątów RNA, które składają się z pseudo-inwolucji. Cheon, Kim i Shapiro podali opis pseudo-inwolucji analogiczny do twierdzenia 14 [38]. Kolejne rodziny pseudo-inwolucji rozważali Phulara i Shapiro [143], Barry [8] oraz He i Shapiro [70]. W artykule [70] wskazana jest pewna wyjątkowo użyteczna własność pseudo-inwolucji, której nie posiadają inwolucje. Mianowicie, jeśli A i B są pseudo-inwolucjami, to każde słowo palindromiczne utworzone za pomocą A i B również jest pseudo-inwolucją.

W [143], oprócz licznych przykładów inowolucji, można znaleźć pewne problemy otwarte. W szczególności, analogiczne do wymienionego powyżej **Q9.1**:

> **Question 3** Mając dany szereg h spełniający $h(-h(-t)) = t$ lub $\bar{h}(t) = h(-t)$ jakie są możliwości, aby wyznaczyć szereg d taki, że $(d(t), h(t))$ jest inwolucją?

Praca [A5] poświęcona jest podobnemu problemowi, tyle, że dotyczy pseudo-inwolucji. Rozważane tam macierze są macierzami Riordana o elementach nieujemnych. Rozumowanie jest oparte na porównaniu dwóch interpretacji pseudo-inwolucji. Z jednej strony są one traktowane jako macierze, które pomnożone przez $\tilde{I}$ są inwolucjami, a zatem są scharakteryzowane jak w twierdzeniu 2, z drugiej są one macierzami Riordana, a zatem ich elementy wyrażają się (na różne sposoby) za pomocą pewnych elementów sąsiednich [128] – w [A5] zastosowana jest podobna zależność, jednak w tym przypadku, nieco inaczej niż w [128], elementy kolejnych przekątnych wyrażają się za pomocą elementów z poprzedzających je przekątnych. Wykorzystanie tych dwóch własności skutkuje uzyskaniem układu równań wiążącym współczynniki danej macierzy, który przy konkretnych założeniach może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie. Ostatecznie w [A5] udowodnione jest twierdzenie[15]:

Twierdzenie 16. *([A5], Thm.1.1) Niech $R = (d(t), h(t)) \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ będzie pseudo-inwolucją o elementach nieujemnych taką, że $d_1 \neq 0$. Wtedy szereg h jest jednoznacznie wyznaczony przez szereg d.*

Warto zwrócić uwagę na fakt, iż twierdzenie 16 nie gwarantuje, że dla dowolnego szeregu d spełniającego $d_1 \neq 0$ można znaleźć szereg h taki, że $(d(t), h(t))$ jest pseudo-inwolucją. W istocie, nie jest to częste, co można zaobserwować na poniższym przykładzie.

[14] Powszechnie znana jest monografia [153] – obecnie jako klasyka kombinatoryki, która doczekała się m.in. tłumaczenia na język rosyjski.

[15] Odnotujmy, że twierdzenie to nie do końca stanowi odpowiedź na **Question 3**.

Przykład 1. Niech $d(t) = 1 + t$ i niech $h(t) = t + a(t)$, gdzie $a(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n$. Wówczas

$$(d(t), h(t)) * (1, -t) = (1 + t, -t - a(t)),$$

zatem $(d(t), h(t))$ jest pseudo-inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$[(d(t), h(t)) * (1, -t)]^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - t^2 - (1+t)a(t) = 1 \\ t + a(t) - a(-t - a(t)) = t. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymanego układu wynika, że

$$a(t) = -\frac{t^2}{1+t} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} t^n,$$

co, wbrew założeniu, oznacza, że h ma wyrazy ujemne.

Dowód twierdzenia 16 pozwala na sformułowanie innych podobnych wniosków. W szczególności mamy

Wniosek 3. *([A5], Cor.2.1) Jeśli $R = (d(t), h(t))$ jest macierzą Riordana o elementach nieujemnych całkowitych oraz $2 \nmid d_1$, $2 | h_2$, to R nie jest pseudo-inwolucją.*

Po zapoznaniu się z twierdzeniami 12, 13, 14, 15 możnaby przypuszczać, że temat inwoucji w grupie Riordana jest już wyczerpany, jednak z racji pojawienia się pewnego uogólnienia grupy Riordana nadal istnieją sposobności do nowych odkryć. W [9] Barry zdefiniował grupę macierzy prawie-Riordana[16].

Definicja 2. Zbiór macierzy postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} a_0 & \\ \hline \frac{a(t)-a_0}{t} & (d(t), h(t)) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & d_0 & & & \\ a_2 & d_1 & d_0 h_1 & & \\ a_3 & d_2 & d_0 h_2 + d_1 h_1 & d_0 h_1^2 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

gdzie $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n$, $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n t^n$, $a_0, d_0, h_1 \neq 0$, oznaczamy $\mathcal{R}^{(1)}(F)$ i nazywamy macierzami *prawie-Riordana* stopnia 1.

Powyższa definicja może być uogólniona indukcyjnie.

Definicja 3. Zbiór macierzy postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} a_0 & \\ \hline \frac{a(t)-a_0}{t} & R \end{array}\right],$$

gdzie $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$, oraz R jest macierzą prawie-Riordana stopnia n, oznaczamy symbolem $\mathcal{R}^{(n+1)}(F)$, a jej elementy nazywamy macierzami *prawie-Riordana* stopnia $n + 1$.

[16]W oryginale *almost-Riordan arrays.*

Nietrudno jest sprawdzić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $\mathcal{R}^{(n+1)}(F)$ tworzy grupę, chociaż należy przyznać, że wraz z rosnącym n wzory wyrażające iloczyn oraz macierz odwrotną do macierzy prawie-Riordana stają się coraz to bardziej skomplikowane[17].

Z racji uogólnienia pojęcia macierzy Riordana, naturalnym stało się pytanie dotyczące opisu i własności inwolucji w grupach macierzy prawie-Riordana. W [10] Barry i Pantelidis podają przykłady rodzin inwolucji, pseudo-inwolucji, a także quasi-inwolucji[18], przede wszystkim w $\mathcal{R}^{(1)}(F)$. Przykłady te są wynikiem operacji wykonywanych zręcznie na macierzach prawie-Riordana interpretowanych jako trójki szeregów. Zaprezentowane w [10] rodziny inwolucji stanowią bardzo eleganckie przykłady, jednak wielu Czytelnikom może nasunąć się pytanie o bardziej ogólny opis lub bardziej ogólne własności. Jak się okazuje dość użyteczne jest w tym przypadku podejście macierzowe, a dokładniej potraktowanie elementów grupy $\mathcal{R}^{(n)}(F)$ jako macierzy blokowych. Połączenie twierdzenia 13, lematu 1, a także pewne uogólnienie tego ostatniego owocują poniższym, dość "spodziewanym", twierdzeniem.

Twierdzenie 17. *([A6], Thm.1.1) Każda inwolucja z $\mathcal{R}^{(n)}(F)$ jest sprzężona z diagonalną inwolucją.*

Twierdzenie 17, a dokładniej jego dowód, dostarcza "wzorów" opisujących dowolną inwolucję w $\mathcal{R}^{(n)}(F)$:

$$\left[\begin{array}{c|c} D_n^{L_n^{-1}} & 0 \\ \hline R(-UD_n+\tilde{I})L_n^{-1} & \tilde{I}^{R^{-1}} \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c|c} D_n^{L_n^{-1}} & 0 \\ \hline RU(I_n-D_n)L_n^{-1} & I_\infty \end{array}\right], \tag{2}$$

gdzie D_n jest dowolną macierzą diagonalną stopnia n o elementach na głównej przekątnej należących do zbioru $\{-1,1\}$, L_n jest dowolną macierzą dolnotrójkątną, odwracalną stopnia n, R – dowolną macierzą Riordana, natomiast U dowolną macierzą o przeliczalnej liczbie wierszy i liczbie kolumn równej n. Wzory (2) mogą być pomocne przy konstrukcji zarówno bardzo konkretnych jak i nieco bardziej ogólnych przykładów.

Warto dodać, że oprócz podejścia blokowego w uzyskaniu wzorów (3), (4) istotną rolę odegrało zastosowanie następującego Zasadniczego Twierdzenia Macierzy Riordana[19].

Twierdzenie 18. *([159], Thm.2.3) Jeśli $A(t)$, $B(t)$ są funkcjami generującymi odpowiednio kolumny:*

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & a_3 & \cdots \end{bmatrix}^T,$$

to równość:

$$(d(t),h(t))\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

[17] Istotnie, zarówno w [9] jak i w [10] próżno szukać wzoru na iloczyn.

[18] Ze względu na to, że quasi-inwolucje są macierzami Riordana dość szczególnej postaci, które po pewnych modyfikacjach znaków tworzą inwolucje, więc w swoich rozważaniach pozwalam sobie nie poświęcać im tu zbyt wiele uwagi.

[19] W oryginale jest to *Fundamental Theorem of Riordan Arrays* (FTRA).

jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$d(t)A\left(h(t)\right) = B(t).$$

W szczególności spełnione są:

Wniosek 4. *([A6], Cor.4.2.1[20]) Każda inwolucja z $\mathcal{R}^{(1)}$ o głównej przekątnej $(1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ jest postaci*

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \alpha \cdot d(t) \cdot U(h(t)) & \left(\frac{d(t)}{d(\bar{h}(-h(t)))}, \bar{h}(-h(t))\right) \end{array}\right], \tag{3}$$

gdzie U jest funkcją nieparzystą i $\alpha \in \mathbb{C}$.

Wniosek 5. *([A6], Cor.4.2.2) Każda inwolucja z $\mathcal{R}^{(1)}$ o głównej przekątnej $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ jest postaci*

$$\left[\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline \alpha \cdot d(t) \cdot U(h(t)) & \left(\frac{d(t)}{d(\bar{h}(-h(t)))}, \bar{h}(-h(t))\right) \end{array}\right], \tag{4}$$

gdzie U jest funkcją parzystą i $\alpha \in \mathbb{C}$.

Rozważania dotyczące inwolucji w grupie Riordana i grupach macierzy prawie-Riordana zakończę uwagą na temat ich iloczynów, które zostały dokładnie zbadane w [116][21]. Ich własności przypominają nieco wyniki spełnione w grupie $T_\infty(F)$, jednak nie są dokładnie takie same. Zachodzi

Twierdzenie 19. *([116], Thm.1) Każdy element $\mathcal{R}(F)$, który jest iloczynem inwolucji, może być zapisany jako iloczyn co najwyżej czterech inwolucji.*

W powyższym twierdzeniu ponownie pojawia się liczba 4, jednak należy podkreślić, że nie wynika z niego, iż każdą macierz Riordana można zapisać w postaci iloczynu inwolucji. Istotnie jak zauważają autorzy pracy [116][22], jeśli macierz Riordana $(d(t), h(t))$ jest inwolucją, to $h_2^2 = h_1 h_3$, i tę samą równość spełnia iloczyn dowolnej liczby inwolucji, zatem nie jest możliwe, by dowolna macierz Riordana mogła być zapisana w postaci iloczynu skończonej liczby inwolucji.

Jako, że inwolucje to elementy grupy rzędu 2, w świetle wyników przedstawionych powyżej nasuwa się pytanie czy podobne wyniki mogą być otrzymane w przypadku macierzy innych skończonych rzędów. Dobra znajomość rzędów elementów w grupie może, na przykład, pomóc w rozpoznaniu tej grupy [124, 125][23]. Najwięcej wiadomo na temat elementów ustalonego skończonego rzędu w grupach skończonych. Oczywiście, w szczególności istnienie elementów rzędów będących pewnymi potęgami liczb pierwszych dzielących rząd grupy gwarantuje

[20] Należy dodać, że w [A6] wkradł się błąd – w prawym dolnym bloku zamiast ilorazu $\frac{d(t)}{d(\bar{h}(-h(t)))}$ pojawia się iloczyn $d(t) \cdot d(\bar{h}(-h(t)))$; jest to przeoczenie, które pozwalam sobie tutaj sprostować.

[21] Praca ta zawiera jeszcze (co najmniej!) jeden istotny wynik. Mianowicie, opis komutanta $\mathcal{R}$, co stanowi tym samym odpowiedź na pytanie **Q11** z pracy [158].

[22] Należy dodać, że fakt ten jest sformułowany jako skromna uwaga (Remark 6).

[23] Dokładność nakazuje dodać, że wymienione prace są poświęcone nie tylko grupom, które mogą być rozpoznane na podstawie znajomości zbioru wszystkich rzędów, ale także tym, które na pewno w ten sposób nie mogą zostać wyznaczone.

nam twierdzenie Sylowa [177]. Same p-podgrupy Sylowa pełnej grupy liniowej zostały opisane w [193, 194, 65, 85, 86, 155].

Niech $\mathrm{ord}_G(g)$ oznacza rząd elementu g w grupie G. Można zauważyć, że w pełnych grupach macierzowych określonych nad ciałami elementy skończonego rzędu k są sprzężone z macierzami diagonalnymi

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{bmatrix},$$

których elementy d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, spełniają równanie

$$(d_i)^k = 1 \quad \text{dla wszystkich } i, \tag{5}$$

i jednocześnie k jest najmniejszą liczbą naturalną o tej własności. Warunek (5) oznacza, w szczególności, że $\mathrm{ord}_{F^*}(d_i)|k$, chociaż równość $\mathrm{ord}_{F^*}(d_i) = k$ może nie być spełniona dla żadnego i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Literatura dotycząca opisu elementów rzędów większych od 2, jest nieco mniej pokaźna niż w przypadku inwolucji. Do tej pory najbardziej wyczerpującymi pracami dotyczącymi elementów skończonego rzędu w pełnej, specjalnej, projektywnej oraz specjalnej projektywnej grupie liniowej nad ciałami skończonymi pozostają artykuły Darafsheha [49, 50], w których autor wskazuje pewne ograniczenia oraz pewne szczególne rzędy w tych grupach. Znane są również różne ograniczenia wiążące rząd grupy skończonej oraz rzędy jej elementów, np. [198]. Co ciekawe, pomimo braku znajomości dokładnej liczby elementów zadanego rzędu znane jest bardzo dobre oszacowanie średniego[24] rzędu macierzy w pełnej grupie liniowej [175] oraz grupie unitarnej [162].

Rozwijając metodę zaproponowaną w [A2], w pracy [A4] udowodniono odpowiednik twierdzenia 2.

Twierdzenie 20. *([A4], Thm.1.1) Niech $k \in \mathbb{N}$ oraz niech F będzie ciałem takim, że $\mathrm{char}\, F \nmid k$. Macierz $T = [t_{ij}] =\in T_\infty(F)$ ma rząd k wtedy i tylko wtedy, gdy jest scharakteryzowana za pomocą poniższego opisu.*

(a) *Mamy*

- ***i.*** $t_{ii}^k = 1$ *dla wszystkich* $i \in \mathbb{N}$;
- ***ii.*** $NWW_i(\mathrm{ord}_{F^*}(t_{ii})) = k$;

(b) *jeśli tii $\neq t_{jj}$, to element t_{ij} może ustalony dowolnie;*

[24] W sensie średniej arytmetycznej.

(c) *jeśli $t_{ii} = t_{jj}$, to element t_{ij} jest równy*[25]*:*

$$t_{ij} = \begin{cases} 0 \quad \text{gdy} \quad j = i+1 \\ -k^{-1} g_{ii} \displaystyle\sum_{\substack{i \le r_u \le r_{u+1} \le j \\ \exists u\,(r_u \ne i \,\vee\, r_u \ne j)}} t_{ir_1} t_{r_1 r_2} \cdots t_{r_{k-1} j} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{6}$$

Chociaż twierdzenie 20 jest zdecydowanie podobne do twierdzenia 2, zwraca uwagę fakt, iż warunek (6) jest bardziej rozbudowany niż w przypadku rzędu równego 2. Oczywiście, jest to konsekwencja zwiększania się liczby k i potrzeby rozpatrywania potęg o większych wykładnikach.

Naturalnym jest pytanie czy twierdzenie 3 również ma swój odpowiednik. Odpowiedź jest pozytywna, jednak wynik komplikuje się, nie tylko z powodu zwiększającego się rzędu, ale również zwiększającej się liczby dzielników k. Dokładniej, w [A4] sformułowane jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 21. *([A4],Thm.1.2) Niech $k \in \mathbb{N}$ oraz niech F będzie ciałem skończonym takim, że* $\operatorname{char} F \nmid k$ *i $|F| = q$. Jeśli F zawiera l elementów g takich, że* $\operatorname{ord}_{F^*}(g)|k$*, to grupa $T_n(F)$ zawiera*

$$\mathcal{N}(n,k,F) = \sum_{j=1}^{\min(l,n)} \sum_{\substack{m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_j \\ m_1 + \cdots + m_j = n}} \frac{l!}{(l-j)! \cdot g(m_1,\ldots,m_j)} \binom{n}{m_1,\ldots,m_j} q^{\frac{1}{2}(n^2 - \sum_{u=1}^{j} m_u^2)}$$

elementów T takich, że $\operatorname{ord}_{T_n(F)}(T)|k$*, gdzie $g(m_1,\ldots,m_j)$ oznacza $r_1! \cdots r_s!$ zakładając, że*

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{r_1} \ne m_{r_1+1} = m_{m_1+2} = \ldots = m_{r_1+r_2} \ne m_{r_1+r_2+1} = \cdots .$$

Jak wspomniano powyżej, twierdzenie 21 nie jest dokładnym odpowiednikiem twierdzenia 3, gdzie aby otrzymać liczbę inwolucji wystarczyło od $\mathcal{I}(n,F)$ odjąć 1. Niemniej, oznaczając przez $\mathcal{O}(n,k,F)$ liczbę elementów $T_n(F)$, których rząd wynosi (dokładnie) k oraz stosując do oczywistej równości

$$\mathcal{N}(n, p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}, F) = \sum_{m | p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}} \mathcal{O}(n,m,F)$$

wzór Mobiüsa[26] można otrzymać wzór

$$\mathcal{O}(n, p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}, F) = \sum_{m | p_1 \cdots p_r} \mathcal{N}(n, p_1^{s_1 - 1} \cdots p_r^{s_r - 1} \cdot m, F) \cdot \mu(m).$$

[25] Symbol k oznacza tu sumę $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ razy}}$.

[26] czyli następującą równość zachodzącą dla dowolnych funkcji arytmetycznych f, g:

$$\sum_{d|n} f(d) = g(n) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$$

gdzie μ jest funkcją Mobiüsa, tzn. $\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ 0 & \text{gdy } n \text{ jest podzielna przez kwadrat jakiejś liczby pierwszej,} \\ m & \text{gdy } n \text{ jest iloczynem } m \text{ różnych liczb pierwszych.} \end{cases}$

Kolejnym, dość naturalnym, pytaniem jest czy spełniony jest również jakiś odpowiednik twierdzenia 11. Istotnie, w [A3] można znaleźć poniższy wynik.

Twierdzenie 22. *([A3], Thm.1.2) Niech F będzie ciałem q-elementowym, $q > 2$. Każdy element grupy $T_\infty(F)$ jest iloczynem co najwyżej czterech macierzy z $T_\infty(F)$, których rzędy są dzielnikami $q-1$.*

Oczywiście, z powyższego twierdzenia otrzymujemy, że każda macierz trójkątna odwracalna określona nad ciałem skończonym również jest iloczynem co najwyżej czterech macierzy trójkątnych rzędów skończonych, ale również

Wniosek 6. *([A3], Thm.1.4) Niech F będzie ciałem q-elementowym, $q > 2$. Grupa $GL_{VK}(F)$ jest generowana przez elementy, których rzędy są dzielnikami $q-1$.*

We wniosku 6, w odróżnieniu od pozostałych cytowanych tutaj wyników, nie jest podane żadne ograniczenie wskazujące liczbę macierzy odpowiednich rzędów potrzebnych do otrzymania dowolnej macierzy, jednak liczba ta zdecydowanie jest skończona. Łatwo wywnioskować to na przykład z zacytowanego poniżej twierdzenia[27].

Twierdzenie 23. *([134], Thm.1.3) Niech $A \in \mathcal{M}_n(F)$, gdzie $n \geqslant 2$ oraz niech F będzie dowolnym ciałem. Wtedy istnieją macierze dolnotrójkątne L, M oraz macierz górnotrójkątna U takie, że $A = LUM$. Ponadto, macierze L i U są unitrójkątne.*

W świetle tegoż twierdzenia[28] oraz równości

$$\left[\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline 0 & K \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} VL & 0 \\ \hline 0 & I_\infty \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} U & L^{-1}V^{-1}H \\ \hline 0 & K \end{array}\right], \quad \text{gdzie } G = VLU,$$

można wskazać liczbę 12 jako ograniczenie górne liczby macierzy występujących w rozkładzie z wniosku 6.

Zauważmy, że twierdzenie 22 dotyczy wyłącznie ciał skończonych. W istocie, z dowodu wynika jednak, że dla dowolnego ciała spełnione jest

Twierdzenie 24. *([A3], Thm.2.2) Załóżmy, że F jest ciałem zawierającym pierwiastek pierwotny stopnia k z 1. Jeśli macierz $T = [t_{ij}] \in T_\infty(F)$ spełnia warunek $NWW_i(\mathrm{ord}_{F^*}(t_{ii})) = k$, to T można przedstawić w postaci iloczynu co nawyżej czterech macierzy, których rzędy są dzielnikami k.*

W świetle wyników dotyczących macierzy rzędów różnych od 2 warto zapytać czy analogiczne twierdzenia są spełnione w grupie Riordana. Oczywiście zależy to[29] od pierścienia nad którym zdefiniowane są rozpatrywane macierze Riordana. Zazwyczaj jest to ciało liczb zespolonych

[27] Należy wspomnieć, że jest to wspaniałe uogólnienie równie pięknego i klasycznego rozkładu postaci LUL, którego istnienie zostało udowodnione przez Vasersteina i Wheland w [184] dla macierzy nieosobliwych. Co więcej, niedługo później [134] udowodniono, że jest ono również spełnione dla pewnej klasy pierścieni.

[28] A dokładniej, jego wersji "transponowanej".

[29] I to nie tylko w przypadku grupy Riordana, ale dowolnej grupy macierzowej.

– jak już wcześniej było wspomniane, przypadki $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ oraz $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$ nie są zbyt ciekawe. Oczywiście, $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ zawiera zarówno elementy dowolnego skończonego rzędu, których najprostszym przykładem są macierze

$$\left(1, e^{\frac{2\pi i}{k}} \cdot t\right) = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i}{k}} & & & & \\ & e^{\frac{2\pi i}{k}} & & & \\ & & e^{\frac{2\pi i}{k}} & & \\ & & & e^{\frac{2\pi i}{k}} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N},$$

jak i macierze rzędów nieskończonych, np.

$$\left(1, e^{i\alpha} \cdot t\right) \begin{bmatrix} e^{ik} & & & & \\ & e^{ik} & & & \\ & & e^{ik} & & \\ & & & e^{ik} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{dla } k \in \mathbb{Q}.$$

Macierzami Riordana o rzędach różnych od 2 jako pierwsi zainteresowali się Cheon i Kim [37], którzy rozszerzyli pojęcie pseudo-inwolucji na przypadek pseudo-inwolucji rzędu k ($k > 2$), natomiast Cohen udowodnił uogólnienie twierdzenia 13[30]:

Twierdzenie 25. *([45], Thm.2A) Załóżmy, że*

$$d(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \cdots$$

oraz

$$h(t) = \omega t + h_2 t^2 + \cdots$$

Jeśli $(d(t), h(t))$ *ma skończony rząd w* $\mathcal{R}(F)$*, to* $(d(t), h(t))$ *jest sprzężona z* $(d_0, \omega t)$*.*

Powyższy wynik stanowił jedną z inspiracji do napisania artykułu [A7]. Drugą była, cytowana już wcześniej, praca [116] zawierająca interesującą wzmiankę[31] dotyczącą inwolucji i ich iloczynów. Mianowicie, grupa generowana przez wszystkie inwolucje z $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ składa się ze wszystkich elementów postaci $(d(t), h(t))$ takich, że

$$h_2^2 = h_1 h_3. \tag{7}$$

W szczególności, wynik ten oznacza, że nie można zapisać dowolnej macierzy Riordana o przekątnej składającej się z samych jedynek w postaci iloczynu inwolucji. Z drugiej strony, równość (7) sugeruje, że odpowiedni dobór współczynników h_1, h_2, h_3 może pomóc uzupełnić tę lukę i pozwoli zapisać macierze Riordana jako iloczyny macierzy o innych, skończonych rzędach. Istotnie, mamy

[30]Dokładniej, podane wcześniej twierdzenie 13 jest konsekwencją przytoczonego teraz twierdzenia 25.
[31]Która również była tu już przytoczona.

Twierdzenie 26. *([A7], Prop.2) Niech $k \geqslant 3$ oraz niech $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{C}$. Wtedy istnieje funkcja $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n t^n$, której rząd (względem składania) jest równy k.*

Funkcja pojawiająca się w twierdzeniu 26 stanowi świetne "uzupełnienie" dla iloczynów inwolucji i pozwala udowodnić poniższe

Twierdzenie 27. *([A7], Thm.1) Każdy element R grupy $\mathcal{R}(\mathbb{C})$, którego główna przekątna składa się z samych jedynek, może być zapisany w postaci iloczynu co najwyżej pięciu macierzy Riordana skończonych rzędów. W szczególności, jeśli R może być zapisana jako iloczyn inwolucji, to jest iloczynem co najwyżej czterech inwolucji; w przeciwnym przypadku, R może być zapisana jako iloczyn trzech inwolucji i dwóch elementów rzędów większych niż 2.*

Przykład 2. ([A7], Ex.1) Macierz R:

$$R = \left(\frac{1}{1-t}, \frac{t}{1-t^2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

nie spełnia warunku $h_2^2 = h_1 h_3$, zatem nie da się jej zapisać w postaci iloczynu inwolucji. Niemniej, można ją zapisać w postaci iloczynu inwolucji i macierzy rzędów większych niż 2, np.

$$\begin{aligned} R = &\left(\tfrac{1}{1-t}, -t\right) * \left(1, -\tfrac{it}{1-t^2}\right) * (1, -it) \\ = &\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ 1 & -1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & -i & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & -i & 0 & i & & \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & -i & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & i & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie pierwsza macierz to, na podstawie [116], iloczyn trzech inwolucji, a kolejne dwie to macierze rzędu 4.

Oczywiście, nie tylko macierze o przekątnej składającej się z samych jedynek mogą być zapisane jako iloczyn macierzy skończonych rzędów. Dokładniej, mamy

Wniosek 7. *([A7], Cor.1) Macierz Riordana $R \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$ jest iloczynem macierzy Riordana skończonych rzędów wtedy i tylko wtedy, gdy najmniejsza wspólna wielokrotność rzędów elementów głównej przekątnej jest skończona.*

Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Na pozostały dorobek naukowy składają się wyniki opublikowane w wymienionych poniżej pracach, nie wchodzących w skład pracy doktorskiej.

Lista pozostałych publikacji:

[B1] R. Słowik, *On one property of normal subgroups of $UT_\infty(R)$*, Linear Algebra Appl. **437**(9) (2012), 2300–2307.

[B2] R. Słowik, *Real elements in $T_n(K)$*, Linear Multilinear Algebra **61**(5) (2013), 667–677.

[B3] R. Słowik, *Verbal subgroups of $T_r(\infty, K)$*, Comm. Algebra **42**(1) (2014), 73–80.

[B4] R. Słowik, *Parabolic subgroups of linear groups and the Vershik-Kerov group over $\mathbb{F}_2$*, Comm. Algebra **42**(1) (2014), 4396–4401.

[B5] R. Słowik, *Every infinite triangular matrix is similar to a generalized infinite Jordan matrix*, Linear Multilinear Algebra **65**(7) (2017), 1362–1373.

[B6] R. Słowik, *Corrigendum to 'Every infinite triangular matrix is similar to a generalized infinite Jordan matrix' (Linear Multilinear Algebra 65 (2017), 1362–1373)*, Linear Multilinear Algebra **66**(6) (2018), 1278.

[C1] R. Słowik, *Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators*, Linear Multilinear Algebra **61**(8) (2013), 1028-1040.

[C2] R. Słowik, *Maps on infinite triangular matrices preserving idempotents*, Linear Multilinear Algebra **62**(7) (2014), 938–964.

[C3] R. Słowik, *Epimorphisms of infinite triangular and unitriangular matrices*, Linear Algebra Appl. **462** (2014), 186–203.

[C4] R. Słowik, *Three linear preservers on infinite triangular matrices*, Linear Multilinear Algebra **63**(4) (2015), 672–694.

[C5] R. Słowik, *Epimorphisms of the ring of infinite triangular matrices*, Linear Multilinear Algebra **63**(7) (2015), 1372–1378.

[C6] R. Słowik, *Derivations of rings of infinite matrices*, Comm. Algebra **43**(8) (2015), 3433-3441.

[C7] R. Słowik, *Linear minimal rank preservers on infinite triangular matrices*, Kyushu J. Math. **69**(1) (2015), 63-68.

[C8] R. Słowik, *Linear rank preservers on infinite triangular matrices*, J. Korean Math. Soc. **53**(1) (2016), 73-88.

[C9] R. Słowik, L. van Wyk, *Automorphisms of some structural infinite matrix rings*, Oper. Matrices **10**(1) (2016), 163-188.

[C10] R. Słowik, *Injective strong commutativity preservers on $T_\infty(F)$*, Acta Math. Hungar. **148**(2) (2016), 386–404.

[C11] R. Słowik, *Continuous maps on triangular matrices that preserve commutativity*, Linear Multilinear Algebra **64**(9) (2016), 1716–1730.

[C12] R. Słowik, *Injective linear maps on $T_\infty(F)$ that preserve the additivity of rank*, Bull. Korean Math. Soc. **54**(1) (2017), 277–287.

[C13] R. Słowik, *Bilocal automorphisms of* $T_\infty(F)$, Indian J. Pure Appl. Math. **48**(3) (2017), 323-334.

[C14] R. Słowik, *Maps on upper triangular matrices preserving zero products*, Czechoslovak Math. J. **67** (142)(4) (2017), 1095–1103.

[C15] R. Słowik, *The Drazin inverses of infinite triangular matrices and their linear preservers*, Ukrainian Math. J. **70**(4) (2018), 614–631.

[C16] D.A.H. Ahmed, R. Słowik, *m-commuting maps on triangular and strictly triangular infinite matrices*, Electron. J. Linear Algebra **37** (2021), 247-255.

[D1] R. Słowik, *Some facts about zero divisors of triangular infinite matrices*, Math. Commun. **20**(2) (2015), 175-183.

[D2] R. Słowik, *Sums of square-zero infinite matrices*, Linear Multilinear Algebra **64**(9) (2016), 1760-1768.

[D3] R. Słowik, *Corrigendum to 'Sums of square-zero infinite matrices' (Linear Multilinear Algebra 64(9) (2016), 1760-1768)*, Linear Multilinear Algebra **66**(6) (2018), 1277.

[D4] R. Słowik, *Sums of square-zero infinite matrices revisited*, Bull. Iranian Math. Soc. **45**(3) (2019), 911-916.

[D5] R. Słowik, *Expressing infinite matrices as sums of idempotents*, Ukrain. Mat. Zh. **69**(8) (2017), 1145-1152.

[D6] R. Słowik, *Maximal and minimal triangular matrices*, Results Math. **73**(2) (2018), Paper No. 58, 16 pp.

[D7] R. Słowik, *Inverses and determinants of Toeplitz-Hessenberg matrices*, Taiwanese J. Math. **22**(4) (2018), 901-908.

[D8] R. Słowik, *Some counterexamples for Cayley-Hamilton theorem for doubly infinite matrices*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **43**(5) (2020), 3349–3359.

[D9] R. Słowik, *The decay of the elements of the inverses of some triangular Toeplitz matrices*, Acta Sci. Math. (Szeged) **87** (2021), 541-550.

[E1] R. Słowik, *Sequence characterization of* 3*-dimensional Riordan arrays and some application*, Results Math. **74**(4) (2019), Paper No. 169, 7 pp.

[E2] R. Słowik, *Some (counter)examples on totally positive Riordan arrays*, Linear Algebra Appl. **594** (2020), 117-123.

[E3] R. Słowik, *Corrigendum to "Some (counter)examples on totally positive Riordan arrays" [Linear Algebra Appl. 594 (2020) 117-123]*, Linear Algebra Appl. **619** (2021), 338–339.

[E4] R. Słowik, *Jordan canonical forms of Riordan arrays*, Results Math. **76**(2) (2021), Paper No. 96, 8 pp.

[F1] M. Adam, B. Bajorska-Harapińska, E. Hetmaniok, J. Ludew, M. Pleszczyński, M. Różański, D. Słota, R. Słowik, B. Smoleń, J. Uryga, R. Wituła, *Wybrane zagadnienia z teorii szeregów potęgowych*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2020.

[F2] M. Adam, B. Bajorska-Harapińska, E. Hetmaniok, J. Ludew, M. Pleszczyński, M. Różański, D. Słota, R. Słowik, B. Smoleń, J. Uryga, R. Wituła, *Szeregi liczbowe w analizie matematrycznej i teorii liczb*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2021.

[F3] W. Hołubowski, J.J. Ludew, A. Samulewicz, B. Smoleń-Duda, M. Różański, R. Słowik, R. Wituła, *Wybrane zagadnienia teorii mnogości*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2022.

Opis cyklu prac [B1]-[B6]

Prace [B1]-[B6] poświęcone są pewnym grupom macierzy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, głównie trójkątnym. To co łączy wszystkie te prace to pojawiające się w nich pewne pojęcia podstawowe – mianowicie operacja sprzężenia i/lub macierze elementarne.

W [B1] wskazana jest własność macierzy unitrójkątnych, która może znacznie uprościć badanie podgrup normalnych macierzy trójkątnych. Niech symbole $UT_\infty(m,R)$ ($m \in \mathbb{N}$), $UT_{band,\infty}(R)$ oraz $UT_{band,\infty}(m,R)$ oznaczają odpowiednio:

$$UT_\infty(m,R) = \begin{cases} UT_\infty(R) & \text{gdy } m = 0, \\ \{U = [u_{nk}] \in UT_\infty(R) \colon u_{nk} = 0 \text{ dla } n,k \in \mathbb{N} \text{ takich, że } 0 < k-n \leqslant m\}, \end{cases}$$

gdzie przypomnijmy $UT_\infty(R)$ oznacza podgrupę grupy $T_\infty(R)$ składającą się z macierzy, których wszystkie elementy z głównej przekątnej są równe 1,

$$UT_{band,\infty}(R) = \{U = [u_{nk}] \in UT_\infty(R) \colon \exists\, m \in \mathbb{N}\ u_{n\, n+r} = 0 \text{ dla } n,r \in \mathbb{N} \text{ o ile } r \geqslant m\},$$

$$UT_{band,\infty}(m,R) = UT_{band,\infty}(R) \cap UT_\infty(m,R).$$

Macierze z $UT_{band,\infty}(R)$ nazywamy wstęgowymi[32]. Pierwszy[33] wynik [B1] jest następujący.

Twierdzenie 28. *([B1], Thm.2.1) Niech R będzie pierścieniem łącznym z jedynką, H – podgrupą normalną $UT_\infty(R)$, natomiast $m \in \mathbb{N}$. Jeśli H zawiera $UT_{band,\infty}(m,R)$, to zawiera również $UT_\infty(m,R)$.*

Mniej formalnie ujmując, twierdzenie 28 mówi, że jeśli podgrupa normalna zawiera macierze o pierwszej, drugiej, ..., $m-1$-ej przekątnej zerowej, w których skończoną liczbę przekątnych powyżej m-tej można ustalić dowolnie, to zawiera również wszystkie macierze o pierwszej, drugiej, ..., $m-1$-ej przekątnej zerowej. Ponadto spełnione jest

Twierdzenie 29. *([B1], Thm.2.2) Niech R będzie pierścieniem łącznym z jedynką. Jeśli H jest podgrupą $UT_\infty(R)$ zawierającą $UT_{band,\infty}(R)$ oraz $UT_\infty(m,R)$ dla pewnej liczby $m \in \mathbb{N}$, to $H = UT_\infty(R)$.*

Połączenie powyższych wyników prowadzi, między innymi do opisu komutanta grupy $T_\infty(R)$, czyli grupy generowanej przez wszystkie komutatory z $T_\infty(R)$:

$$[T_\infty(R), T_\infty(R)] = \langle [T_1,T_2] \colon T_1,T_2 \in T_\infty(R)\rangle, \quad \text{gdzie } [T_1,T_2] := T_1^{-1}T_2^{-1}T_1T_2.$$

Dokładniej, z twierdzeń 28, 29 oraz pracy [169][34] wynika

[32] Oryginalnie: *banded*.
[33] I w zasadzie najważniejszy, chociaż nie zacytowany we wstępie
[34] Ponieważ praca ta była częścią rozprawy doktorskiej, nie jest wymieniona w dorobku podanym powyżej.

Twierdzenie 30. *([B1], Thm.1.1) Jeśli R jest łącznym, przemiennym pierścieniem z jedynką, stabilnej rangi co najwyżej 1, to $[T_\infty(R), T_\infty(R)] = UT_\infty(R)$.*

Warto dodać, że z twierdzeń 28, 29 i na podstawie pracy [169] można również otrzymać opis ciągu komutantów, a także opis dolnego ciągu centralnego $T_\infty(R)$ oraz $UT_\infty(R)$, jednak z racji, iż większość tych wyników była znana wcześniej (zob. pracę [20]) nie będę ich tu powtarzać. Oczywiście, w analogiczny sposób można otrzymać opis komutanta grupy Vershika-Kerova. Oznaczając przez $SL_{VK}(R)$ grupę:

$$SL_{VK}(R) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left[\begin{array}{c|c} S & H \\ \hline 0 & U \end{array} \right] : \ S \in SL_n(F),\ U \in UT_\infty(F),\ H \in M_{n\times\mathbb{N}}(F) \right\}$$

mamy

Twierdzenie 31. *([B1], Thm.1.2) Jeśli R jest łącznym, przemiennym pierścieniem z jedynką, stabilnej rangi co najwyżej jeden, w którym jedynka może być zapisana jako suma dwóch elementów odwracalnych, to $[GL_{VK}(R), GL_{VK}(R)] = SL_{VK}(R)$.*

Artykuł [B2] poświęcony jest macierzom trójkątnym skończonego stopnia, które są sprzężone ze swoimi odwrotnymi. Ustalmy, że takie elementy pewnej grupy macierzy będziemy nazywać rzeczywistymi[35]. Berrgren [18] badał grupy skończone składające się wyłącznie z elementów rzeczywistych i udowodnił, że 2-podgrupy Sylowa S_n są grupami o tej własności, a także, że każda skończona 2-grupa jest zanurzalna w 2-grupę składającą się z elementów rzeczywistych. Ponadto, z twierdzenia 8 wiadomo już, że w pełnej grupie liniowej nad dowolnym ciałem macierze posiadające tę własność są iloczynami dwóch inwolucji. Macierze rzeczywiste stopnia drugiego zostały opisane w [30][36]. Nie mając pewności czy w grupie macierzy trójkątnych spełniony jest analogon twierdzenia 8 można postawić pytanie o naturę elementów rzeczywistych w $T_n(F)$. W [B2] podany jest pewien "skromny" przykład rodziny macierzy o tej własności.

Twierdzenie 32. *([B2], Thm.11) Niech F będzie ciałem przemiennym oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Jeśli macierz $T = [t_{ij}] \in T_n(F)$ spełnia następujące warunki:*

(a) *dla wszystkich i, $1 \leqslant i \leqslant n$ mamy $t_{ii} = 1$ lub $t_{ii} = -1$,*

(b) *istnieje liczba m, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, taka że*

- ***i.*** *$t_{i,i+r} = 0$ dla wszystkich r, $1 \leqslant r \leqslant m-1$, oraz wszystkich i, $1 \leqslant i \leqslant n-r$,*
- ***ii.*** *$t_{i,i+m} \neq 0$ dla wszystkich i, $1 \leqslant i \leqslant n-m$,*

to macierz T jest rzeczywista.

Warto zauważyć, że w grupie macierzy unitrójkątnych zbiór elementów rzeczywistych jest "ubogi". Dokładniej, spełnione jest

[35]Oryginalnie są to *real elements* (również *reversible elements*), gdyż charaktery grup składających się z elementów o takiej własności są rzeczywiste. Jedna z klas grup skończonych o tej własności wyznaczona jest w [180]. Istniała hipoteza [95], że charaktery grup składających się z macierzy unitrójkątnych zdefiniowanych nad ciałem dwuelementowym mają tę własność, jednak w [84] znaleziono kontrprzykład dla macierzy stopnia 13.

[36]Aczkolwiek chyba warto dodać, że bez pomocy twierdzenia 8.

Twierdzenie 33. *Jeśli F jest ciałem przemiennym o charakterystyce różnej od 2, to jedynym elementem rzeczywistym w $UT_n(F)$ jest macierz jednostkowa.*

Warto dodać, że powyższe twierdzenia zostały niedawno wywnioskowane również za pomocą metod teorii Liego [62].

Praca [B3] jest poświęcona pewnej podgrupie grupy $UT_{Rf}(F)$, którą to definiujemy jako przecięcie $UT_\infty(F)$ i $GL_{Rf}(F)$. W ramach przypomnienia zacytujmy definicje.

Definicja 4. Niech G będzie grupą, a H jej podgrupą. Jeśli dla każdego endomorfizmu $\phi\colon G \to G$ spełniony jest warunek $\phi(H) \subseteq H$, to mówimy, że H jest *podgrupą całkowicie niezmienniczą* (lub całkowicie charakterystyczną) grupy G.

Definicja 5. Niech $X = \{x_i \colon i \in I\}$ będzie niepustym alfabetem. Ponadto, niech $X^{-1} := \{x_i^{-1} \colon i \in I\}$. Dowolny pusty lub skończony ciąg liter należących do $X \cup X^{-1}$ nazywamy *słowem*.

Definicja 6. Dowolną podgrupę ustalonej grupy G generowaną przez elementy, które powstały przez podstawienie dowolnych elementów grupy G w miejsce liter w słowach z ustalonej rodziny słów F nazywamy *podgrupą werbalną* i oznaczamy ją $V_F(G)$.

Wiadomo [135], że każda podgrupa werbalna jest generowana przez co najwyżej dwa słowa, z których jedno to słowo potęgowe, tzn. postaci x_i^n, gdzie $x_i \in X$, natomiast drugie to słowo komutatorowe, tzn. powstałe ze skończonej liczby złożeń słów postaci $[x_i, x_j]$, gdzie $x_i, x_j \in X \cup X^{-1}$. W [19] Bier zbadała podgrupy werbalne w grupach macierzy trójkątnych i unitrójkątnych skończonego stopnia nad ciałem charakterystyki 0, a także w grupie będącej przecięciem stabilnej grupy liniowej z grupą macierzy górnotrójkątnych $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$[37]. Sosnovsky [173] uogólnił wyniki uzyskane w pracy [19] dotyczące macierzy skończonego stopnia na przypadek macierzy zdefiniowanych nad dowolnym ciałem zawierającym co najmniej 3 elementy. Praca [B3] również dotyczy podgrup werbalnych, ale grupy $T_{Rf}(F)$, której elementy, w odróżnieniu od grup wymienionych powyżej, zawierają macierze o nieskończonej liczbie elementów niezerowych nad główną przekątną. Pomimo tej, dość istotnej różnicy, można skorzystać z powyższych wyników, aby zbadać podgrupy werbalne w $T_{Rf}(F)$. Bardzo istotne jest tu istnienie poniższego rozkładu[38].

Twierdzenie 34. *([79], Thm.1) Dla dowolnego R – pierścienia łącznego z jedynką, grupa $UT_{Rf}(R)$ jest generowana przez macierze blokowo-diagonalne z $UT_{Rf}(R)$. Dokładniej, każdy element $UT_{Rf}(R)$ jest albo macierzą blokowo-diagonalną albo iloczynem dwóch takich macierzy.*

Łącząc przedstawione powyżej fakty w [B3] otrzymano następujące wyniki.

[37] Tytułem przypomnienia: przez stabilną grupę liniową $GL(R)$ rozumiemy granicę prostą grup $GL_n(R)$ (zob. [11]) i utożsamiamy ją z podgrupą $GL_{RCf}(R)$ składającą się z macierzy postaci:

$$\left[\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & I_\infty \end{array}\right], \qquad G \in GL_n(R) \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}.$$

[38] Warto dodać, że rozkłady macierzy z grupy $GL_{Rf}(F)$ i jej podgrup wykorzystujące macierze blokowo-diagonalne pojawiły się pierwotnie w [187]. Zarówno w [187] jak i w [79] macierz blokowo-diagonalna $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ określana jest terminem *string*, jednak z racji istnienia znanego polskiego określenia, pozostaję tu przy nazwie macierz *blokowo-diagonalna*.

Twierdzenie 35. *([B3], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem zawierającym co najmniej trzy elementy. Wówczas każda podgrupa $UT_{Rf}(F)$, która jest całkowicie niezmiennicza w $T_{Rf}(F)$ jest równa pewnemu wyrazowi dolnego ciągu centralnego $UT_{Rf}(F)$.*

Twierdzenie 36. *([B3], Thm.1.2) Niech F będzie ciałem zawierającym co najmniej trzy elementy. Jeśli f jest słowem komutatorowym, to grupa $V_f(T_{Rf}(F))$ jest równa pewnemu wyrazowi dolnego ciągu centralnego $T_{Rf}(F)$.*

Twierdzenie 37. *([B3], Thm.1.3) Niech F będzie ciałem zawierającym co najmniej trzy elementy. Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ grupa $V_{x^m}(UT_{Rf}(F))$ jest równa pewnemu wyrazowi dolnego ciągu centralnego $T_{Rf}(F)$.*

Twierdzenie 38. *([B3], Thm.1.4) Niech F będzie ciałem zawierającym co najmniej trzy elementy. Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ grupa $V_{x^m}(T_{Rf}(F))$ przyjmuje postać $V_{x^m}(D_\infty(F)) \cdot UT_{Rf}(F)$ albo jest równa pewnemu wyrazowi dolnego ciągu centralnego $T_{Rf}(F)$.*

Niezależnie od [B3] opis podgrup werbalnych grup $T_\infty(F)$, $UT_\infty(F)$ został uzyskany przez Bier w [20].

Artykuł [B4] zawiera uzpełnienie wyników uzyskanych w pracy [80], która wchodziła w skład mojej rozprawy doktorskiej. Prace te wskazują związek pomiędzy podgrupami macierzowymi parabolicznymi oraz sieciowymi.

Definicja 7. Niech R będzie pierścieniem z 1, $n \in \mathbb{N}$, natomiast H pewną podgrupą $GL_n(R)$. Jeśli H zawiera $T_n(R)$, to mówimy, że H jest podgrupą paraboliczną $GL_n(R)$.

Definicja 8. Rodzinę dwuindeksowanych ideałów $(\sigma_{ij})_{i,j \in I}$ (alternatywnie powiemy: systemem ideałów $(\sigma_{ij})_{i,j \in I}$), gdzie $\emptyset \subsetneq I \subseteq \mathbb{N}$, ustalonego pierścienia R nazywamy siecią, jeśli dla dowolnych $i, j, k \in I$ spełniony jest warunek

$$\sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}.$$

W szczególności, sieci spełniające warunek

$$\sigma_{ij} = R \quad \text{dla wszystkich } i,\ j \text{ takich, że } i \leqslant j.$$

nazywamy T-sieciami.

Niech G będzie podgrupą $GL_n(R)$, natomiast $(\sigma_{ij})_{i,j \in \{1,2,\ldots,n\}}$ będzie siecią ideałów pierścienia R. Przez $M(\sigma)$ oznaczamy następujący podzbiór $\mathcal{M}_n(R)$:

$$M(\sigma) = \{M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_n(R) \colon m_{ij} \in \sigma_{ij} \text{ dla wszystkich } i, j \in I\}.$$

Można zauważyć, że zbiór

$$I_n + M(\sigma) = \{I_n + M \colon M \in M(\sigma)\}$$

jest zamknięty ze względu na mnożenie macierzy oraz zawiera macierz jednostkową. Ponadto wszystkie macierze należące do tego zbioru są odwracalne. Zbiór ten zawiera dokładnie jedną podgrupę maksymalną, która nazywana jest *podgrupą sieciową* i oznaczana przez $G(\sigma)$. W [21] Borevich udowodnił poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 39. *([21], Thm.1) Niech R będzie pierścieniem półlokalnym*[39]*, z jedynką, takim że jedynka ta może być zapisana jako suma dwóch elementów odwracalnych w tym pierścieniu. Jeśli H jest podgrupą paraboliczną grupy $GL_n(R)$, to istnieje jednoznacznie wyznaczona T-sieć ideałów σ taka, że $H = G(\sigma)$.*

Analogiczne twierdzenie jest spełnione dla grupy Vershika-Kerova.

Twierdzenie 40. *([78], Thm.1.2) Niech R będzie pierścieniem półlokalnym, w którym jedynka może być zapisana jako suma dwóch elementów odwracalnych. Jeśli H jest podgrupą paraboliczną grupy $GL_{VK}(R)$, to istnieje jednoznacznie wyznaczona T-sieć ideałów σ taka, że $H = G(\sigma)$.*

Co więcej, wynik ten przenosi się również na przypadek specjalnej grupy Vershika-Kerova [80]. Można zauważyć, że wszystkie zaprezentowane tu twierdzenia są spełnione dla macierzy nad wszystkimi ciałami zawierającymi co najmniej trzy elementy. Istotnie, w dowodach tych twierdzeń wykorzystywana jest operacja sprzężenia elementów za pomocą macierzy diagonalnych nie-jednostkowych. Naturalnym wydaje się pytanie czy jest możliwe, oczywiście w nieco inny sposób, dowieść rezultatów analogicznych dla macierzy określonych nad ciałem dwuelementowym. Praca [B4] zawiera pozytywną odpowiedź.

Twierdzenie 41. *([B4], Thm.1.2, 1.3) Jeśli H jest podgrupą paraboliczną $GL_n(\mathbb{F}_2)$, to istnieje jednoznacznie wyznaczona T-sieć ideałów taka, że $H = G(\sigma)$.*

Jeśli H jest podgrupą paraboliczną $GL_{VK}(\mathbb{F}_2)$, to istnieje jednoznacznie wyznaczona T-sieć ideałów taka, że $H = G(\sigma)$.

Niech $J_n(a)$ oznacza klatkę Jordana stopnia n odpowiadającą wartości własnej a, natomiast $J_\infty(a)$ jej odpowiednik w $\mathcal{T}_\infty(F)$.

Prace [B5], [B6], to skromny wkład dotyczący pewnego uogólnienia postaci Jordana na przypadek macierzy nieskończonych. Pomimo, iż w pewnych szczególnych przypadkach istnieją bardziej interesujące macierze sprzężone z zadaną macierzą[40], jest to najszerzej znana i najbardziej uniwersalna spośród postaci kanonicznych macierzy[41]. Oczywiście w przypadku macierzy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ problem znalezienia zarówno postaci jak i bazy Jordana komplikuje się. W szczególności, gdy dana macierz A posiada wielomian anihilujący, istnieje baza Jordana macierzy A [114]. W przypadku ogólnym, prawdopodobnie jedyny wynik należy do Wanga [188], który sprowadził ten problem do rozwiązania odpowiedniego układu równań i sformułował warunek wystarczający dla macierzy z $\mathcal{M}_{Rf}(F)$ lub $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ na podobieństwo do nieskończonej klatki Jordana za pomocą minorów głównych i pewnej ich modyfikacji. Nietrudno zauważyć, że dla macierzy nieskończonego stopnia traktowanie postaci Jordana jako sumy prostej macierzy będących klatkami Jordana pozwala na posiadanie maksymalnie jednej podprzestrzeni

[39] Gwoli przypomnienia: czyli pierścieniem o skończonej liczbie prawostronnych ideałów.

[40] Oprócz postaci Weyra lub Kroneckera warto tu wspomnieć o artykule [28], w którym autorzy badają czy postać Jordana macierzy jest macierzą sprzężoną z daną macierzą o możliwie największej liczbie zer (niekoniecznie tak jest!), a także [71], gdzie z kolei rozstrzygnięty jest problem czy każda macierz jest sprzężona z pewną macierzą Toeplitza (odpowiedź również jest negatywna).

[41] Więcej informacji o postaciach kanonicznych macierzy skończonego stopnia można znaleźć w [182], chociaż sam dowód twierdzenia o postaci Jordana jest przejrzyściej przedstawiony w [27].

niezmienniczej nieskończonego wymiaru, podczas, gdy już prosty przykład:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}e_{3n,3n+3}+\sum_{n=1}^{\infty}e_{3n+1,3n+4}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0&\cdots\\&0&0&0&0&0&0&\\&&0&0&1&0&0&\\&&&0&0&1&0&\\&&&&0&0&0&\\&&&&&0&0&\\&&&&&&0&\\&&&&&&&\ddots\end{bmatrix} \tag{8}$$

pokazuje, że macierz taka może mieć ich więcej. Stąd w [B5] pojawia się zaczerpnięta z pracy [179] definicji uogólnionej sumy prostej.

Definicja 9. ([B5], Def.1.1) Niech $\{S_n\}_{n\in I}$ będzie podziałem $\mathbb{N}$, natomiast A_n – macierzami stopni $|S_n|$ dla każdego $n\in I$. Mówimy, że macierz $A=[a_{ij}]$ jest uogólnioną sumą prostą macierzy A_n, $n\in I$, i piszemy

$$A=\oplus_{n\in I}(A_n)_{I_n},$$

jeśli

$$A_{ij}=\begin{cases}(A_n)_{xy} & \text{jeśli } i=i_x,\ j=j_y,\ i,j\in I_n=\{i_1,i_2,i_3,\ldots\} \text{ dla pewnego } n\in I,\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

W szczególności macierz A podana w (8) jest równa $(J_\infty(0))_{3\mathbb{N}+1}\oplus(J_\infty(0))_{3\mathbb{N}}$.

Dla dowolnego podziału $\{I_n\}_{n\in I}$ zbioru $\mathbb{N}$ oraz dowolnych macierzy $A_n,B_n\in\mathcal{M}_{|I_n|}(R)$, $n\in I$, mamy

$$\oplus_{n\in I}(A_n)+\oplus_{n\in I}(B_n)=\oplus_{n\in I}\left(A_n+B_n\right),$$

oraz

$$\oplus_{n\in I}(A_n)\cdot\oplus_{n\in I}(B_n)=\oplus_{n\in I}\left(A_n\cdot B_n\right),$$

co rozwiązuje problem rodzin macierzy nieskończonych, które spełniają warunek analogiczny do sumy prostej struktur algebraicznych pomimo, iż nie są blokowo-diagonalne, czyli nie spełniają definicji sumy prostej macierzy. W [B5] macierzą Jordana nazywana jest dowolna macierz $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, która jest uogólnioną sumą prostą dowolnej liczby (stopnia skończonego lub nieskończonego) klatek Jordana. Główna trudność znalezienia bazy Jordana czy też macierzy przejścia C dla macierzy nieskończonej - w rozważanym w [B5] przypadku macierzy trójkątnej, spowodowana jest faktem, iż C musi należeć do grupy $GL_{Cf}(F)$. Wymagania dotyczące macierzy przejścia są zazwyczaj trudne do sprawdzenia nawet w przypadku macierzy skończonego stopnia[42]. Główny wynik [B5] jest następujący.

[42]W szczególności w [64] autorzy określają problem opisu klas sprzężoności macierzy trójkątnych w $T_n(F)$ słowem "wild". Podobnie w recenzji Mathematical Reviews pracy [148] sam Housholder napisał, że oczywistym warunkiem wystarczającym dla $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]\in T_n(F)$ jest $a_{i,i+1}=b_{i,i+1}$, lecz "Beyond that they become complicated".

Twierdzenie 42. *([B5], Prop.2.1) Dla dowolnego ciała F i dowolnej macierzy $A \in \mathcal{T}_\infty(F)$ istnieje macierz $X \in T_\infty(F)$ taka, że*

$$A^X = \oplus_{n \in I}(A_n)_{I_n},$$

gdzie A_n spełniają poniższe warunki:

(a) $(A_n)_{ii} \neq (A_m)_{jj}$ *dla dowolnych i, j oraz $n \neq m$,*

(b) $(A_n)_{ii} = (A_n)_{jj}$ *dla dowolnych i, j, n.*

Twierdzenie to sprowadza problem wyznaczania postaci Jordana do macierzy o stałej przekątnej; oczywiście bez utraty ogólności można uznać, że ta przekątna składa się z samych zer. Zbiór takich macierzy trójkątnych oznaczono przez $\mathcal{N}T_\infty(F)$. Praca [B5] zawiera również próbę udowodnienia istnienia postaci Jordana dla takich właśnie macierzy, zawiera jednak ona błąd, stąd korekta [B6]. Nie udało się w niej, niestety, naprawić wspomnianego błędu. Zawiera ona mniej ogólny wynik.

Twierdzenie 43. *([B6], Lem.0.7) Niech F będzie dowolnym ciałem oraz $A \in \mathcal{N}T_\infty(F)$. Załóżmy, że m_1, m_2, m_3, … oznaczają numery niezerowych kolumn macierzy A uporządkowane rosnąco. Jeśli dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ spełniony jest warunek*

$$\max_{1 \leq j < m_{i+1}} \left\{ a_{jm_{i+1}} \neq 0 \right\} = m_i,$$

to istnieje macierz $X \in T_\infty(F)$ taka, że A^X jest uogólnioną macierzą $J_\infty(0)$.

W szczególności, powyższe wyniki sugerują, że wiele macierzy z $\mathcal{T}_\infty(F)$ posiada swoją uogólnioną postać Jordana. Aby uściślić to stwierdzenie, wprowadźmy w $\mathcal{T}_\infty(\mathbb{C})$ następującą metrykę:

$$d\left([x_{ij}], [y_{ij}]\right) = \min\left(\sup_{i,j \in \mathbb{N}} |x_{ij} - y_{ij}|, 1\right).$$

Dla tej metryki spełniony jest poniższy wniosek.

Wniosek 8. *([B6], Cor.0.8) Zbiór macierzy trójkątnych, które są w $\mathcal{T}_\infty(\mathbb{C})$ podobne do uogólnionej macierzy Jordana jest gęsty w $\mathcal{T}_\infty(\mathbb{C})$.*

Ponadto, spełniony jest również

Wniosek 9. *([B6], Cor.0.9) Zbiór macierzy z $\mathcal{N}T_\infty(\mathbb{C})$, które są w $\mathcal{T}_\infty(\mathbb{C})$ podobne do uogólnionej macierzy Jordana jest gęsty w $\mathcal{N}T_\infty(\mathbb{C})$.*

Twierdzenie, które było początkowym celem [B5] zostało udowodnione przez Kostić, Petrovića, Pucanovića i Roslavcev.

Twierdzenie 44. *([104], Thm.1.3) Niech $A = [a_{ij}] \in \mathcal{T}_\infty(F)$ będzie macierzą górnotrójkątną $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wtedy dla przestrzeni $F^\infty = \cup_{n \geqslant 1} F^n$ i operatora $L\colon F^\infty \to F^\infty$ takiego, że $A = [L]_e$, gdzie e jest bazą standardową dla F^∞, istnieje taka baza f, że $[L]_f$ jest uogólnioną macierzą Jordana.*

Opis cyklu prac [C1]-[C15]

Prace [C1]-[C15] są poświęcone różnego rodzaju odwzorowaniom określonym na grupach bądź pierścieniach macierzy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Omówienie ich zacznę od artykułów [C3], [C5] oraz [C9], które skupiają się na najbardziej znanych odwzorowaniach pojawiających się w literaturze – homomorfizmach. Bardzo obszerną pracę na temat automorfizmów pełnej grupy liniowej nad ciałami[43] oraz jej podgrup napisał Dieudonné w 1951 r. [53]. Z czasem jego wyniki zostały uogólnione na przypadek macierzy określonych nad różnymi klasami pierścieni[44]. W szczególności, automorfizmy grupy macierzy unitrójkątnych, a następnie trójkątnych wskazał Levchuk [105, 106], a także Zhang i Chongguang [200].

Praca [C3] poświęcona jest epimorfizmom grup $UT_\infty(F)$ i $T_\infty(F)$. Do ich zbadania przydają się pewne podgrupy niezmiennicze. Dokładniej, pokazano tam, że podgrupy

$$R^{k,k+1} := \{U = [u_{ij}] \in UT_\infty(F) \colon \forall\, n, m \in \mathbb{N}\, (u_{nm} \neq 0,\ n \neq m\ \Rightarrow\ 1 \leqslant n \leqslant k,\ m \geqslant k+1)\}$$

są jedynymi normalnymi oraz maksymalnymi abelowymi podgrupami $UT_\infty(F)$. Korzystając z tego faktu, a także operacji sprzężenia otrzymano opis epimorfizmów $UT_\infty(F)$. We wszystkich zacytowanych tu pracach homomorfizmy[45] są złożeniami pewnych "standardowych" odwzorowań. Tak jest również w przypadku macierzy nieskończonych. Dokładniej, standardowych epimorfizmów grup $T_\infty(F)$ i $UT_\infty(F)$ określonych w następujących podpunktach.

(a) Dla dowolnego σ – endomorfizmu ciała F, przez $\bar{\sigma}$ oznaczamy odwzorowanie określone na $T_\infty(F)$ lub $UT_\infty(F)$ takie, że $[\bar{\sigma}([x_{nm}])]_{ij} = \sigma(x_{ij})$ dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$.

(b) Symbol $\mathcal{I}nn_A$ oznacza automorfizm wewnętrzny $T_\infty(F)$ (lub $UT_\infty(F)$), tzn. $\mathcal{I}nn_A(X) = A^{-1}XA$, gdzie $A \in T_\infty(F)$ (odpowiednio $A \in UT_\infty(F)$).

(c) Dla dowolnej macierzy diagonalnej $D \in T_\infty(F)$ przez $\mathcal{D}iag_D$ oznaczamy odwzorowanie takie, że $\mathcal{D}iag_D(X) = D^{-1}XD$. Jest to automorfizm zarówno $T_\infty(F)$ jak i $UT_\infty(F)$, jednak tylko dla $T_\infty(F)$ jest to automorfizm wewnętrzny (zakładając, że D nie jest macierzą jednostkową).

(d) Dla ustalonej liczby $k \in \mathbb{N}_0$ przez $\mathcal{U}p_k$ rozumiemy odwzorowanie określone na $T_\infty(F)$ lub $UT_\infty(F)$ takie, że $[\mathcal{U}p_k([x_{ij}])]_{nm} = x_{n+k,m+k}$ dla wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$. Oczywiście, $\mathcal{U}p_k$ jest epimorfizmem obu rozważanych grup, jednak jest automorfizmem (dowolnej z nich) wyłącznie dla $k = 0$.

Przy powyższych oznaczeniach zachodzi następujące

Twierdzenie 45. *([C3], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach. Jeśli ϕ jest epimorfizmem grupy $UT_\infty(F)$, to istnieją $U \in UT_\infty(F)$, $D \in D_\infty(F)$, $k \in \mathbb{N}_0$ oraz σ – epimorfizm ciała F takie, że*

$$\phi(X) = \mathcal{D}iag_D \cdot \mathcal{I}nn_U \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathcal{U}p_k(X)$$

Pokazując, że każdy epimorfizm $T_\infty(F)$ zachowuje $UT_\infty(F)$ oraz korzystając z twierdzenia 45 otrzymano następnie

[43] W niektórych przypadkach nad ciałami charakterystyki różnej od 2.
[44] Bez wchodzenia w szczegóły pozwalam tu sobie polecić artykuł [142] oraz referencje w nim zawarte.
[45] A w zasadzie nie tylko homomorfizmy.

Twierdzenie 46. *([C3], Thm.1.2) Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach. Jeśli ϕ jest epimorfizmem grupy $T_\infty(F)$, to istnieją $T \in T_\infty(F)$, $k \in \mathbb{N}_0$, σ – epimorfizm ciała F oraz multiplikatywne odwzorowanie $f\colon (F^*)^k \to F^*$ takie, że*

$$\phi(X) = f(x_{11}, \dots, x_{kk}) \cdot \mathcal{I}nn_T \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathcal{U}p_k(X).$$

Dodatkowo, z twierdzeń 45, 46 można otrzymać opis grup automorfizmów $T_\infty(F)$ oraz $UT_\infty(F)$.

Twierdzenie 47. *([C3], Thm.1.3) Niech ciało F zawiera co najmniej trzy elementy. Wtedy*

(a) *grupa automorfizmów $UT_\infty(F)$ to splot $G \wr H$, gdzie G jest izomorficzna z $UT_\infty(F)$, natomiast H jest izomorficzna z grupą automorfizmów ciała F,*

(b) *grupa automorfizmów $T_\infty(F)$ to splot $G \wr H$, gdzie G jest izomorficzna z grupą ilorazową $T_\infty(F)/\{\alpha I_\infty \colon \alpha \in F^*\}$, natomiast H jest izomorficzna z grupą automorfizmów ciała F.*

Idąc tropem wyników z [C3] w pracy [C5] opisane są epimorfizmy $\mathcal{T}_\infty(F)$ – pierścienia macierzy trójkątnych $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Automorfizmy pierścieni macierzy trójkątnych skończonego stopnia określonych nad pewnymi rodzinami pierścieni zostały wyznaczone przez Jøndrupa w [88, 89]. W szczególności w przypadku macierzy trójkątnych nad pierścieniem R prostym i artinowskim[46] każdy C-automorfizm $\mathcal{T}_n(R)$ (gdzie C oznacza centrum R) jest automorfizmem wewnętrznym[47].

Podobnie jak w przypadku epimorfizmów grup $UT_\infty(F)$, $T_\infty(F)$, metody badania epimorfizmów $\mathcal{T}_\infty(F)$ muszą różnić się od metod zastosowanych do wyznaczania automorfizmów $\mathcal{T}_n(F)$. W dowodzie głównego twierdzenia można wyodrębnić trzy etapy:

(a) wykazanie, że dla dowolnego epimorfizmu ϕ pierścienia $\mathcal{T}_\infty(F)$ mamy $\phi(\mathcal{N}T_\infty(F)) \subseteq \mathcal{N}T_\infty(F)$,

(b) wykazanie, że równość $\phi(e_{nn}) = 0$ implikuje $\phi(\mathcal{R}_\infty^{nn}(F)) = \{0\}$, gdzie

$$\mathcal{R}_\infty^{nm}(F) = \{T = [t_{ij}] \in \mathcal{T}_\infty(F) \colon \forall\, i, j \in \mathbb{N}\, (i > n \vee j < m \Rightarrow t_{ij} = 0)\}$$

jest pewnym odpowiednikiem $R_\infty^{nm}(F)$,

(c) wykazanie, że $\phi = \mathcal{U}p_k \cdot \psi$ dla pewnego ψ zachowującego macierze odwracalne oraz nieodwracalne.

Z wymienionych powyżej wyników częściowych w [C5] otrzymano ostatecznie

Twierdzenie 48. *([C5], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach. Jeśli ϕ jest epimorfizmem pierścienia $\mathcal{T}_\infty(F)$, to istnieją $T \in T_\infty(F)$, σ – automorfizm F, liczby $k, n \in \mathbb{N}_0$ oraz multiplikatywne odwzorowanie $f\colon (F^*)^n \to F^*$ takie, że*[48]

$$\phi(x) = f(x_{k+1,k+1}, x_{k+2,k+2}, \dots, x_{nn}) \cdot \mathcal{I}nn_T \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathcal{U}p_{k+n}(x).$$

[46] Czyli w szczególności nad dowolnym ciałem.

[47] Opis ten pokrywa się z tezą twierdzenia Skolema-Noether, z którego wiadomo, że każdy C-automorfizm prostej artinowskiej R-algebry A, gdzie R jest skończenie wymiarowy nad swoim centrum C, jest automorfizmem wewnętrznym, które to było inspiracją dla pracy [88]. Warto wspomnieć, że ten sam wynik został przedstawiony przez Kezlana w [92] dla R-automorfizmów algebry $\mathcal{T}_n(R)$.

[48] Praca [C5] zawiera (poprawione tu) drobne usterki w kwestii n oraz k, które zostały mi życzliwie wskazane przez panią dr Brusamarello, która streszczała tę pracę dla Mathematical Reviews.

Praca [C13], to z kolei pewnego rodzaju "wariacja" na temat automorfizmów pierścienia $\mathcal{T}_\infty(F)$.

Definicja 10. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą operatorów liniowych działających na przestrzeni V zdefniowanej nad ciałem F. Jeśli odwzorowanie liniowe $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jest takie, że dla dowolnego $X \in \mathcal{A}$ oraz dowolnego $v \in V$ istnieje automorfizm $\phi_{X,v}$ algebry $\mathcal{A}$ taki, że

$$\phi(X)v = \phi_{X,v}(X)v,$$

to mówimy, że ϕ jest dwulokalnym[49] automorfizmem $\mathcal{A}$.

Do tej pory znane są opisy dwulokalnych automorfizmów algebr macierzy oraz ograniczonych operatorów określonych na przestrzeniach Hilberta [130, 132]. W pierwszym przypadku są to automorfizmy wewnętrzne, anty-automorfizmy wewnętrzne lub pewne odwzorowania zdegenerowane, w drugim - są to pewne endomorfizmy $B(H)$. W badanym w [C13] przypadku rozważaną algebrą jest $\mathcal{A} = \mathcal{T}_\infty(F)$, natomiast przestrzeń V, to $\mathcal{M}^{fin}_{\infty\times 1}(F)$, składająca się ze wszystkich wektorów-kolumn o skończonej liczbie elementów niezerowych. Korzystając z twierdzenia 48 oraz wyników pracy [C8][50] otrzymano

Twierdzenie 49. *([C13], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach. Odwzorowanie liniowe ϕ jest dwulokalnym automorfizmem $\mathcal{T}_\infty(F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest automorfizmem $\mathcal{T}_\infty(F)$.*

Praca [C9] zawiera opis automorfizmów pewnych pierścieni macierzy $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, jednak niekoniecznie trójkątnych. Ustalmy, że pierścienie macierzy z [C9] będziemy nazywać *pierścieniami ze strukturą*[51]. Owa struktura dotyczy rozmieszczenia elementów zerowych. Dokładniej, niech $\lesssim$ będzie quasi-porządkiem czyli relacją zwrotną i przechodnią. Pierścień $\mathcal{M}_n(\lesssim, F)$ został zdefiniowany w [183] następująco[52]:

$$\mathcal{M}_n(\lesssim, F) = \{M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_n(F)\colon (i,j) \notin \lesssim \ \Rightarrow\ m_{ij} = 0\}. \tag{9}$$

W [170] Smith i van Wyk udowodnili, że każdy taki pierścień jest izomorficzny[53] z pewnym pierścieniem macierzy blokowo-trójkątnych.

Zgodnie z (9) można zdefiniować analogiczne pierścienie macierzy $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$\mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F) = \{M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_{Cf}(F)\colon (i,j) \notin \lesssim \Rightarrow m_{ij} = 0\},$$
$$\mathcal{T}_\infty(\lesssim, F) = \{T = [t_{ij}] \in \mathcal{T}_\infty(F)\colon (i,j) \notin \lesssim \Rightarrow t_{ij} = 0\},$$

oczywiście zakładając, że relacja $\lesssim$ spełnia warunek

$$\forall\,(i,j) \in \lesssim\ m_{ij} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_{Cf}(F).$$

[49] Nazewnictwo jest tu delikatną sprawą; oryginalnie odwzorowania te nazywa się *bilocal automorfizm*. Należy jednak zauważyć, że istnieją również (i w zasadzie są o wiele lepiej znane) *2-local automorphisms* - czyli 2-automorfizmy.

[50] Które są omówione nieco niżej.

[51] W oryginale: *structural matrix rings*.

[52] W zasadzie należałoby sprostować, że w [183] są to pierścienie zdefiniowane nad pierścieniami (łącznymi oraz z jedynką).

[53] Dokładniej, istnieje taka permutacja σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że $P_\sigma^{-1}\mathcal{M}_n(\lesssim, F)P_\sigma$ składa się ze wszystkich macierzy blokowo-trójkątnych o ustalonej strukturze bloków.

Automorfizmy pierścieni ze strukturą skończonego stopnia zbadała Coelho najpierw dla przypadku macierzy nad ciałami[54] [43], a następnie dla przypadku macierzy nad pewną klasą pierścieni [44]. Jak się okazuje, każdy taki automorfizm jest złożeniem automorfizmu wewnętrznego, sprzężenia odpowiadającego permutacji oraz pewnego automorfizmu zdefiniowanego za pomocą pewnej relacji przechodniej. Automorfizmy pierścieni $\mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F)$ oraz $\mathcal{T}_\infty(\lesssim, F)$ również są złożeniami pewnych standardowych automorfizmów. Zależą one od pewnych klas na które relacja $\lesssim$ dzieli $\mathbb{N}$. Zakładając, że n_1, n_2, ..., n_k lub n_1, n_2, ..., n_k, ..., są różnymi liczbami naturalnymi, jeśli spełnione są warunki

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant k \quad ((n_i, n_j) \in \lesssim \ \vee (n_j, n_i) \in \lesssim),$$

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant k \, \forall m \neq n_1, \dots, n_k \quad ((n_i, m) \notin \lesssim \ \wedge (m, n_i) \notin \lesssim),$$

to klasę B_n definiujemy jako $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ lub odpowiednio $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$. Mając ustaloną klasę B_n definiujemy podpierścień $S(B_n)$ następująco:

$$S(B_n) = \{M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F) \colon \ (i \notin B_n \ \vee \ j \notin B_n) \ \Rightarrow \ m_{ij} = 0\}.$$

Dla dowolnego quasi-porządku $\lesssim$ pierścień $\mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F)$ jest uogólnioną sumą prostą[55] swoich podpierścieni $S(B_n)$: $\mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F) = \bar{\bigoplus}_{n \in N} S(B_n)$.

Jak można się domyślić automorfizmy $\mathcal{T}_\infty(\lesssim, F)$ i $\mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F)$ są złożeniami pewnych standardowych odwzorowań. Przedstawimy je poniżej.

(a) Dla dowolnej permutacji π zbioru $\mathbb{N}$ przez $\hat{\pi}$ oznaczane jest odwzorowanie $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ (lub dowolnego podpierścienia $\mathcal{M}_{Cf}(F)$) takie, że

$$[\hat{\pi}(X)]_{\pi(i)\pi(j)} = X_{ij}.$$

(b) Jeśli π jest permutacją klas $B_n = \{n_1, n_2, \dots\}$, $B_m = \{m_1, m_2, \dots\}$, gdzie $n_1 < n_2 < \dots$ i $m_1 < m_2 < \dots$ taką, że $\pi(n_i) = m_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to indukuje ona odwzorowanie $\mathcal{B}_\pi$ o własności:

$$[\mathcal{B}_\pi(X)]_{m_i m_j} = x_{n_i n_j},$$

co odpowiada permutacji bloków.

(c) Przez $\mathcal{J}$ oznaczmy odwzorowanie $\mathcal{T}_n(F)$ (gdzie n może być dowolną liczbą naturalną) zadane za pomocą wzoru:

$$[\mathcal{J}(X)]_{ij} = x_{n+1-j \ n+1-i}.$$

Niech $(\chi_n)_{n \in N}$ będzie ciągiem odwzorowań odpowiadającym uogólnionej sumie $\bar{\bigoplus}_{n \in N} S(B_n)$ takim, że jeśli ustalona klasa B_n jest nieskończonej mocy, to $\chi_n = \mathrm{id}$, natomiast w przeciwnym przypadku χ_n jest albo identycznością albo $\mathcal{J}$. Przez $(\bar{\chi}_n)_{n \in N}$ oznaczamy odwzorowanie, które do każdego bloku B_n stosuje χ_n.

(d) Analogicznie, dla pierścienia $\bar{\bigoplus}_{n \in N} S(B_n)$ mając dany ciąg $(\sigma_n)_{n \in N}$ automorfizmów ciała F, określamy automorfizm $\overline{(\sigma_n)}_{n \in N}$ jako odwzorowanie, które elementy x_{ij} bloku B_n przekształca w $\sigma_n(x_{ij})$.

[54] Alternatywne dowody można znaleźć w [3].

[55] W tym samym sensie jak uogólniona suma prosta bloków Jordana w omawianej wcześniej pracy [B5].

Automorfizmy pierścieni $\mathcal{T}_\infty(\lesssim, F)$ są opisane w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 50. *([C9], Thm.1) Niech F będzie ciałem, natomiast $\lesssim$ quasi-porządkiem w $\mathbb{N}$. Odwzorowanie ϕ jest automorfizmem $\mathcal{T}_\infty(F) = \bar{\oplus}_{n\in N} S(B_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy można je zapisać w postaci*

$$\phi = \mathcal{I}nn_T \cdot (\bar{\chi}_n)_{n\in N} \cdot (\bar{\sigma}_n)_{n\in N} \cdot \mathcal{B}_\pi$$

dla pewnej macierzy odwracalnej $T \in \mathcal{T}_\infty(\lesssim, F)$, pewnej permutacji $\pi \in S(N)$ oraz rodzin automorfizmów $(\chi_n)_{n\in N}$ oraz $(\sigma_n)_{n\in N}$.

Twierdzenie 50 można "nieco" uogólnić, by otrzymać opis epimorfizmów. Otóż, spełnione jest

Twierdzenie 51. *([C9], Cor.3) Niech F będzie ciałem, natomiast $\lesssim$ - quasi-porządkiem. Jeśli ϕ jest epimorfizmem $\mathcal{T}_\infty(\lesssim, F) = \bar{\oplus}_{n\in N} S(B_n)$, to ϕ jest postaci*

$$\phi = \mathcal{I}nn_T \cdot \psi$$

dla pewnej macierzy odwracalnej $T \in \mathcal{T}_\infty(\lesssim, F)$ oraz odwzorowania ψ takiego, że

$$\psi(S(B_n)) \subseteq \cup_m S(B_m),$$

gdzie pierścień $S(B_n)$ jest izomorficzny z $\mathcal{T}_{n'}(\lesssim, F)$, podczas gdy pierścienie $S(B_m)$ są izomorficzne z $\mathcal{T}_{n_m}(\lesssim, F)$ takimi, że $\sum_m n_m \leqslant n'$.

Automorfizmy pierścieni $\mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F)$ zostały zbadane przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących relacji $\lesssim$. Dokładniej, niech $\mathcal{M}_{\downarrow bound}(F)$ oznacza podpierścień $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ składający się z macierzy $M = [m_{ij}]$ dla których $\sup_{x_{ij}\neq 0}(i-j)$ jest dodatnią liczbą naturalną, natomiast $\mathcal{M}_{VK}(F)$ oznacza najmniejszy podpierścień $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ zawierający grupę $GL_{VK}(F)$, czyli

$$\mathcal{M}_{VK}(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right] : \ A \in \mathcal{M}_n(F),\ C \in \mathcal{T}_\infty(F),\ B \in M_{n\times\mathbb{N}}(F) \right\}.$$

Spełnione jest poniższe

Twierdzenie 52. *([C9], Thm.2) Niech F będzie ciałem charakterystyki różnej od 2, natomiast relacja $\lesssim$ quasi-porządkiem na $\mathbb{N}$ takim, że $\mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F) = \bar{\oplus}_{n\in N} S(B_n)$ jest zawarty w co najmniej jednym z pierścieni $\mathcal{M}_{\downarrow bound}(F)$ lub $\mathcal{M}_{VK}(F)$. Wówczas każdy automorfizm pierścienia $\mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F)$ jest postaci*

$$\phi = \mathcal{I}nn_G \cdot (\bar{\sigma}_n)_{n\in N} \cdot \hat{\pi}$$

dla pewnej odwracalnej macierzy $G \in \mathcal{M}_{Cf}(\lesssim, F)$, rodziny $(\sigma_n)_{n\in N}$ automorfizmów ciała F oraz pewnej permutacji π zbioru $\mathbb{N}$.

Praca [C6] odbiega nieco od [C5], jednak również dotyczy pewnych odwzorowań pierścieni macierzowych.

Definicja 11. Niech R będzie dowolnym pierścieniem. Jeśli $\delta\colon R \to R$ jest odwzorowaniem liniowym oraz spełnia warunek

$$\forall x, y \in R \quad \delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y),$$

to nazywamy je *różniczkowaniem* pierścienia R.

Na przykład, dla dowolnego pierścienia R oraz dowolnego $r \in R$ odwzorowanie δ_r zdefiniowane następująco:

$$\delta_r(x) = rx - xr$$

jest różniczkowaniem R. Różniczkowania powyższej postaci nazywane są *różniczkowaniami wewnętrznymi*. Klasyczny już wynik Hersteina [74] stwierdza, że jeśli R jest ciałem, to każde różniczkowanie pierścienia $\mathcal{M}_n(R)$ jest wewnętrzne. Okazuje się, że dla pierścieni R nie będących ciałami, twierdzenie to nie jest spełnione ani dla $\mathcal{M}_n(R)$ ani dla jego podpierścieni [137]. W szczególności, w przypadku pierścieni macierzy znane jest jeszcze jedno "standardowe" różniczkowanie. Niech R będzie pierścieniem, a Δ jego różniczkowaniem. Odwzorowanie $\delta_{\Delta(R)}\colon \mathcal{M}_n(R) \to \mathcal{M}_n(R)$ takie, że

$$\forall X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_n(R)\ \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n\colon \quad \left[\delta_{\Delta(R)}(X)\right]_{ij} = \Delta(x_{ij})$$

jest różniczkowaniem $\mathcal{M}_n(R)$, które nazywamy *różniczkowanem indukowanym przez* Δ. Wiadomo, że dla dowolnego pierścienia R z jedynką, dowolne różniczkowanie pierścienia $\mathcal{T}_n(R)$ jest sumą różniczkowania wewnętrznego i różniczkowania indukowanego. Jak się okazuje analogiczny wynik jest spełniony dla pierścienia $\mathcal{T}_\infty(R)$.

Twierdzenie 53. *([C6], Thm.1.2) Niech R będzie pierścieniem łącznym z jedynką. Odwzorowanie δ jest różniczkowaniem $\mathcal{T}_\infty(R)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierz $T \in \mathcal{T}_\infty(R)$ oraz różniczkowanie Δ pierścienia R takie, że*

$$\delta(X) = \delta_M(X) + \delta_{\Delta(R)}(X).$$

Co więcej, używając podobnych metod można otrzymać opis różniczkowań dla pierścienia $\mathcal{M}_{Cf}(R)$.

Twierdzenie 54. *([C6], Thm.1.1) Niech R będzie pierścieniem łącznym z jedynką. Odwzorowanie δ jest różniczkowaniem $\mathcal{M}_{Cf}(R)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierz $M \in \mathcal{M}_{Cf}(R)$ oraz różniczkowanie Δ pierścienia R takie, że*

$$\delta(X) = \delta_M(X) + \delta_{\Delta(R)}(X).$$

Warto dodać, że twierdzenie to było motywowane analogicznym wynikiem spełnionym dla pierścieni macierzy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, które mają jedynie skończoną liczbę elementów niezerowych [103].

Artykuły [C1-C2,C4,C7-C8,C10-C12,C14,C16] zawierają rozwiązania różnych tzw. *linear*[56] *preserver problems*. Zagadnienia te mają swoje korzenie w pracy [60], w której Frobenius udowodnił, że każde odwzorowanie liniowe $\phi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, które zachowuje wyznacznik, tzn. $\det(\phi(X)) = \det(X)$ dla wszystkich $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, jest jednej z postaci

$$\phi(X) = MXN, \tag{10}$$

[56] Jak się okaże poniżej, w istocie o niektórych z tych odwzorowaniach niekoniecznie zakłada się liniowość, a jakiś pokrewny warunek.

$$\phi(X) = MX^T N, \tag{11}$$

dla pewnych macierzy $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ spełniających warunek $\det(MN) = 1$. Kolejny krok milowy dla tej teorii postawił Dieudonné [52], który udowodnił, że każdy odwracalne odwzorowanie liniowe $\phi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, które odwzorowuje zbiór macierzy osobliwych w siebie również przyjmuje jedną z postaci (10) lub (11).

Ogólnie, *linear preserver problems*, krócej – problemy *lpp*, dotyczą opisów odwzorowań określonych na pewnej przestrzeni, algebrze, ewentualnie innej strukturze algebraicznej, które zachowują pewne określone własności. Przede wszystkim są to

(a) pewne ustalone funkcje f, co oznacza badanie operatorów ϕ spełniających równość $f(\phi(X)) = f(X)$,

(b) pewne ustalone podzbiory S, co odpowiada wyznaczaniu operatorów ϕ takich, że $\phi(S) \subseteq S$,

(c) pewne relacje $\sim$, co przekłada się na badanie odwzorowań ϕ takich, że $X \sim Y$ implikuje $\phi(X) \sim \phi(Y)$.

Oczywiście z czasem warunki te zaczęły podlegać różnorakim modyfikacjom, a założenia osłabieniom. Problemy *lpp* są liczne i mają znaczący wkład do algebry liniowej[57], chociaż należy tu nadmienić, że problemy te coraz częściej stają się nieliniowe. Poniżej przedstawione zostaną wyniki badań dotyczące odwzorowań zachowujących trzy bardzo często badane rodzaje tych funkcji oraz jedno mniej popularne.

Praca [C2] dotyczy odwzorowań określonych na pierścieniu $\mathcal{T}_\infty(F)$, które zachowują elementy idempotentne. W [131] wykazano, że każde odwzorowanie liniowe $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ w dowolną algebrę zespoloną $\mathcal{A}$ jest homomorfizmem Jordana[58]. W literaturze można jednak znaleźć całkiem sporo wyników otrzymanych z założeń zmodyfikowanej liniowości. Najbardziej ogólny z nich[59] należy do Šemrla [164] i opisuje ciągłe, bijektywne odwzorowania $\phi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ zachowujące elementy idempotentne – są one postaci

$$\phi(X) = MXM^{-1} \quad \text{lub} \quad \phi(X) = MX^T M^{-1} \tag{12}$$

dla pewnej macierzy $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nie występuje tutaj założenie liniowości czy też pokrewne założenie addytywności, co jest sporym osiągnięciem, jednak założenie bijektywności jest dość wymagającym warunkiem. W związku z tym powstało kilka prac, które próbują połączyć różne rodzaje założeń. W [199] Zhang charakteryzuje odwzorowania $\phi\colon \mathcal{M}_n(F) \to \mathcal{M}_n(F)$, gdzie F to dowolne ciało charakterystyki różnej od 2, które spełniają warunek

$$X - \lambda Y \text{ jest idempotentem} \iff \phi(X) - \lambda\phi(Y) \text{ jest idempotentem.} \tag{13}$$

Okazuje się, że one również przyjmują postać (12). Podobnie jest dla odwzorowań $\phi\colon \mathcal{T}_n(F) \to \mathcal{M}_n(F)$ spełniających warunek (13) – również[60] są one postaci (12) [191]. Praca [C2] jest

[57] Po więcej informacji na ich temat pozwolę sobie odesłać zainteresowanych Czytelników do artykułów przeglądowych [110, 111] oraz książki [129].

[58] Czyli spełnia warunek $\phi(ab + ba) = \phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)$.

[59] W sensie rezygnacji z liniowości.

[60] Tu należy się słowo wyjaśnienia. W istocie, w [191] rozważane są macierze określone nad $\mathbb{C}$ oraz macierze k-potentne. W przypadku macierzy k-potentnych istotne jest istnienie w ciele elementu rzędu $k - 1$. Stąd potrzeba nałożenia pewnych założeń na ciało. W przypadku idempotentów i ciała charakterystyki różnej od 2 istnienie takiego elementu jest zagwarantowane, zatem przedstawiam tutaj wynik w nieco ogólniejszej postaci.

inspirowana [199, 191], jednak rodzina uzyskanych odwzorowań jest "bogatsza" niż w przytoczonych powyżej przykładach. Przedstawienie głównego wyniku [C2] wymaga wprowadzenia kilku typów odwzorowań.

(a) Niech $\mu : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ będzie funkcją taką, że $\mu(n) \neq \emptyset$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz spełniającą warunek:

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}\ \forall i, j \in \mathbb{N}\, (n < m,\ i \in \mu(n),\ j \in \mu(m) \quad \Rightarrow \quad i < j)\, .$$

Ponadto, niech $\{X_{nm}\}_{n<m}$ będzie rodziną macierzy trójkątnych $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takich, że

- jeśli $i \notin \mu(n)$ lub $j \notin \mu(m)$, to $(X_{nm})_{ij} = 0$,
- dla wszystkich $n < p < m$ mamy $X_{np}X_{pm} = X_{nm}$.

Przez $\mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}}$ oznaczamy odwzorowanie na $\mathcal{T}_\infty(F)$, które spełnia tożsamość:

$$\mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}}([x_{ij}]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mu(n)} x_{nn}e_{ii} + \sum_{n<m} x_{nm}X_{nm}$$

dla dowolnej macierzy $X = [x_{ij}] \in \mathcal{T}_\infty(F)$, tzn. odwzorowuje zadaną macierz w macierz blokową, w której elementowi e_{ij} odpowiada blok X_{ij}.

(b) Niech N będzie podzbiorem $\mathbb{N}$ postaci $\{1, 2, \ldots, n\}$ lub $\mathbb{N} \setminus \{n, n+1, \ldots, m-1, m\}$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$. Wówczas przez $\mathcal{C}ut_N$ rozumiemy odwzorowanie $\mathcal{T}_\infty(F)$ takie, że

$$[\mathcal{C}ut_N([x_{kl}])]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ x_{ij} & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdy $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, oraz

$$[\mathcal{C}ut_N([x_{kl}])]_{ij} = \begin{cases} x_{i+m-n-1,j+m-n-1} & \text{jeśli } 1 \leqslant i, j \leqslant m-n+1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdy $N = \mathbb{N} \setminus \{n, n+1, \ldots, m-1, m\}$.

Ponadto, każde odwzorowanie ϕ będziemy nazywać *sumą rozłączną* odwzorowań $(\phi_n)_{n\in N}$ ($N \subseteq \mathbb{N}$), jeśli dla każdego $X \in \mathcal{T}_\infty(F)$ wartość $\phi(X)$ jest uogólnioną sumą prostą macierzy $\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n$ taką, że $\phi_n(X) = X_n$[61]. Wieloetapowy dowód łączy powyższe pojęcia w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 55. *([C2], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Jeśli $\phi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ spełnia* (13)*, to ϕ jest sumą rozłączną:*

- *co najmniej jednego odwzorowania postaci:*

$$\mathcal{I}nn_T \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}}\, ,$$

gdzie macierz $T \in \mathcal{T}_\infty(F)$ jest odwracalna i $X_{nm} \neq 0$ dla wszystkich $n < m$,

[61] Podaję tu nieco inną wersję definicji niż ta, która pojawia się w [C2] licząc, że zaprezentowane wcześniej pojęcie uogólnionej sumy prostej ułatwi zrozumienie.

oraz

- *dowolnej (skończonej lub nie) liczby odwzorowań postaci*

$$\mathcal{I}nn_t \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}} \,,$$
$$\mathcal{I}nn_t \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}} \cdot \mathcal{C}ut_N \,,$$
$$\mathcal{I}nn_t \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}} \cdot \mathcal{J} \cdot \mathcal{C}ut_N \,,$$

gdzie $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *lub* $N = \mathbb{N} \setminus \{n, n+1, \ldots, m\}$ *dla pewnych* $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$.

Artykuły [C1,C10-C11,C16] poświęcone są odwzorowaniom zachowującym relację przemienności (w sensie mnożenia) macierzy. Najogólniejszym warunkiem, który spełnia takie odwzorowanie jest implikacja

$$XY = YX \quad \Rightarrow \quad \phi(X)\phi(Y) = \phi(Y)\phi(X), \tag{14}$$

co przy użyciu nawiasu Lie'go[62] przyjmuje postać

$$[X, Y] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\phi(X), \phi(Y)] = 0.$$

Minimalnie mniej ogólnym warunkiem jest równoważność

$$XY = YX \quad \Leftrightarrow \quad \phi(X)\phi(Y) = \phi(Y)\phi(X). \tag{15}$$

Watkins [192] udowodnił następujące

Twierdzenie 56. *Jeśli* $n \geqslant 4$ *oraz* ϕ *jest spełniającym warunek* (14)*, odwracalnym, liniowym odwzorowaniem* $\mathcal{M}_n(F)$*, gdzie* F *jest ciałem algebraicznie domkniętym o charakterystyce* 0*, to* ϕ *jest jednej z postaci*

$$\phi(X) = CM^{-1}XM + f(X)I_n$$

$$\phi(X) = CM^{-1}X^TM + f(X)I_n,$$

gdzie M *jest pewną macierzą odwracalną, natomiast* $f\colon \mathcal{M}_n(F) \to F$ *jest liniowe.*

Nieco później okazało się, że twierdzenie to jest spełnione również dla macierzy stopnia trzeciego [12].

Dla macierzy trójkątnych skończonego stopnia spełnione jest analogiczne twierdzenie.

Twierdzenie 57. *([131], Thm.6 oraz [120], Thm.4) Niech* $\phi\colon \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ *będzie odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek* (15)*. Wówczas istnieją macierz odwracalna* $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$*, stała* $c \in \mathbb{C}$ *oraz odwzorowanie liniowe* $f\colon \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *takie, że* ϕ *jest jednej z postaci:*

$$\phi(X) = cTXT^{-1} + f(X)I_n \quad \textit{lub} \quad \phi(X) = cT\mathcal{J}(X)T^{-1} + f(X)I_n.$$

[62] Gwoli przypomnienia: $[x, y] = xy - yx$ w odróżnieniu od pojawiającego się w teorii grup symbolu komutatora.

Można zauważyć, że twierdzenie 56 z jednej strony zawiera ogólny warunek (14), z drugiej strony – dość silne założenia o bijektywności i liniowości. Założenia te były modyfikowane na wiele sposobów, z których trudno wybrać najbardziej interesujące, niemniej na pewno na uwagę zasługuje nieliniowy wynik Šemrla.

Twierdzenie 58. *([165], Thm.2.2) Niech $n \geqslant 3$ oraz niech $\phi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ będzie ciągłą bijekcją spełniającą* (15). *Wtedy istnieją macierz odwracalna $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, σ – automorfizm ciała $\mathbb{C}$ oraz funkcja lokalnie wielomianowa*[63] *p_X taka, że ϕ jest jednej z postaci*

$$\phi(X) = Mp_X(\bar{\sigma}(X))M^{-1} \quad \textit{lub} \quad \phi(X) = Mp_X(\bar{\sigma}(X^T))M^{-1}.$$

W pracy [C10] aby otrzymać, jak się okazuje, "całkiem bogatą" rodzinę odwzorowań zachowujących przemienność na $\mathcal{T}_\infty(F)$ rozpatruje się warunek silniejszy niż (14) lub (15), dokładniej:

$$\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)], \tag{16}$$

jednak nie narzuca się na ϕ założenia bijektywności, a "jedynie" injektywność. W opisie uzyskanych odwzorowań, oprócz zaprezentowanych wcześniej odwzorowań standardowych pojawia się jeszcze jeden ich rodzaj. Mianowicie, jeśli N jest dowolnym niepustym podzbiorem właściwym $\mathbb{N}$, to $\mathcal{C}ut_N^{RC}$ oznacza odwzorowanie $\mathcal{T}_\infty(F)$ takie, że

$$\left[\mathcal{C}ut_N^{RC}([x_{ij}])\right]_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n \in N \text{ lub } m \in N, \\ x_{nm} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W dowodzie najbardziej istotne role grają opisy pewnych szczególnych centralizatorów oraz odwzorowania zachowujące idempotenty. Otrzymany wynik jest następujący.

Twierdzenie 59. *([C10], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Jeśli $\phi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest injekcją spełniającą warunek* (16)*, to ϕ jest sumą rozłączną:*

(a) *co najmniej jednego odwzorowania postaci $\psi(X) = \widetilde{\psi} + f(X)\widetilde{\psi}(I_\infty)$, gdzie $\widetilde{\psi}$ może być równe:*

$$\mathcal{I}nn_T \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}}$$
$$\textit{lub}$$
$$\mathcal{I}nn_T \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}} \cdot \mathcal{C}ut_N$$
$$\textit{lub}$$
$$\mathcal{I}nn_T \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}} \cdot \mathcal{J} \cdot \mathcal{C}ut_N\ ,$$

gdzie

- *$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ lub $N = \mathbb{N} \setminus \{n, n+1, \ldots, m\}$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$,*
- *$X_{nm}X_{mk} = X_{nk}$ dla wszystkich $n, m, k \in \mathbb{N}$, $n < m < k$,*
- *$f : \mathcal{T}_\infty(F) \to F$ jest liniowe;*

oraz

[63] W oryginale jest to *locally polynomial map* i oznacza odwzorowanie $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ takie, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mamy $f(A) = p_A(A)$, gdzie p_A jest wielomianem takim, że centralizator A oraz centralizator $p_A(A)$ są równe.

(b) *dowolnej (skończonej lub nie) liczby* ψ *takich, że* $\psi(x) = (\widetilde{\psi} \cdot \mathcal{C}ut_M^{RC})(x) + f(x)\widetilde{\psi}(e_\infty)$*, gdzie* $\widetilde{\psi}$ *może być równe*

$$\mathcal{I}nn_T \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}}$$
$$\textit{lub}$$
$$\mathcal{I}nn_T \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{X_{nm}\}_{n<m}} \cdot \mathcal{C}ut_N$$
$$\textit{lub}$$
$$\mathcal{I}nn_T \cdot \mathcal{S}pl_{\mu,\{b_{nm}\}_{n<m}} \cdot \mathcal{J} \cdot \mathcal{C}ut_N\ ,$$

gdzie

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *lub* $N = \mathbb{N} \setminus \{n, n+1, \ldots, m\}$ *dla pewnych* $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$,
- $X_{nm}X_{mk} = X_{nk}$ *dla pewnych* $n, m, k \in \mathbb{N}$, $n < m < k$,
- $\emptyset \subsetneq M \subset \mathbb{N}$,
- $f : \mathcal{T}_\infty(F) \to F$ *jest liniowe;*

oraz

(c) *oraz dowolnej (skończonej lub nie) liczby* ψ *takich, że* $\psi(x) = \widetilde{\psi}(x) + \chi(x)$*, gdzie*

- $\widetilde{\psi}(e_{nm}) = \beta_{nm}X_{nm}$ *dla pewnych* $X_{nm}^2 = X_{nm} \neq 0$,
- $\widetilde{\psi}(e_{nn} + e_{mm}) = 0$,
- $\widetilde{\psi}([x_{ij}]) = 0$ *dla wszystkich* x *spełniających* $x_{nm} = x_{nn} = x_{mm} = 0$,
- χ *jest odwzorowaniem takim, że* $\chi(X)$ *jest przemienna z* $\widetilde{\psi}(e_{nm})$ *oraz* $\widetilde{\psi}(e_{nn})$*;*

oraz

(d) *oraz odwzorowania* ψ *spełniającego tożsamość* $\psi(X)\psi(Y) = \psi(Y)\psi(X)$ *dla wszystkich* $X, Y \in \mathcal{T}_\infty(F)$.

Artykuł [C11] również dotyczy odwzorowań, które zachowują przemienność, jednak ze względu na pominięcie założenia liniowości i zastąpienie go ciągłością, ogranicza się do macierzy trójkątnych skończonego stopnia. Praca ta wykorzystuje własności funkcji znane bardziej z kursu topologii niż algebry, w tym twierdzenie Tietzego-Urysohna[64], pewne pomysły z pracy [165], a także opis macierzy trójkątnych, których centralizatory są maksymalne bądź minimalne[65] w rodzinie wszystkich macierzy z $\mathcal{T}_\infty(F)$. Uzyskany wynik istotnie przypomina twierdzenie 58.

Twierdzenie 60. *([C11], Thm.1.1) Niech* F *będzie skończonym rozszerzeniem* $\mathbb{R}$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$*. Wtedy* $\phi\colon \mathcal{T}_n(F) \to \mathcal{T}_n(F)$ *jest injektywnym, ciągłym odwzorowaniem spełniającym* (15) *wtedy i tylko wtedy, gdy* ϕ *jest jednej z dwóch postaci:*

$$\phi(X) = \mathcal{I}nn_T \cdot p_X(X), \qquad \phi(X) = \mathcal{I}nn_T \cdot \mathcal{J} \cdot p_X(X)$$

dla pewnej macierzy $T \in T_n(F)$ *oraz pewnego odwzorowania lokalnie wielomianowego* $\mathcal{T}_n(F) \ni X \mapsto p_X(X)$.

[64] *Każdą ciągłą funkcję określoną na domkniętej podprzestrzeni przestrzeni normalnej można przedłużyć w sposób ciągły do funkcji określonej na całej przestrzeni.*

[65] Opis ten pomimo, iż uzyskany wcześniej, ukazał się w [D5], później niż [C11].

W pracy [C16] rozpatrywane są odwzorowania również związane z relacją przemienności, ale w następujący sposób.

Definicja 12. Niech R będzie pierścieniem, a m liczbą naturalną. Jeśli $f\colon R \to R$ jest odwzorowaniem takim, że

$$\forall x \in R \quad [f(x), x^m] = 0, \tag{17}$$

to f nazywamy odwzorowaniem *m-przemiennym*[66].

W szczególności, jeśli $m = 1$, to f nazywamy odwzorowaniem *przemiennym*.

Zainteresowanie odwzorowaniami przemiennymi bierze swój początek z twierdzenia Posnera [149], który udowodnił, że każdy pierścień pierwszy[67], na którym można określić niezerowe różniczkowanie posiadające własność (17) dla $m = 1$, jest przemienny. Brešar [26] udowodnił, że każde addytywne odwzorowanie ϕ spełniające (17) dla $m = 1$ określone na pierścieniu pierwszym R jest postaci

$$\phi(x) = \lambda x + \mu(x), \tag{18}$$

gdzie λ jest pewną stałą należącą do $Z(R)$ – centrum R, natomiast $\mu\colon R \to Z(R)$ jest pewnym odwzorowaniem addytywnym. Postać (18) lub jej podobne pojawiają się we wszystkich[68] pracach dotyczących opisu ϕ, które mają własność m-przemienności. Z [40] wiemy, że tę samą postać przyjmują odwzorowania przemienne określone na algebrach trójkątnych zdefiniowanych nad pierścieniami przemiennymi. W stosunkowo niedawno opublikowanej pracy [24] Bounds rozważał odwzorowania przemienne zdefiniowane na pierścieniu macierzy ściśle górnotrójkątnych określonych nad ciałem charakterystyki 0. Udowodnił tam, że są one postaci (18), jednak w tym przypadku $\mu\colon N_n(F) \to \{ae_{1\,n-1} + be_{1\,n} + ce_{2\,n}\}$. Metoda użyta w [24], z drobną modyfikacją, okazała się świetnym narzędziem do otrzymania poniższego wyniku.

Twierdzenie 61. *([C16], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem nieskończonym. Jeśli $\phi\colon N_\infty(F) \to N_\infty(F)$ jest addytywnym, przemiennym odwzorowaniem, to $\phi(X) = \lambda X$ dla pewnego $\lambda \in F$.*

W świetle powyższego twierdzenia naturalnym jest pytanie czy podobny wynik jest spełniony dla pierścienia macierzy górnotrójkątnych. Odpowiedź jest pozytywna, a wynik nieco ogólniejszy od twierdzenia 61.

Twierdzenie 62. *([C15], Thm.1.2) Niech m będzie liczbą naturalną, natomiast F ciałem nieskończonym, którego charakterystyka nie jest dzielnikiem m. Jeśli $\phi\colon T_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest addytywnym, m-przemiennym odwzorowaniem, to istnieją $\lambda \in F$ oraz odwzorowanie addytywne $\mu\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to F$ takie, że*

$$\phi(X) = \lambda X + \mu(X) I_\infty.$$

W szczególności oznacza to, że dla ciał o odpowiedniej charakterystyce odwzorowania przemienne i m-przemienne pokrywają się. Przykłady takich pierścieni były znane wcześniej [16], jednak warto wspomnieć, że nie jest to ogólna prawidłowość.

[66] W oryginale *m-commuting maps* lub *m-power commuting maps*.

[67] Czyli pierścień R, w którym z warunku $xRy = \{0\}$ wynika, że $x = 0$ lub $y = 0$.

[68] Bardzo licznych!

Praca [C1], w przeciwieństwie do [C16] i [C10], dotyczy odwzorowań określonych na grupach macierzy trójkątnych i unitrójkątnych. Rozważany tam warunek, który mają spełniać takie odwzorowania ϕ jest związany z komutatorami, dokładniej zakładamy, że:

$$\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]. \tag{19}$$

W szczególności wynika stąd, że jeśli $XY = YX$, to $\phi(X)\phi(Y) = \phi(Y)\phi(X)$, zatem każde ϕ czyniące zadość (19), zachowuje przemienność. Motywacją dla pracy [C1] były artykuły [39, 139], w których opisane zostały bijektywne ϕ spełniające (19) określone na grupach macierzy trójkątnych i unitrójkątnych skończonego stopnia. Dowody, mimo, iż częściowo inspirowane przede wszystkim pracą [39] wymagają dodatkowych rozważań, w których, między innymi pojawiają się, rozważane już tutaj, podgrupy $R_{\infty}^{nm}(F)$. Ostatecznie, otrzymane rodziny odwzorowań wydawać się mogą "uboższe" od ich analogonów otrzymanych dla macierzy skończonych stopni, jednak należy brać pod uwagę, że zdefiniowane wcześniej odwzorowanie $\mathcal{J}$ zachowuje przemienność oraz jest określone na grupach lub pierścieniach macierzy skończonego stopnia i nie ma swojego nieskończenie wymiarowego odpowiednika. Ponadto, nie bez znaczenia jest fakt, iż centrum grupy $UT_{\infty}(F)$ zawiera wyłącznie macierz jednostkową, podczas gdy centrum grupy $UT_n(F)$ jest równe $\{I_n + \alpha e_{1\,n} \colon \alpha \in F\}$.

Oprócz pewnych standardowych odwzorowań jakie pojawiły się tu wcześniej, w opisie ϕ spełniających (19) występuje jeszcze jeden ich rodzaj. Dokładniej

Definicja 13. Mówimy, że odwzorowanie $\phi\colon UT_{\infty}(F) \to UT_{\infty}(F)$, jest *prawie identycznościowe*[69] *na* $UT_{\infty}(F)$, jeśli dla dowolnej transwekcji $t_{ij}(\alpha) = I_{\infty} + \alpha e_{ij}$ mamy:

$$\phi(t_{ij}(\alpha)) = t_{ij}(\alpha).$$

Odwzorowania te oznaczamy $\phi_{ai(UT)}$.

Definicja 14. Mówimy, że odwzorowanie $\phi\colon T_{\infty}(F) \to T_{\infty}(F)$ jest *prawie identycznościowe na* $T_{\infty}(F)$, jeśli spełnia dwa warunki:

$$\forall U \in UT_{\infty}(F) \quad \phi(U) = U \qquad \text{oraz} \qquad \forall T \in T_{\infty}(F) \exists \alpha \in F^{*} \quad T^{-1} \cdot \phi(T) = \alpha I_{\infty}.$$

Odwzorowania te oznaczamy symbolem $\phi_{ai(T)}$.

Ostatecznie w [C1] otrzymano poniższe:

Twierdzenie 63. *([C1], Thm.2.1) Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach. Odwzorowanie $\phi\colon UT_{\infty}(F) \to UT_{\infty}(F)$ spełnia warunek* (19) *wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci:*

$$\phi = \mathcal{I}nt_U \cdot \mathcal{D}iag_D \cdot \bar{\sigma} \cdot \phi_{ai(UT)}$$

dla pewnych macierzy $U \in UT_{\infty}(F)$, $D \in D_{\infty}(F)$, automorfizmu σ ciała F oraz odwzorowania prawie identycznościowego $\phi_{ai(UT)}$ na $UT_{\infty}(F)$.

Twierdzenie 64. *([C1], Thm.2.2) Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach. Odwzorowanie $\phi\colon T_{\infty}(F) \to T_{\infty}(F)$ spełnia warunek* (19) *wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci:*

$$\phi = \mathcal{I}nt_T \cdot \bar{\sigma} \cdot \phi_{ai(T)}$$

dla pewnej macierzy $T \in T_{\infty}(F)$, automorfizmu σ ciała F oraz odwzorowania prawie identycznościowego $\phi_{ai(T)}$ na $T_{\infty}(F)$.

[69] W oryginale *almost identity map.*

Prace [C8,C7,C12] oraz częściowo [C4] są związane z rzędem macierzy. W przypadku macierzy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ustalmy, że rząd to maksymalna liczba kardynalna wierszy liniowo niezależnych, jeśli liczba ta jest skończona, i ω w przeciwnym przypadku. Jeśli odwzorowanie ϕ określone na pewnej algebrze A składającej się z macierzy spełnia warunek:

$$\forall X \in A \, (\mathrm{rank}(X) = k \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(\phi(X)) = k)\,,$$

to ϕ nazywamy odwzorowaniem *zachowującym rząd* k. Marcus i Moyls [121] jako pierwsi wyznaczyli liniowe odwzorowania zachowujące dowolny rząd na $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ – przyjmują one postaci (10) lub (11) dla pewnych odwracalnych macierzy P, Q. Ta sama para autorów udowodniła w [122], że jeśli ϕ zachowuje rząd 1, to zachowuje również wszystkie pozostałe rzędy[70]. Z tego powodu odwzorowania zachowujące rząd 1 są bardzo często rozpatrywane w literaturze. W szczególności, dla macierzy skończonego stopnia mamy:

Twierdzenie 65. *([41], Thm.2.3) Niech F będzie dowolnym ciałem, $n \in \mathbb{N}$, natomiast $\phi\colon \mathcal{T}_n(F) \to \mathcal{T}_n(F)$ odwzorowaniem liniowym, które zachowuje rząd 1. Wtedy albo*

(a) $\mathrm{im}(\phi)$ *jest n-wymiarową podprzestrzenią $\mathcal{T}_n(F)$ składającą się z macierzy rzędu 1 oraz macierzy zerowej*

albo

(b) *istnieją nieosobliwe macierze $P, Q \in \mathcal{T}_n(F)$ takie, że ϕ jest postaci*

$$\phi(X) = PXQ \quad \textit{lub} \quad \phi(X) = P\mathcal{J}(X)Q.$$

Okazuje się, że uogólniając nieco metody wykorzystane w pracy [41] można udowodnić, że analogiczne twierdzenie jest spełnione w $\mathcal{T}_\infty(F)$.

Twierdzenie 66. *([C8], Thm.1.1) Niech F będzie dowolnym ciałem, a $\phi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ odwzorowaniem liniowym zachowującym rząd 1. Wtedy albo*

(a) $\mathrm{im}(\phi)$ *jest podprzestrzenią $\mathcal{T}_\infty(F)$ składającą się z macierzy rzędu 1 oraz macierzy zerowej*

albo

(b) *istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{M}_\infty(F)$ takie, że ϕ jest postaci*

$$\phi(X) = PXQ.$$

Warto podkreślić, że P oraz Q z powyższego twierdzenia nie muszą być ani odwracalne w $\mathcal{M}_\infty(F)$ ani trójkątne.

Przykład 3. Dla

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} e_{n+1,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad Q = P^T,$$

[70] Warto dodać, że twierdzenie odwrotne jest spełnione przy dodatkowym założeniu nieosobliwości ϕ [14].

ϕ z twierdzenia 66 jest następujące:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \stackrel{\phi}{\mapsto} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \\ 0 & 0 & x_{22} & x_{23} & \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

zatem zachowuje macierze rzędu 1 oraz spełnia warunek $\mathrm{im}(\phi) \subset \mathcal{T}_\infty(F)$, pomimo iż $Q \notin \mathcal{T}_\infty(F)$ oraz P nie jest odwracalna.

Nie jest to wyszczególnione w treści twierdzenia 66, jednak okazuje się, że macierze P, Q należą do zbioru $\mathcal{M}_{Cf}(F)$. Jak można się spodziewać, pewne dodatkowe założenia nałożone na ϕ wymuszają trójkątność P i Q. Dokładniej:

Wniosek 10. *([C8], Cor.2.1) Niech F będzie dowolnym ciałem. Jeśli $\phi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest liniowym, surjektywnym odwzorowaniem zachowującym rząd 1, to istnieją macierze $P, Q \in T_\infty(F)$ takie, że $\phi(X) = PXQ$.*

Oczywiście, w świetle wyniku Marcusa i Moylsa [122], naturalnym wydaje się również:

Twierdzenie 67. *([C8], Thm.1.2) Niech F będzie ciałem, natomiast $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Wówczas $\phi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest liniowym, injektywnym odwzorowaniem zachowującym rząd 2 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{M}_\infty(F)$ takie, że $\phi(X) = PXQ$.*

Oprócz odwzorowań zachowujących rząd macierzy, wielu autorów interesuje się również odwzorowaniami, które zachowują inne własności macierzy związane z rzędem. Wprowadźmy następującą definicję.

Definicja 15. Niech $X \in \mathcal{M}_n(F)$, gdzie F jest dowolnym ciałem. Minimalnym rzędem X nazywamy liczbę:

$$\min \{\mathrm{rank}(X - \alpha I_n) \colon \alpha \in F\}.$$

Można zauważyć, że operacja sprzężenia, operacja dodania do ustalonej macierzy dowolnej macierzy skalarnej oraz pomnożenie przez dowolną stałą nie zmieniają minimalnego rzędu. Okazuje się [171], że faktycznie odwzorowania liniowe określone na $\mathcal{M}_n(F)$[71], które zachowują minimalny rząd - w skrócie mr - tzn. spełniają warunek

$$\mathrm{mr}(\phi(X)) = \mathrm{mr}(X) \tag{20}$$

są jednej z dwóch postaci:

$$\phi(X) = \alpha M X M^{-1} + f(X) I_n, \qquad \phi(X) = \alpha M X^T M^{-1} + f(X) I_n, \tag{21}$$

gdzie $M \in \mathcal{M}_n(F)$ jest dowolną macierzą nieosobliwą, $\alpha \in F^*$, natomiast $f\colon \mathcal{M}_n(F) \to F$ jest liniowe. Przypadek macierzy trójkątnych okazał się nieco ciekawszy – Guo i Hou [66] pokazali,

[71] Doprecyzowując: chodzi tu o ciało algebraicznie domknięte charakterystyki 0 i o stopień n równy co najmniej 3.

że odwzorowania liniowe[72] określone na $\mathcal{T}_n(F)$, gdzie F jest ciałem algebraicznie domkniętym przyjmują postaci:

$$\phi(X) = \alpha M X M^{-1} + f(x_{11} - x_{nn})e_{1n} + h(X)I_n$$
lub
$$\phi(X) = \alpha M \mathcal{J}(X) M^{-1} + f(x_{11} - x_{nn})e_{1n} + h(X)I_n.$$

Jak się okazuje, analogiczne odwzorowania określone na $\mathcal{T}_\infty(F)$ mają opis bardziej podobny do (21). Z pewną pomocą twierdzenia 66 otrzymano tam:

Twierdzenie 68. *([C7], Thm.1.1) Niech F będzie dowolnym ciałem. Jeśli $\phi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest liniowym odwzorowaniem spełniającym* (20)*, to istnieją macierz odwracalna $T \in \mathcal{T}_\infty(F)$, stała $\alpha \in F^*$ oraz odwzorowanie liniowe $f\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to F$ takie, że*

$$\phi(X) = \alpha T^{-1} X T + f(X) I_\infty.$$

Innym przykładem odwzorowań związanych z rzędem są odwzorowania zachowujące addytywność rzędu, tzn. spełniające implikację:

$$\operatorname{rank}(X+Y) = \operatorname{rank}(X) + \operatorname{rank}(Y) \ \Rightarrow\ \operatorname{rank}(\phi(X+Y)) = \operatorname{rank}(\phi(X)) + \operatorname{rank}(\phi(Y)). \quad (22)$$

Beasley [13] udowodnił, że odwzorowania liniowe spełniające (22) na $\mathcal{M}_{n\times m}(F)$ są postaci (10) lub (11). Chooi i Lim badali odwzorowania addytywne zachowujące addytywność rzędu, jednak otrzymany opis jest mocno rozbudowany [42], nawet przy ograniczeniu się do macierzy trójkątnych i addytywnych ϕ. Przypadek macierzy trójkątnych nieskończonych okazuje się być nieco bardziej przejrzysty.

Twierdzenie 69. *([C12], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem. Jeśli $\phi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest liniowym, injektywnym odwzorowaniem spełniającym* (22)*, to albo*

(a) *istnieje macierz $X \in \mathcal{T}_\infty(F)$ taka, że $\operatorname{rank}(X) < \infty$ i jednocześnie $\operatorname{rank}(\phi(X)) = \infty$*

albo

(b) *dla pewnej liczby $k \in \mathbb{N}$ oraz macierzy $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{M}_{Cf}(F)$ mamy*

$$\phi(X) = A_1 X B_1 + \cdots + A_k X B_k,$$

przy czym:

- *$A_i X B_i \in \mathcal{T}_\infty(F)$ dla każdego i, $1 \leqslant i \leqslant k$,*
- *dla każdego i, $1 \leqslant i \leqslant k$, kolumny A_i są liniowo niezależne,*
- *dla każdego i, $1 \leqslant i \leqslant k$, wiersze B_i są liniowo niezależne.*

Prawdopodobnie najbardziej intrygująca w twierdzeniu 69 jest suma odwzorowań postaci (10). Jak pokazuje poniższy przykład, w ogólnym przypadku, nie może ona sprowadzać się do odwzorowania postaci (10).

[72] Dokładniej: w [66] otrzymano wynik nieco ogólniejszy – opis odwzorowań addytywnych, jednak aby ujednolicić przedstawione rozważania ograniczę się do przypadku liniowego.

Przykład 4. ([C12], Ex.2.1) Dla następujących macierzy:

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e_{2n-1,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (e_{n,2n-1} + e_{n,2n}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} e_{2n,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad B_2 = \sum_{n=1}^{\infty} e_{n,2n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

mamy:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ & x_{22} & x_{23} & \\ & & x_{33} & \\ & & \ddots & \end{bmatrix} \overset{\phi}{\mapsto} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{12} & \cdots \\ & x_{11} & 0 & x_{12} & \\ & & x_{22} & x_{22} & \\ & & & x_{22} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Otrzymane odwzorowanie ϕ zachowuje addytywność rzędu, mimo, iż nie zachowuje rzędu i nie daje się zapisać w postaci (10).

Praca [C4] zawiera opis jeszcze jednej klasy odwzorowań związanej z rzędem. Niech σ będzie ustaloną permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, k\}$ $(k > 1)$ różną od identyczności na tym zbiorze.

Definicja 16. Jeśli dla pewnego k-elementowego ciągu macierzy X_1, X_2, ..., X_k spełniony jest warunek:

$$\operatorname{rank}(X_1 X_2 \cdots X_k) = \operatorname{rank}(X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} \cdots X_{\sigma(k)}),$$

to mówimy, że ciąg ten jest *rzędowo permutowalny względem* σ[73].

Definicja 17. Jeśli odwzorowanie ϕ określone na pewnej algebrze macierzowej spełnia warunek

$$\begin{gathered} \operatorname{rank}(X_1 X_2 \cdots X_k) = \operatorname{rank}(X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} \cdots X_{\sigma(k)}) \\ \Leftrightarrow \\ \operatorname{rank}(\phi(X_1)\phi(X_2) \cdots \phi(X_k)) = \operatorname{rank}(\phi(X_{\sigma(1)})\phi(X_{\sigma(2)}) \cdots \phi(X_{\sigma(k)})), \end{gathered} \tag{23}$$

dla wszystkich k-elementowych ciągów macierzy X_1, X_2, ..., X_k, to mówimy, że ϕ *silnie zachowuje rzędową permutowalność względem* σ[74].

[73]Oryginalnie *is rank permutable*. Dopisek *względem* σ pochodzi ode mnie. Z uwagi na fakt, że we wcześniejszej pracy [4] odwzorowania określone są takim mianem, gdy warunek z definicji jest spełniony dla wszystkich permutacji zbioru k-elementowego, podczas, gdy w kolejnej pracy [5] mianem tym określone są odwzorowania spełniające ten warunek dla ustalonej (jednej!) permutacji, uważam, że ta drobna modyfikacja w notacji jest zasadna.

[74]Jak powyżej.

Odwzorowania silnie zachowujące rzędową permutowalność względem dowolnej permutacji zbadali i opisali Alieva, Guterman i Kuzma w pracach[75] [4, 5]. Bardzo pomocny okazał się w nich wynik pochodzący od Dieudonné, który stwierdza, że odwzorowania zachowujące macierze osobliwe są postaci (10) lub (11). Dodatkowa argumentacja wykazała, że dla każdego takiego odwzorowania określonego na $\mathcal{M}_n(F)$ istnieją macierz $M \in \mathcal{M}_n(F)$ oraz stała $\alpha \in F$ takie, że ϕ jest jednej z postaci:

$$\phi(X) = \alpha M X P^{-1} \quad \text{lub} \quad \phi(X) = \alpha M X^T M^{-1}.$$

Ponieważ, klasa odwzorowań zachowujących macierze osobliwe lub/i nieosobliwe z $\mathcal{T}_n(F)$ różni się od klasy odwzorowań zachowujących macierze osobliwe lub/i nieosobliwe z $\mathcal{M}_n(F)$, więc powyższy wynik nie może zostać automatycznie przeniesiony na przypadek trójkątny, który okazuje się dużo bardziej złożony. Szczególny przypadek – permutacji σ:

$$\sigma = (1\,k)\,(2\,(k-1))\cdots\left(\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor\,\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil\right)$$

zbadali Tang i Yang [178] otrzymując analogiczny wynik, tzn. odwzorowania ϕ postaci:

$$\phi(X) = \alpha M X P^{-1} \quad \text{lub} \quad \phi(X) = \alpha M \mathcal{J}(X) M^{-1}.$$

W [C4] udowodniono, że istnieje więcej permutacji σ, dla których odwzorowania silnie zachowujące rzędową permutowalność względem σ, przyjmują standardową postać. Dokładniej, przy oznaczeniach:

$$\begin{gathered}
I_1(\sigma) := \{i :\ 1 \le i < k,\ \sigma(i+1) > \sigma(i)+1\},\\
I_2(\sigma) := \left\{i :\ 1 \le i < k,\ \sigma^{-1}(i+1) > \sigma^{-1}(i)+1\right\},\\
I_3(\sigma) := \{(i,j) :\ 1 \le i < j < k,\ \sigma(i)+1 < \sigma(j),\ \sigma(j)-\sigma(i) \ne j-i\},
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\gcd{}_1(\sigma) &:= \begin{cases} \gcd_{i\in I_1(\sigma)}(\sigma(i+1)-\sigma(i)-1) & \text{jeśli} \quad I_1(\sigma) \ne \emptyset,\\ k! \quad \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}\\
\gcd{}_2(\sigma) &:= \begin{cases} \gcd_{i\in I_2(\sigma)}(\sigma^{-1}(i+1)-\sigma^{-1}(i)-1) & \text{jeśli} \quad I_2(\sigma) \ne \emptyset,\\ k! \quad \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}\\
\gcd{}_3(\sigma) &:= \begin{cases} \gcd_{(i,j)\in I_3(\sigma)}(\sigma(j)-\sigma(i)-j+i) & \text{jeśli} \quad I_3(\sigma) \ne \emptyset,\\ k! \quad \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}\\
\gcd{}_+(\sigma) &:= \gcd(\gcd{}_1(\sigma), \gcd{}_2(\sigma), \gcd{}_3(\sigma)),
\end{aligned}$$

spełnione jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 70. *([C4], Thm.1.3) Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach oraz niech σ będzie permutacją zbioru $\{1,2,\dots,k\}$ ($k \ge 2$) spełniającą co najmniej jeden z poniższych warunków:*

(a) *$\sigma = (i, i+1)\tau$ dla pewnej liczby $1 \le i < k$ oraz permutacji τ takiej, że $i, i+1 \notin \operatorname{supp}(\tau)$,*

(b) *istnieje i, $1 \le i < k$, takie, że $\sigma(i) > \sigma(i+1)+1$ oraz $\gcd_+(\sigma) \mid (\sigma(i)-\sigma(i+1)-1)$,*

[75] I nie tylko w nich!

(c) istnieje i, $1 \leq i < k$, takie, że $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(i+1)+1$ oraz $\gcd_+(\sigma) | \left(\sigma^{-1}(i) - \sigma^{-1}(i+1) - 1\right)$.

Jeśli $\phi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest surjekcją spełniającą (23), to istnieją $\alpha \in F^*$ oraz macierz odwracalna $T \in \mathcal{T}_\infty(F)$ takie, że

$$\phi(X) = \alpha T^{-1} X T.$$

Jak wspomniano powyżej, odwzorowania zachowujące rzędową permutowalność nie pozostają bez związku z odwzorowaniami zachowującymi macierze osobliwe i nieosobliwe. W przypadku pełnej algebry macierzowej są to odwzorowania standardowe (10) lub (11). W przypadku macierzy trójkątnych, gdzie ososbliwość jest determinowana przez główną przekątną mamy

Twierdzenie 71. *([41], Thm.3.3) Niech F będzie ciałem takim, że $|F| > 2$, i niech ϕ będzie odwzorowaniem liniowym określonym na $\mathcal{T}_n(F)$. Wówczas ϕ zachowuje macierze osobliwe i nieosobliwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje permutacja σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oraz stałe λ_1, λ_2, ..., $\lambda_n \in F^*$ takie, że*

$$[\phi([x_{ij}])]_{kk} = \lambda_k x_{\sigma(k)\sigma(k)} \quad \textit{dla każdego } k, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Przypadek $\mathcal{T}_\infty(F)$ jest podobny, choć pozostawia jeszcze więcej do wyboru.

Twierdzenie 72. *([C4], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach i niech $\phi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ będzie liniowe. Wtedy ϕ zachowuje macierze odwracalne i macierze nieodwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $\mu\colon \mathbb{N} \to 2^{\mathcal{N}} \setminus \{\emptyset\}$ taka, że $\mu(n) \cap \mu(m) = \emptyset$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, oraz stałe $\alpha_k \in F^*$ ($k \in \mathbb{N}$) takie, że*

$$[\phi([x_{ij}])]_{kk} = \alpha_k x_{nn} \quad \textit{dla wszystkich } n \in \mu(k).$$

W związku z powyższymi rozważaniami naturalnym wydaje się również pytanie o odwzorowania zachowujące "odwrotności", tzn.

$$\phi(X^{-1}) = (\phi(X))^{-1}, \tag{24}$$

gdzie ϕ jest odwzorowaniem określonym na zbiorze elementów odwracalnych $\mathcal{T}_\infty(F)$, czyli $T_\infty(F)$.

Ponieważ warunek (24) jest dość wymagający, więc odwzorowania które go spełniają, w porównaniu do innych, należą do dość wąskiej klasy, mianowicie są jednej z postaci [29]:

$$\phi(X) = \pm M X M^{-1} \quad \text{lub} \quad \phi(X) = \pm M X^T M^{-1}.$$

Podobnie jest w przypadku macierzy nieskończonych.

Twierdzenie 73. *([C4], Thm.1.2) Niech F będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 i posiadającym co najmniej cztery elementy. Jeśli $\phi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest surjektywnym, liniowym odwzorowaniem spełniającym (24), to dla pewnej odwracalnej macierzy $T \in \mathcal{T}_\infty(F)$ zachodzi jedna z tożsamości*

$$\phi(X) = T^{-1} X T \quad \textit{lub} \quad \phi(X) = -T^{-1} X T.$$

Pozostając w temacie "odwrotności", praca [C15] dotyczy uogólnionych odwrotności macierzy górnotrójkątnych $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a dokładniej pseudoodwrotności Drazina[76] takich macierzy. Przypomnijmy, że macierz X^D nazywamy pseudoodwrotnością Drazina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-macierzy górnotrójkątnej X, jeśli spełnia poniższe warunki:

$$\begin{aligned} XX^D &= X^D X, \\ X^D X X^D &= X^D, \\ \exists\, k \in \mathbb{N}_0 : \quad X^{k+1} X^D &= X^k. \end{aligned}$$

Od samego Drazina [56] wiadomo, że dla macierzy skończonego stopnia określonej nad pierścieniem łącznym pseudoodwrtotność Drazina istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona[77]. Dla macierzy $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ temat pseudoodwrotności Drazina był studiowany w [32], jednak można zauważyć, że w ogólności nie jest to łatwe zagadnienie, stąd praca [C15] poświęcona jest macierzom nieskończonym górnotrójkątnym. Z pomocą dla tego zagadnienia przychodzi m.in. rozkład z twierdzenia 42, który pozwala ograniczyć rozważania do macierzy o stałej przekątnej. Oczywiście, jeśli przekątna ta składa się z elementów odwracalnych, to odpowiadający jej blok jest macierzą odwracalną, a jej odwrotna również jest pseudoodwrotnością Drazina. W przypadku macierzy trójkątnej, której główna przekątna jest zerowa, okazuje się, że posiada ona pseudoodwrotność Drazina wtedy i tylko wtedy, gdy jest nilpotentna. Ostatecznie, dla macierzy trójkątnych $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spełnione jest:

Twierdzenie 74. *([C15], Thm.1) Niech F będzie ciałem. Macierz $X \in \mathcal{T}_\infty(F)$ posiada pseudoodwrotność Drazina wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że jeśli $x_{nn} = 0$ dla pewnego $n \geqslant 2$ oraz $i(n)$ jest minimalnym indeksem takim, że $x_{i(n)n} \neq 0$, to albo*

(a) *$(X^k)_{pn} = 0$ dla wszystkich $p \in \mathbb{N}$, $i(n) < p \leqslant n$*

albo

(b) *istnieje $p \in \mathbb{N}$, $i(n) < p \leqslant n$, takie że $(X^k)_{pn} \neq 0$, przy czym w tym przypadku $(X^{k+1})_{p,n+1} \neq 0$.*

W szczególności z powyższego wynika

Wniosek 11. *([C15], Cor.1) Jeśli F jest ciałem, natomiast $X = [x_{ij}] \in \mathcal{T}_\infty(F)$ jest macierzą taką, że $x_{nn} = 0$ dla skończenie wielu $n \in \mathbb{N}$, to X posiada pseudoodwrotność Drazina.*

Z racji rozważanych w tym rozdziale problemów, można zapytać jakie odwzorowania zachowują pseudoodwrotności Drazina, tzn. spełniają warunek

$$\phi(X^D) = (\phi(X))^D .$$

[76] Pseudoodwrotność Moore'a-Penrose'a, aczkolwiek równie interesująca, wymaga spełnienia pewnych warunków związanych z transpozycją danej macierzy, co w przypadku $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, może prowadzić do niepoprawnie zdefiniowanych iloczynów.

[77] Co ciekawe, macierz skończonego stopnia zawsze posiada jednoznacznie wyznaczoną odwrotność Moore'a-Penrose'a, natomiast macierz nieskończona, w dodatku odwracalna, może posiadać nieskończenie wiele takich odwrotności [168].

Addytywne odwzorowania o tej własności określone na $\mathcal{M}_n(F)$ (gdzie F to $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) oraz przestrzeniach składających się z ogranicznych operatorów na przestrzeni Hilberta zostały opisane w [48]. Pozostają one w związku z odwzorowaniami zachowującymi idempotenty. Podobnie jest w przypadku $\mathcal{T}_\infty(F)$ – mamy następujący wynik.

Twierdzenie 75. *([C15], Thm.2) Niech F będzie ciałem co najmniej 5-elementowym i charakterystyki różnej od 2. Jeśli $\phi\colon \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ jest odwzorowaniem liniowym zachowującym pseudoodwrotności Drazina, to ϕ jest sumą rozłączną ϕ_1 i $-\phi_2$, gdzie ϕ_1, ϕ_2 są opisane w twierdzeniu 55.*

Praca [C14] poświęcona jest odwzorowaniom określonym na $\mathcal{T}_n(F)$, które zachowują zerowe iloczyny macierzy. Dokładniej, mówimy, że ϕ określone na pewnym pierścieniu R *zachowuje obustronnie zerowe iloczyny*[78], jeśli

$$\forall X, Y \in R \quad XY = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi(X)\phi(Y) = 0. \tag{25}$$

Badania takich odwzorowań[79] zainicjował Wong [196, 197] i problem ten doczekał się różnorakich modyfikacji[80]. Świetnym narzędziem do badania takich odwzorowań są grafy dzielników zera danego pierścienia wprowadzone przez Becka [15], a ich własności w pierścieniach $\mathcal{M}_n(R)$, $\mathcal{T}_n(R)$ zostały zbadane odpowiednio w [25] i [112]. Automorfizmy tych grafów zostały wskazane w [189]. Idee tej pracy stały się motywacją do powstania artykułu [C14]. Odwzorowania spełniające (25) na $\mathcal{T}_n(F)$ podobnie jak w omówionych powyżej przypadkach innych odwzorowań również są złożeniami pewnych standardowych funkcji. Oprócz tych, które wprowadzono wcześniej, mamy tu jeszcze jeden szczególny automorfizm[81].

Definicja 18. Niech $X \in \mathcal{T}_n(F)$ oraz niech

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N}_{\mathcal{T}_n(F)}(x) &= \{y \in \mathcal{T}_n(F) :\; xy = 0\},\\ \overleftarrow{N}_{\mathcal{T}_n(F)}(x) &= \{y \in \mathcal{T}_n(F) :\; yx = 0\}.\end{aligned}$$

Jeśli dla macierzy X, Y zachodzą równości $\overrightarrow{N}_{\mathcal{T}_n(F)}(X) = \overrightarrow{N}_{\mathcal{T}_n(F)}(Y)$ i $\overleftarrow{N}_{\mathcal{T}_n(F)}(X) = \overleftarrow{N}_{\mathcal{T}_n(F)}(Y)$, to mówimy, że X, Y są *macierzami bliźniaczymi*.

Definicja 19. Jeśli $\rho\colon \mathcal{T}_n(F) \to \mathcal{T}_n(F)$ jest takie, że $\rho(X) = Y$ implikuje, że X, Y są macierzami bliźniaczymi, to mówimy, że ρ jest *regularnym automorfizmem* $\mathcal{T}_n(F)$.

Zgodnie z powyższymi oznaczeniami mamy:

Twierdzenie 76. *([C14], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Bijekcja ϕ : $\mathcal{T}_n(F) \to \mathcal{T}_n(F)$ spełnia (25) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą poniższe warunki.*

(a) *Istnieją macierz $T \in T_n(F)$, automorfizm σ ciała F, oraz regularny automorfizm ρ pierścienia $\mathcal{T}_n(F)$ takie, że dla każdego $X \in \mathcal{T}_n(F) \setminus T_n(F)$:*

$$\phi(X) = \mathcal{I}nn_T \cdot \overline{\sigma} \cdot \rho(X).$$

[78] W oryginale *preserves zero products in both directions*.

[79] A w zasadzie odwzorowań spełniających warunek $XY = 0 \;\Rightarrow\; \phi(X)\phi(Y) = 0$.

[80] Np. odwzorowań zachowujących własność nilpotentności czy zerowego kwadratu.

[81] Dla uściślenia – słowo automorfizm odnosi się do odpowiedniego grafu, a nie do pierścienia macierzowego.

(b) *Odwzorowanie ϕ ograniczone do $T_n(F)$ jest dowolną bijekcją.*

Opis cyklu prac [D1]-[D7]

Prace [D1-D7] poświęcone są różnorakim własnościom macierzy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, głównie trójkątnych.

Artykuł [D1] zawiera pewne warunki wystarczające do bycia prawym dzielnikiem zera pierścienia $\mathcal{T}_\infty(F)$. Lewymi dzielnikami zera są te macierze z $\mathcal{T}_\infty(F)$, które zawierają co najmniej jedno zero na głównej przekątnej [176], jednak okazuje się, że dla prawych dzielników zera nie jest to warunek wystarczający. Pewien warunek związany z liniową niezależnością podany jest w [81]. W [D1] opis prawych dzielników zera $\mathcal{T}_\infty(F)$ wykorzystuje kolejne przekątne.

Twierdzenie 77. *([D1], Thm.1) Niech F będzie ciałem oraz niech $X \in \mathcal{T}_\infty(F)$. Załóżmy, że $k \in \mathbb{N}$ jest najmniejszą liczbą taką, że k-ta przekątna X zawiera pewne elementy niezerowe.*

(a) *Jeśli $k \geqslant 1$ i k-ta przekątna nie zawiera żadnego zera, to X nie jest prawym dzielnikiem zera.*

(b) *Jeśli k-ta przekątna X zawiera skończoną, dodatnią liczbę elementów zerowych, to X jest prawym dzielnikiem zera.*

Prace [D2-D4] dotyczą przedstawiania macierzy nieskończonych w postaci sum macierzy o zerowych kwadratach. Macierz skończonego stopnia jest sumą macierzy o zerowych kwadratach wtedy i tylko wtedy, gdy jej ślad jest równy 0 [190]. Kryterium to nie przenosi się na przypadek nieskończony – w szczególności jeszcze wcześniej [57] było wiadomo, że każdy ograniczony operator liniowy na nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta jest sumą co najwyżej 64 operatorów o zerowym kwadracie. W przypadku macierzy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ założenia również okazują się zbędne, jednak wynik można nieco poprawić. Dokładniej, mamy:

Twierdzenie 78. *([D2], Prop.2.3, Prop.2.5) Dla dowolnego ciała F i dowolnej macierzy $T \in \mathcal{N}T_\infty(F)$, T jest sumą co najwyżej dwóch macierzy o zerowych kwadratach.*
Dla dowolnego ciała F i dowolnej macierzy ściśle dolnotrójkątnej $L \in \mathcal{M}_{Cf}(F)$, L jest sumą co najwyżej czterech macierzy o zerowych kwadratach.

Łącząc powyższe twierdzenie z rozkładem pewnej macierzy trójdiagonalnej[82] na sumę czterech macierzy o zerowych kwadratach, w [D4] otrzymano ostatecznie

Twierdzenie 79. *([D4], Thm.1.1) Niech F będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Każda macierz z $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ jest sumą co najwyżej dziesięciu macierzy o zerowych kwadratach.*

Praca [D5] dotyczy podobnego rozkładu jak ten z [D2-D4], jednak [D5] elementy występujące w rozkładzie są idempotentne. Z klasycznej już pracy [174] wiadomo, że każdy operator ograniczony określony na nieskończenie wymiarowej, ośrodkowej przestrzeni Hilberta jest sumą co najwyżej ośmiu idempotentów, chociaż należy dodać, że nieco później udowodniono, że wystarczą cztery [140]. Sumom[83] macierzy idempotentnych poświęcony jest artykuł [69] –

[82]Czyli macierzy, której wszystkie elementy niezerowe znajdują się na pewnych trzech ustalonych przekątnych.
[83]Ale też różnicom i kombinacjom liniowym.

w szczególności udowodnione jest w nim kryterium rozstrzygające kiedy macierz może być przedstawiona jako suma macierzy idempotentnych. Dokładniej,macierz $M \in \mathcal{M}_n(F)$, gdzie F jest ciałem charakterystyki 0, jest sumą idempotentów wtedy i tylko wtedy, gdy jej ślad jest równy $k = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, większego od rzędu M. W przypadku ciał charakterystyki dodatniej warunkiem koniecznym jest aby ślad M należał do ciała prostego zawartego w F [163]. W przypadku macierzy nieskończonego stopnia podobne założenia nie są potrzebne. Dokładniej, spełnione jest

Twierdzenie 80. *([D5], Thm.1.3) Niech F będzie ciałem. Dowolna macierz $\mathcal{M}_{Cf}(F)$ może być przedstawiona w postaci sumy co najwyżej 14 idempotentów.*

Artykuł [D6] poświęcony jest macierzom trójkątnym i ich własnościom, które są związane z przemiennością. Frobenius [59] udowodnił, że macierze A, B są przemiene wtedy i tylko wtedy, gdy można uporządkować ich wartości własne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ tak, by wartościami własnymi iloczynu AB były $\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n$. Inne kryterium, odnoszące się do postaci Jordana, można znaleźć w rozdziale 12.4 pracy [107]. W dowolnej algebrze macierzowej $\mathcal{A}$ można wprowadzić następujący praporządek:

$$X \preceq Y \quad \overset{def.}{\Leftrightarrow} \quad C(X) \subseteq C(Y),$$

gdzie $C(X)$ oznacza centralizator elementu X. Oczywiście w $\mathcal{A}$ względem $\preceq$ mogą istnieć pewne elementy maksymalne i/lub minimalne. Dla pełnej algebry macierzy $\mathcal{M}_n(F)$ zostały one opisane dokładnie w [55][84]. Mianowicie, macierze maksymalne należą do jednej z pewnych trzech klas. Okazuje się, że przypadek macierzy trójkątnych jest dość podobny.

Twierdzenie 81. *([D6], Thm.1,2) Niech F będzie dowolnym ciałem.*

(a) *Macierz $T \in \mathcal{T}_n(F)$, $n \geqslant 3$ jest maksymalna względem praporządku $\preceq$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $\alpha I_n + \beta B$, gdzie*

i. *B jest sprzężona z e_{ij} dla pewnych i, j, $i < j$,*

lub

ii. *B jest idempotentem różnym od 0 i I_n.*

(b) *Macierz $T \in \mathcal{T}_\infty(F)$ jest maksymalna względem praporządku $\preceq$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $\alpha I_\infty + \beta B$, gdzie*

i. *B jest sprzężona z e_{ij} dla pewnych i, j, $i \leqslant j$,*

lub

ii. *B jest idempotentem różnym od 0 i I_n.*

W przypadku macierzy skończonego stopnia macierze minimalne to te, których wielomiany charakterystyczny i minimalny pokrywają się. Dla stopnia nieskończonego otrzymane kryterium wykorzystuje wprowadzone wcześniej pojęcie uogólnionej sumy prostej.

Twierdzenie 82. *([D6], Thm.3,4) Niech F będzie dowolnym ciałem. Macierz $A = \oplus_{n \in I}(A_n)_{I_n}$ należąca do $\mathcal{T}_n(F)$ lub $\mathcal{T}_\infty(F)$, $n \geqslant 3$, jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy*

[84] Chociaż należy dodać, że niebagatelnym przyczynkiem do [55] była wymieniona tu już wcześniej praca [165].

(a) *każda z macierzy* A_n *jest minimalna w* $\mathcal{T}_{|I_n|}(F)$

i

(b) *dla każdego* $n \in I$ *mamy* $|\{a_{nn} \colon n \in I_n\}| = \min(|I|, |F|)$.

Praca [D7] nawiązuje do odwrotności, jednak nie macierzy trójkątnych, a pewnego ich uogólnienia – macierzy Hessenberga.

Definicja 20. Niech $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$. Mówimy, że $H = [h_{ij}] \in \mathcal{M}_n(F)$ jest (dolną) macierzą k-Hessenberga, jeśli $h_{ij} = 0$ dla wszystkich indeksów $i, j \in \mathbb{N}$ takich, że $j - i > k$.

Jeśli $k = 1$, to mówimy krótko, że H jest macierzą Hessenberga.

Asplund [6] jako pierwszy badał odwrotności macierzy k-Hessenberga i, w szczególności udowodnił, że dla $k = 1$ odwrotności te są sumami macierzy rzędu 1 oraz macierzy ściśle dolnotrójkątnych. Dla $k > 1$ spełnione jest podobne twierdzenie, tyle, że w tym przypadku są to sumy macierzy ściśle dolnotrójkątnych i macierzy rzędu k, które dają się zgrabnie zapisać w postaci iloczynów macierzy rozmiaru odpowiednio[85] $n \times k$ oraz $k \times n$ [144]. Pomimo istnienia wspomnianych tu wzorów na H^{-1}, w ogólnym przypadku wyznaczenie zwartej formuły na konkretne elementy jest dość kłopotliwe i bardzo często nakłada się na H pewne dodatkowe założenia – w [D7] rozpatrywane są macierze 1-Hessenberga, które równocześnie są macierzami Toeplitza, tzn. mają postać:

$$H = H_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & & & & \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & & a_1 & a_0 \end{bmatrix}_{n \times n}. \tag{26}$$

Wykorzystując, między innymi pracę [185], w [D7] udowodnione zostało

Twierdzenie 83. *([D7], Thm.1.1) Niech* H *będzie macierzą postaci* (26)*, gdzie* $a_{-1} \neq 0$. *Wówczas* H *jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\gamma = a_{n-2} - a_{n-1} - \sum_{i=2}^{n-1} a_{n-i-1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{j-1} b_{i-j-1} \right) \neq 0.$$

W tym przypadku

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{A} & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\gamma} x_H y_H^T,$$

gdzie

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{cases} b_{i-j} & \text{dla } i \geq j \\ 0 & \text{dla } i < j, \end{cases} \qquad \text{gdzie } b_0 = 1, \quad b_k = -\frac{1}{a_{-1}} \sum_{r=0}^{k-1} a_r b_{k-r-1} \text{ dla } k \geq 1,$$

[85]Klarowny opis wymienionych tu macierzy znajduje się w [185] (i nie tylko).

$$(x_H)_i = \begin{cases} 1 & \textit{dla} \quad i = 1, \\ -\sum_{j=1}^{i-1} a_{j-1} b_{i-j-1} & \textit{dla} \quad 1 < i \leq n, \end{cases}$$

$$(y_H)_i = (x_H)_{n+1-i} = \begin{cases} -\sum_{j=i}^{n-1} a_{n-j-1} b_{j-1} & \textit{dla} \quad 1 \leq i < n, \\ 1 & \textit{dla} \quad i = n. \end{cases}$$

Ponadto, z połączenia wzoru z pracy [1] na elementy H^{-1}, który wykorzystuje minory H oraz twierdzenie 83, wynika poniższy zwarty wzór na wyznacznik macierzy Hessenberga:

Twierdzenie 84. *([D7], Thm.3.1) Niech $H = H_n$ będzie zdefiniowana jak w* (26) *oraz niech $a_{-1} \neq 0$. Wtedy*

$$\det(H_n) = (-a_{-1})^{n-1} \cdot \left\{ b_{n-1} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n-2} a_{j-1} b_{n-j-2} \right)^2}{a_{n-2} - a_{n-1} - \sum_{i=2}^{n-1} a_{n-i-1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{j-1} b_{i-j-1} \right)} \right\}^{-1}.$$

Macierze Toeplitza pojawiają się również w [D9], chociaż tu są one dolnotrójkątne i nieskończonego stopnia, tzn.

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Powszechnie znany jest fakt, iż jeśli $a_0 \neq 0$, to macierz odwrotna do A istnieje i również jest dolnotrójkątną macierzą Toeplitza. Asymptotyczne zachowanie elementów A^{-1} jest obiektem zainteresowania wielu autorów[86] zwłaszcza zagadnienie, kiedy elementy te są asymptotycznie zbieżne (lub nie są) do 0. Można tu wyróżnić trzy podstawowe rodzaje zachowań[87]:

(a) *szybki zanik* elementów – gdy $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$,

(b) *powolny zanik* elementów – gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, jednak $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$,

(c) *zastój* elementów – gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = \tilde{a}$ dla pewnego $\tilde{a} \neq 0$.

[86] Prawdopodobnie najlepszą pracą w tym temacie jest książka [23].
[87] W oryginale są to *fast decay*, *slow decay* i *stagnation*.

Jaffard [87] udowodnił, że jeśli A^{-1} reprezentuje operator ograniczony, to elementy A^{-1} oraz A charakteryzują się tym samym zanikiem jak w punktach (a)-(c), jednak dla operatorów nieograniczonych analogiczny wynik nie jest spełniony. W [D9] wykorzystując interpretację macierzy (27) w postaci szeregów oraz twierdzenie Rouché'go[88] otrzymano poniższe kryterium.

Twierdzenie 85. *([D9], Thm.1.1) Niech A będzie macierzą postaci* (27)*. Załóżmy, że $a_k = 0$ dla $k > n$ i $a_0 = 1$. Jeśli $\sum_{r=1}^{n} |a_r| < 1$, to elementy A^{-1} charakteryzuje szybki zanik.*

Dodatkową korzyścią jest oszacowanie normy A^{-1}:

Twierdzenie 86. *([D9], Thm.1.2) Niech A będzie macierzą postaci* (27)*. Załóżmy, że $a_k = 0$ dla $k > n$ i $a_0 = 1$. Jeśli*

$$q := \max_{\substack{1 \leqslant k < l \leqslant n \\ a_k \neq 0}} \left| \frac{a_l}{a_k} \right|^{\frac{1}{l-k}} < 1,$$

to dla wszystkich $\gamma \neq 1$ spełniających

$$q > |a_1| \frac{1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^n} \right) \quad \textit{oraz} \quad \gamma q < 1$$

mamy

$$||A^{-1}|| \leqslant \left(\frac{1}{1 - \gamma q} \right)^n .$$

Motywacją do powstania pracy [D8] był artykuł Simona [167] napisany z okazji urodzin P. Exnera[89] dotyczący pewnej wariacji twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Niech I_∞ (wyjątkowo) oznacza macierz jednostkową $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tzn.

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} e_{ii} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 1 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

natomiast S macierz:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} e_{i+1,i} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Definicja 21. Jeżeli macierz jest wielomianem zmiennych S i S^{-1}, to mówimy, że jest ona macierzą Laurenta[90].

[88] Stwierdzające, że jeśli dwie funkcje f, g, holomorficzne w obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$, spełniają nierówność $|g(z)| < |f(z)|$ dla dowolnego z należącego do konturu C leżącego w obszarze Ω, to f oraz $f + g$ mają tę samą liczbę zer wewnątrz C [154].

[89] Który z kolei jest wybitnym specjalistą fizyki kwantowej.

[90] A zatem macierz Laurenta to binieskończony odpowiednik macierzy Toeplitza

Nietrudno jest zauważyć, że dla macierzy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nie można sformułować odpowiednika twierdzenia Cayleya-Hamiltona w ten sam sposób jak dla macierzy skończonego stopnia. W [167] pojawia się zatem nieco inny problem:

> Jeśli macierz K ma skończoną liczbę niezerowych przekątnych (ale nie jest trójdiagonalna) i jej przekątne są okresowe, to czy istnieje wielomian Q taki, że $Q(K)$ jest macierzą Laurenta?

Wykorzystując teorię operatorów Simon sugeruje w [167], że nie, jednak nie podaje konkretnego przykładu. Okazuje się, że bardziej bezpośrednie spojrzenie na elementy macierzy K może dać konkretną odpowiedź. Wiele kontrprzykładów można podać przez wzgląd na skrajne przekątne:

Twierdzenie 87. *([D8], Thm.1.1) Niech $A = \sum_{k=r^s} S^k U_k$ będzie macierzą $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, której przekątne są okresowe, o okresie m, $m \geqslant 2$.*[91]

(a) *Jeśli $m|r$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniony jest warunek $(U_r)_{ii}^n \neq (U_r)_{jj}^n$ dla pewnych i, j, to nie istnieje wielomian Q taki, że $Q(A)$ jest macierzą Laurenta.*

(b) *Jeśli $m|s$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniony jest warunek $(U_s)_{ii}^n \neq (U_s)_{jj}^n$ dla pewnych i, j, to nie istnieje wielomian Q taki, że $Q(A)$ jest macierzą Laurenta.*

Warto dodać, że założenie by macierz K nie była macierzą trójdiagonalną pojawiające się w przytoczonym powyżej problemie z pracy [167] może być uzasadnione chociażby przez następujący fakt.

Twierdzenie 88. *([D8], Prop.4.3) Jeśli $A = \sum_{k=-1}^{1} S^k U_k$, której wszystkie niezerowe przekątne są okresowe o okresie podstawowym równym 2, to $A^2 - ((U_0)_{00} + (U_0)_{11})A$ jest macierzą Laurenta.*

Opis cyklu prac [E1]-[E4]

Artykuły [E1-E4] poświęcone są różnym zagadnieniom związanym z grupą Riordana.

Praca [E4] porusza temat postaci Jordana macierzy Riordana. W [126] badane są postaci Jordana podmacierzy macierzy Riordana, ale wyłącznie skończonego stopnia. Oczywiście, z twierdzenia 44 wynika, że każda macierz Riordana jest podobna w $\mathcal{M}_{Rf}(F)$ do pewnej uogólnionej macierzy Jordana J, jednak z twierdzenia nie można wywnioskować czy J jest macierzą Riordana ani, tym bardziej, czy macierz przejścia jest macierzą Riordana. Odpowiedzi na te pytania zawarte są w [E4]. Klasa postaci Jordana, które jednocześnie są macierzami Riordana jest dość wąska – jest to spowodowane specyficzną postacią głównej przekątnej.

Twierdzenie 89. *([E4], Thm.1) Jedynymi postaciami Jordana z $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ są:*

(a) *macierze diagonalne postaci $[\alpha \cdot \beta^n \cdot \delta_{n\,k}]_{n\,k} = (\alpha, \beta t)$, gdzie $\delta_{n\,k}$ to symbol Kroneckera,*

(b) *klatki Jordana $(\alpha + t, t)$.*

[91] Nie zakładamy tu, że jest to okres podstawowy, a najzwyczajniej najmniejsza wspólna wielokrotność okresów podstawowych charakteryzujących każdą z przekątnych.

Okazuje się, że nawet jeżeli macierz Riordana posiada postać Jordana w $\mathcal{R}(\mathbb{C})$, to sama macierz przejścia niekoniecznie jest z $\mathcal{R}(\mathbb{C})$.

Przykład 5. ([E4], Ex.4) Można sprawdzić, że

$$R = (1+t, t-2t^2) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & -2 & -3 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

w grupie macierzy dolnotrójkątnych jest podobna do $J_\infty(1) = (1+t, t)$, jednak próba rozwiązania równania

$$Y^{-1}RY = J_\infty(1) \quad \Leftrightarrow \quad \left(1+t, t-2t^2\right) * (d(t), h(t)) = (d(t), h(t)) * (1+t, t)$$

prowadzi do sprzeczności, zatem macierz przejścia nie jest macierzą Riordana.

Opis macierzy przejścia należących do $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ podaje poniższe

Twierdzenie 90. *([E4], Thm.2) Macierz Riordana $R = (d(t), h(t))$ posiada macierz przejścia również będącą macierzą Riordana wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednej z trzech poniższych postaci.*

(a) *$R = d_0 \cdot \tilde{R}$, gdzie $\tilde{R}$ ma skończony rząd w $\mathcal{R}(\mathbb{C})$, $d_0 \in \mathbb{C}$.*
(b) *h_0 nie jest pierwiastkiem[92] z 1.*
(c) *$R = (d(t), t)$, gdzie $d_1 \neq 0$.*

Macierze z pierwszego opisanego przypadku mają okresowe przekątne, a ich postaci Jordana są diagonalne, w drugim przypadku – główne przekątne składają się z parami różnych elementów i ich postaci Jordana sa diagonalne, natomiast w trzecim – macierze Jordana są macierzami Toeplitza o pierwszej niezerowej przekątnej i ich postać Jordana to $J_\infty(d_0)$.

Praca [E2] i jej korekta [E3] dotyczą innego tematu – całkowitej dodatniości[93], który, chociaż dla przypadku pełnej algebry macierzowej był badany już od dawna, to dla przypadku grupy Riordana w ciągu ostatnich kilku lat zyskał na popularności.

Definicja 22. Mówimy, że macierz $M \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ jest całkowicie dodatnia, jeśli wszystkie jej minory dowolnych stopni są nieujemne[94].

W szczególności macierz Toeplitza, która zarazem jest macierzą Riordana:

$$[a_{n-k}] = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

[92]Tzn. dla żadnego $n \in \mathbb{N}$ nie mamy $h_0^n = 1$.
[93]Oryginalnie: *total positivity.*
[94]W rzeczywistości niektórzy autorzy wymagają, aby minory były dodatnie. Aby nieco uprościć nazewnictwo dla rozpatrywanego tu – trójkątnego przypadku pozostanę przy nieujemności.

jest całkowicie dodatnia wtedy i tylko wtedy [2], gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ jest postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \delta \cdot t^m \cdot e^{\gamma t} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{\infty}(1+\alpha_i t)}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-\beta_i t)} \quad \text{dla pewnych } \gamma, \alpha_i, \beta_i \geqslant 0,\ \delta > 0,\ m \in \mathbb{N}_0.$$

W tym przypadku ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nazywany jest *ciągiem częstotliwości Pólyi*[95]. W [33] autorzy wskazali pewien warunek wystarczający do posiadania własności całkowitej dodatniości przez macierz Riordana wykorzystujący inną charakteryzację macierzy Riordana – za pomocą ciągów $A = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ oraz $Z = (z_n)_{n=0}^{\infty}$, które definiują macierz Riordana $R = [r_{nm}]$ za pomocą zależności [127]:

$$\begin{aligned} r_{n+1\, m+1} &= a_0 r_{n\, m} + a_1 r_{n\, m+1} + a_2 r_{n\, m+2} + \cdots \\ r_{n+1\, 0} &= z_0 r_{n\, 0} + z_1 r_{n\, 1} + z_2 r_{n\, 2} + \cdots . \end{aligned} \tag{28}$$

Macierz

$$J(R) = \begin{bmatrix} z_0 & a_0 & & & & \\ z_1 & a_1 & a_0 & & & \\ z_2 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ z_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

nazywana jest *macierzą produkcji* macierzy Riordana R określonej jak w (28) [51]. W [33] pokazano, że jeśli $J(R)$ jest całkowicie dodatnia, to R również.

Artykuł [34] zawiera nieco inny warunek wystarczający. Mianowicie, jeśli $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ są ciągami częstotliwości Pólyi, to $(d(t), h(t))$ jest całkowicie dodatnia. Niedawno okazało się, że pewne powiązanie ze sobą tych dwóch warunków również pozwala otrzymać warunek konieczny na to, aby macierz Riordana była całkowicie dodatnia [119].

Motywacją [E2] była praca [34], a dokładniej naturalne pytanie, które się nasuwa przy sformułowaniu warunku wystarczającego – czy jest on również warunkiem koniecznym, a zatem:

(a) Czy jeśli $(d(t), h(t))$ jest całkowicie dodatnia, to czy $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ musi być ciągiem częstotliwości Pólyi?

(b) Czy jeśli $(d(t), h(t))$ jest całkowicie dodatnia, to czy $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ musi być ciągiem częstotliwości Pólyi?

(c) Czy jeśli $(d(t), h(t))$ jest całkowicie dodatnia, to czy $(d_n)_{n=0}^{\infty}$, $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ muszą być ciągami częstotliwości Pólyi?

Okazuje się, że odpowiedź na każde z tych trzech pytań jest negatywna, a kontrprzykłady najłatwiej sformułować przy pomocy ciągów A i Z.

Twierdzenie 91. *([E2,E3], Thm.1.1) Załóżmy, że $R = [r_{nm}] = (d(t), h(t))$ jest macierzą Riordana wyznaczoną przez ciągi A i Z postaci: $A = (a_0, a_1, 0, 0, \ldots)$, $Z = (z_0, z_1, 0, 0, \ldots)$, gdzie $d_0, a_0 > 0$, $a_1, z_0, z_1 \geqslant 0$. Jeśli $r_{00} \geqslant 0$ i $a_1 z_0 \geqslant a_0 z_1$, to R jest całkowicie dodatnia, $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem częstotliwości Pólyi, ale $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ nie jest.*

[95] W oryginale *Pólya frequency sequence.*

Twierdzenie 92. *([E2], Thm.1.2) Załóżmy, że $R = [r_{nm}] = (d(t), h(t))$ jest macierzą Riordana wyznaczoną przez ciągi A i Z postaci: $A = (a_0, a_1, a_2, 0, 0, \ldots)$, $Z = (z_0, 0, 0, \ldots)$, gdzie $d_0, a_0 > 0$, $a_1, a_2, z_0 \geqslant 0$. Jeśli $a_1^2 \geqslant 4a_0a_2$, to R jest całkowicie dodatnia, $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem częstotliwości Pólyi, ale $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ nie jest.*

Twierdzenie 93. *([E2,E3], Thm.2.2) Załóżmy, że $R = [r_{nm}] = (d(t), h(t))$ jest macierzą Riordana wyznaczoną przez ciągi A i Z postaci: $A = (a_0, a_1, a_2, 0, 0, \ldots)$, $Z = (z_0, z_1, 0, \ldots)$, gdzie $d_0, a_0, a_2, z_1 > 0$, $a_1, z_0 \geqslant 0$. Wówczas żaden spośród ciągów $(d_n)_{n=0}^{\infty}$, $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ nie jest ciągiem częstotliwości Pólyi wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Delta := 4z_1^2a_1^2 - 12z_1^2a_0a_2 - 12z_0z_1a_2 > 0$$
$$\wedge$$
$$z_1a_2\left(\tfrac{\sqrt{\Delta}-2z_1a_1}{6z_1a_2}\right)^3 + z_1a_1\left(\tfrac{\sqrt{\Delta}-2z_1a_1}{6z_1a_2}\right)^2 + (z_1a_0+z_0)\tfrac{\sqrt{\Delta}-2z_1a_1}{6z_1a_2} > 1,$$

lub

$$\Delta < 0.$$

Notka [E1] zawiera propozycję uogólnienia macierzy Riordana do macierzy wyższego "wymiaru". Naśladując [172] mnożenie "trójwymiarowych" macierzy $A = [a_{nmk}]$, $B = [b_{nmk}]$ definiujemy następująco:

$$[AB]_{nmk} = \sum_i a_{nik}b_{imk}. \tag{29}$$

Ustaliwszy dowolnie $k \in \mathbb{N}$ macierz $[A_{nmk}]_{nm}$ nazywamy k-tą warstwą trójwymiarowej macierzy A.

Niech $\mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$ oznacza zbiór trójek postaci $\left(d(t), h(t), \tilde{h}(t)\right)$, gdzie d, h, $\tilde{h}$ są formalnymi szeregami potęgowymi nad $\mathbb{C}$ postaci $d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_nt^n$, $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_nt^n$, $\tilde{h}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{h}_nt^n$. Trójki z $\mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$ mnożymy zgodnie z zasadą:

$$\left(d_1(t), h_1(t), \tilde{h}_1(t)\right) * \left(d_2(t), h_2(t), \tilde{h}_2(t)\right) = \left(d_1(t)\cdot d_2(h_1(t)), h_2(h_1(t)), \tilde{h}_1(t)\cdot \tilde{h}_2(h_1(t))\right),$$

aby po utożsamieniu z trójwymiarowymi macierzami $R = [r_{nmk}]$:

$$r_{nmk} = [t^n]d(t)\cdot h^m(t)\cdot \tilde{h}^k(t),$$

zgadzało się ono z mnożeniem (29). Cheon i Jin [35] udowodnili, że $\mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$ jest rozszerzeniem grupy $\mathcal{R}$ przez grupę szeregów formalnych potęgowych o wyrazie wolnym równym 0 z działaniem składania. W [E1] wskazana jest możliwość reprezentacji macierzy z $\mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$ za pomocą trzech ciągów analogiczna do (28).

Twierdzenie 94. *([E1], Thm.1.1) Każda macierz z $\mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$ jest scharakteryzowana przez ciągi A, Z, H:*

$$\begin{aligned} r_{n00} &= z_0r_{n-1,0,0} + z_1r_{n-1,1,0} + z_2r_{n-1,2,0} + \cdots \\ r_{nk0} &= a_0r_{n-1,k+1,0} + a_1r_{n-1,k+2,0} + a_2r_{n-1,k+3,0} + \cdots \\ r_{nkm} &= h_0r_{n,k,m-1} + h_1r_{n-1,k,m-1} + h_2r_{n-2,k,m-1} + \cdots . \end{aligned} \tag{30}$$

Ponadto

$$f(z) = z\cdot A(f(z)), \quad g(z) = \frac{g_0}{1 - z\cdot Z(f(z))}, \quad H(z) = h(z).$$

Korzystając z klasycznego faktu [145] o całkowitej dodatniości iloczynu macierzy całkowicie dodatnich można również otrzymać:

Wniosek 12. *([E1], Cor.2.4) Jeśli* $(d(t), h(t))$, $\left(\tilde{h}(t), t\right) \in \mathcal{R}$ *są całkowicie dodatnie, to każda warstwa* $\left(d(t), h(t), \tilde{h}(t)\right) \in \mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$ *jest całkowicie dodatnia.*

Z kolei [33] implikuje:

Wniosek 13. *([E1], Cor.2.5) Jeśli macierz produkcji* $J\left((d(t), h(t))\right)$ *jest całkowicie dodatnia oraz* $H = (h_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest ciągiem częstotliwości Pólyi, to każda warstwa* $\left(d(t), h(t), \tilde{h}(t)\right) \in \mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$ *reprezentowanej przez ciągi* A, Z, H *jak w* (30)*, jest całkowicie dodatnia.*

Opis cyklu prac [F1]-[F3]

Książki [F1-F3] to pozycje dydaktyczne powstałe dzięki pracy wielu autorów przeznaczone dla ambitnych studentów (i nie tylko studentów).

Podręcznik [F2] poświęcony szeregom liczbowym rozpoczyna bogata seria kryteriów zbieżności. Następnie omówiono zagadnienia związane z tempem zbieżności szeregów, twierdzenie Kroneckera[96] oraz pewne równoważne z nim wyniki, pewne szczególne szeregi w przestrzeniach skończenie wymiarowych, a także probem Sennotta[97]. Nie zabrakło tu również rozdziału o iloczynie Cauchy'ego, podobnie jak rozdziału dotyczącego liczb harmonicznych oraz liczb harmonicznych utworzonych z odwrotności liczb pierwszych. Ponadto [F2] zawiera zagadnienia związane z szeregami iterowanych logarytmów, a także szeregów podwójnych. Całość kończą propozycja trzech podstawowych metod wyznaczania sum szeregów oraz solidny zbiór zadań i problemów do samodzielnego rozwiązania.

Monografia [F1] dotycząca szeregów potęgowych to uzupełnienie [F2]. Rozpoczyna ją wybór klasycznych zagadnień związanych z rzeczywistymi i zespolonymi szeregami potęgowymi zawierający uczciwą porcję zadań dla "żądnych wiedzy". Następnie rozważane są szeregi związane z liczbami Catalana i współczynnikami dwumianowymi, szereg Gregory'ego, odwrotności szeregów potęgowych, twierdzenia Abela i Taubera, reguły monotoniczności dla ilorazów szeregów, tożsamość potrójnego iloczynu Jacobiego oraz funkcje hipergeometryczne. Swoje miejsce znalazły tu również ogólne szeregi Dirichleta, pewne szeregi z przestrzeni $L^p[a,b]$, $l^{\geqslant p}$, $l^{>p}$, $l^{=p}$, ale również szeregi geometryczne w algebrach unormowanych i wielokrotne szeregi potęgowe.

Monografia [F3] zawiera wybrane zagadnienia teorii mnogości. Rozpoczyna się ona solidnym wprowadzeniem elementów logiki, teorii zbiorów, relacji i odwzorowań, by następnie przejść do pewnika wyboru, lematu Kuratowskiego-Zorna, twierdzenia Cantora-Bernsteina, konstrukcji Cantora-Königa bijekcji kwadratu na odcinek, indukcji matematycznej oraz arytmetyki Peano. Oprócz tego książka zawiera przykładowe zestawy zadań na kolokwium oraz propozycje projektów przeznaczonych dla studentów do samodzielnego opracowania, często związane z

[96] Chodzi o twierdzenie dotyczące szeregu zbieżnego utworzonego z ciągu niemalejącego i ograniczonego oraz pewnej jego "sumy ważonej" utworzonej za pomocą wspomnianego szeregu.

[97] Dotyczący zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ w zależności od szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, tj. jego sum częściowych.

zagadnieniami rozważanymi w "Dodatku". W tym ostatnim zawarte zostały zagadnienia związane nieco mniej bezpośrednio z głównymi tematami poruszanymi w [F3].

Literatura

[1] J. Abderramán, V. Tomeo, *On the closed representation for the inverses of Hessenberg matrices*, J. Comput. Appl. Math. **236**(12) (2012), 2962-2970.

[2] M. Aissen, I.J. Schoenberg, A.M. Whitney, *On the generating functions of totally positive sequences I*, J. Anal. Math. **2** (1952), 93-103.

[3] M. Akkurt, E. Akkurt, G. P. Barker, *Automorphisms of structural matrix algebras*, Oper. Matrices **7**(2) (2013), 431–439.

[4] A.A. Alieva, A.E. Guterman, *Linear preservers of rank permutability*, Linear Algebra Appl. **384** (2004), 97–108.

[5] A.A. Alieva, A.E. Guterman, B. Kuzma, *Rank-permutable additive mappings*, Linear Algebra Appl. **414** (2006), 607-616.

[6] E. Asplund, *Inverses of matrices* $\{a_{ij}\}$ *which satisfy* $a_{ij} = 0$ *for* $j > i + p$, Math. Scand. **7** (1959), 57-60.

[7] C.S. Ballantine, *Products of involutory matrices. I*, Linear and Multilinear Algebra **5**(1) (1977/78), 53–62.

[8] P. Barry, *Riordan pseudo-involutions, continued fractions and Somos-4 sequences*, J. Integer Seq. **22**(6) (2019), Art. 19.6.1.

[9] P. Barry, *On the group of almost-Riordan arrays*, arXiv:1606.05077v1.

[10] P. Barry, N. Pantelidis, *On pseudo-involutions, involutions and quasi-involutions in the group of almost Riordan arrays*, J. Algebraic Combin. **54**(2) (2021), 399–423.

[11] H. Bass, *K-theory and stable algebra*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math, **22** (1964), 5–60.

[12] L.B. Beasley, *Linear transformations on matrices: the invariance of commuting pairs of matrices*, Linear and Multilinear Algebra **6** (1978), 179-183.

[13] L.B. Beasley, *Linear operators which preserve pairs on which the rank is additive*, J. Korean SIAM **2** (1998) 27–30.

[14] L. B. Beasley, T. J. Laffey, *Linear operators on matrices: the invariance of rank-k matrices*, Linear Algebra Appl. **133** (1990), 175-184.

[15] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra **116**(2) (1988), 208-226.

[16] K.I. Beidar, Y. Fong, P.-H. Lee, T.-L. Wong, *On additive maps of prime rings satisfying the Engel condition*, Comm. Algebra **25**(12) (1997), 3889-3902.

[17] M. Bernkopf, *A history of infinite matrices: a study of denumerably infinite linear systems as the first step in the history of operators defined on function spaces*, Arch. Hist. Exact Sci. **4** (1967), 308-358.

[18] J.L. Berrgren, *Finite groups in which every element is conjugate to its inverse*, Pac. J. Math. **28**(2) (1969), 289–293.

[19] A. Bier, *Verbal subroups in the group of triangular matrices over field of characteristic* 0, J. Algebra **321**(2) (2009), 483-494.

[20] A. Bier, *Commutators and powers of infinite triangular matrices*, Linear Algebra Appl. **457** (2014), 162-178.

[21] Z.I. Borevich, *On the parabolic subgroups in linear groups over a semilocal ring*, Vestnik Leningr. Univ.Mat.Meh. Astr. **13** (1976), 16–24.

[22] D.P. Bossaller, S.R. López-Permouth, *On the associativity of infinite matrix multiplication*, Am. Math. Mon. **126**(1) (2019), 41-52.

[23] A. Böttcher, S.M. Grudsky, *Toeplitz matrices, asymptotic linear algebra and functional analysis*, Text and Readings in Mathematics **18**, Hindustan Book Agency, 2000.

[24] J. Bounds, *Commuting maps over the ring of strictly upper triangular matrices*, Linear Algebra Appl. **507** (2016), 132-136.

[25] I. Božić, Z. Petrović, *Zero-divisor graphs of matrices over commutative rings*, Comm. Algebra **37**(4) (2009), 1186-1192.

[26] M. Brešar, *Centralizing mappings and derivations in prime rings*, J. Algebra **156** (1993), 385-394.

[27] R.A. Brualdi, *The Jordan canonical form: an old proof*, Amer. Math. Monthly **94**(3) (1987), 257–267.

[28] F. Brulois, G. Jennings, S. Raianu, *Does the Jordan form of a matrix have the greatest number of zeros?*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **48**(4) (2005), 359–360.

[29] C. Bu, D. Wang, *Linear maps preserving inverses of matrices over fields*, JP J. Algebra Number Theory Appl. **5** (2005), 547-559.

[30] G. Călugăreanu, *Matrices that are similar to their inverses*, Math. Gaz. **104**(559) (2020), 116–124.

[31] N.T. Cameron, A. Nkwanta, *On some (pseudo) involutions in the Riordan group*, J. Integer Seq. **8**(3) (2005), Article 05.3.7.

[32] S.I. Campbell, *The Drazin inverse of an infinite matrix*, SIAM J. Appl. Math. **31** (1976), 492-503.

[33] X. Chen, H. Liang, Y. Wang, *Total positivity of Riordan arrays*, Eur. J. Comb. **46** (2015), 68-74.

[34] X. Chen, Y. Wang, *Notes on total positivity of Riordan arrays*, Linear Algebra Appl. **569** (2019), 156-161.

[35] G.-S. Cheon, S.-T. Jin, *The group of multidimensional Riordan arrays*, Linear Algebra Appl. **524** (2017), 263-277.

[36] G.-S. Cheon, H. Kim, *Simple proofs of open problems about the structure of invloutions in the Riordan group*, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 930-940.

[37] G.-S. Cheon, H. Kim, *The elements of finite order in the Riordan group over the complex field*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), 4032-4046.

[38] G.-S. Cheon, H. Kim, L.W. Shapiro, *Riordan group involutions*, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 941-952.

[39] M. Chen, D. Wang, and H. Zhai, *Bijective maps on unit upper triangular matrices preserving commutators*, Linear Multilinear Algebra **59** (2011), 25–40.

[40] W.-S. Cheung, *Commuting maps of triangular algebras*, J. London Math. Soc. **63** (2001), 117–127.

[41] W.L. Chooi, M.H. Lim, *Linear preservers on triangular matrices*, Linear Algebra Appl. **269** (1998), 241–255.

[42] W.L. Chooi, M.H. Lim, *Additive rank-one preservers on block triangular matrix spaces*, Linear Algebra Appl. **416**(2-3) (2006), 588–607.

[43] S. P. Coelho, *The automorphism group of a structural matrix algebra*, Linear Algebra Appl. **195**(1993), 35–58.

[44] S. P. Coelho, *Automorphism groups of certain structural matrix rings*, Comm. Algebra **22**(14) (1994), 5567–5586.

[45] M.M. Cohen, *Elements of finite order in the Riordan group*, arXiv:1806.06432v2.

[46] R.G. Cooke, *Infinite matrices and sequence spaces*, Macmillan & C., Ltd. XIII, 1950.

[47] R.J. de la Cruz, *Each symplectic matrix is a product of four symplectic involutions*, Linear Algebra Appl. **466** (2015), 382–400.

[48] J. Cui, *Additive Drazin inverse preservers*, Linear Algebra Appl. **426**(2-3) (2007), 448-453.

[49] M.R. Darafsheh, *Order of elements in the groups related to the general linear group*, Finite Fields Appl. **11**(4) (2005), 738–747.

[50] M.R. Darafsheh, *The maximum element order in the groups related to the linear groups which is a multiple of the defining characteristic*, Finite Fields Appl. **14**(4) 2008, 992–1001.

[51] E. Deutsch, L. Ferrari, S. Rinaldi, *Production matrices and Riordan arrays*, Ann. Comb. **13**(1) (2009), 65-85.

[52] J. Dieudonné, *Sur une généralisation du groupe orthogonal á quatre variables*, ' Arch. Math. **1** (1949), 282–287.

[53] J. Dieudonné, *On the automorphisms of the classical groups. - With a supplement by Loo-Keng Hua*, Mem. Am. Math. Soc. **2**(VIII) (1951), VIII, 122 p.

[54] D.Ž. Djoković, *Product of two involutions*, Arch. Math. **18** (1967), 582-584.

[55] G. Dolinar, A. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak, *Extremal matrix centralizers*, Linear Algebra Appl. **438**(7) (2013), 2904-2910.

[56] M.P. Drazin, *Pseudo-inverses in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly **65** (1958), 506–514.

[57] P.A. Fillmore, *Sums of operators with square zero*, Acta Sci. Math. (Szeged) **28** (1967), 285-288.

[58] J.B.J. Fourier, *Theórie analytique de la chaleur*, Nouv. éd. Breslau. Kohner (1883).

[59] G. Frobenius, *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Borchardt J. **84** (1877), 1-63.

[60] G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch Linear Substitutionen*, Sitzungsber Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.

[61] J.D. Fulton, *Linear classes of involutions over fields of characteristic two*, Linear Algebra Appl. **6** (1973), 129-142.

[62] K. Gongopadhyay, C. Maity, *Real adjoint orbits of the unipotent subgroup*, arXiv:2204.03623v1.

[63] K.R. Goodearl, P. Menal, J. Moncasi, *Free and residually artinian regular rings*, J. Algebra **196**(2) (1993), 407-432.

[64] P.M. Gudivok, Yu.V. Kapitonova, S.S. Polyak, V.P. Rud'ko, A.I. Tsitkin, *Classes of conjugate elements of a unitriangular group*, Kibernetika (Kiev) **133**(1) 1990, 40–48; translation in: Cybernetics **26**(1) (1990), 47–57.

[65] P.M. Gudivok, V.P. Rud'ko, N.V. Yurchenko, *On Sylow p-subgroups of the general linear group over a principal ideal domain*, Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ., Ser. Mat. **6** (2001), 31-46.

[66] Y. Guo, J.C. Hou, *Minimal rank preserving additive mappings on upper triangular matrices*, J. Math. Res. Exposition **31** (2011), 951-964.

[67] W.H. Gustafson, P.R. Halmos, H. Radjavi, *Products of involutions*, Linear Algebra Appl. **13** (1976), 157-162.

[68] P.R. Halmos, S. Kakutani, *Products of symmetries*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 77-78.

[69] R.E. Hartwig, M.S. Putcha, *When is a matrix a sum of idempotents?*, Linear Multilinear Algebra **26**(4) (1990), 279-286.

[70] T.-X. He, L. Shapiro, *Palindromes and pseudo-involution multiplication*, Linear Algebra Appl. **593** (2020), 1–17.

[71] G. Heinig, *Not every matrix is similar to a Toeplitz matrix*, Linear Algebra Appl. **332/334** (2001), 519–531.

[72] E. Hellinger, O. Toeplitz, *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen*, Gött. Nachr. **1906** (1906), 351-355.

[73] E. Hellinger, O. Toeplitz, *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen*, Math. Ann. **69** (1910), 289-330.

[74] I.N. Herstein, *Noncommutative rings*, The Carus Mathematical Monographs, vol. 15, Mathematical Association of America, 1968.

[75] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung*, Gött. Nachr. **1906** (1906), 157-227.

[76] L.S. Hill, *Concerning certain linear transformation apparatus of cryptography*, Am. Math. Mon. **38**(3) (1931), 135-154.

[77] F. Hoffman, E.C. Paige, *Products of two involutions in the general linear group*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970/71), 1017–1020.

[78] W. Hołubowski, *Parabolic subgroups of Vershik-Kerov's group*, Proc. Am. Math. Soc. **130**(9) (2002), 2579-2582.

[79] W. Hołubowski, *Subgroups of unitriangular groups of infinite matrices*, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI **338** (2006), 137–154.

[80] W. Hołubowski, R. Słowik, *Parabolic subgroups of groups of column-finite infinite matrices*, Linear Algebra Appl. **437** (2012), 519-524.

[81] W. Hołubowski, M. Maciaszczyk, S. Żurek, *Note on Suškevič's problem on zero divisors*, Comm. Algebra **45**(8) (2017), 3274–3277.

[82] X. Hou, Sh. Li, Q. Zheng, *Expressing infinite matrices over rings as products of involutions*, Linear Algebra Appl. **532** (2017), 257-265.

[83] X. Hou, Sh. Li, Q. Zheng, *Corrigendum to: "Expressing infinite matrices over rings as products of involutions"*, Linear Algebra Appl. **587** (2020), 387-391.

[84] I.M. Isaacs, D.B. Karagueuzian, *Involutions and characters of upper triangular matrix groups*, Math. Comp. **74**(252) (2005), 2027–2033.

[85] Ī.D. Īvanjuta, *Sylow p-subgroups of the group $GL(q)$*, Ukrain. Mat. Zh. **32**(6) (1980), 813–818.

[86] Ī.D. Īvanjuta, *Sylow 2-subgroups of the group $GL(q)$*, Ukrain. Mat. Zh. **36**(3) (1984), 377–381.

[87] S. Jaffard, *Propriétés des matrices <<bien localisées>> prés de leur diagonale et quelques applications*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéare **7** (1990), 461–476.

[88] S. Jøndrup, *Automorphisms of upper triangular matrix rings*, Arch. Math. (Basel) **49** (1987), 497–502.

[89] S. Jøndrup, *Automorphisms and derivations of upper triangular matrix rings*, Linear Algebra Appl. **221** (1995), 205–218.

[90] E. Kasner, *Infinite groups generated by conformal transformations of period two (Involutions and Symmetries)*, Amer. J. Math. **38**(2) (1916), 177–184.

[91] K. Keremedis, A. Abian, *On the associativity and commutativity of multiplication of infinite matrices*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **19**(1) (1988), 175-182.

[92] T.P. Kezlan, *A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings*, Linear Algebra Appl. **135** (1990), 181–184.

[93] F.M. Khan, M.F. Rahman, *Infinite matrices and Cesaro sequence spaces*, Anal. Math. **23**(1) (1997), 3-11.

[94] M. Kida, *On the involutions of the Riordan group*, Funct. et Approx. Comment. Math. **54** (2016), 19-23.

[95] A. Kirillov, *Variations on the upper triangular theme*, w: Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 169, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, str. 43-73.

[96] H. von Koch, *Sur une application des déterminants infinis a la théorie des équations différentielles linéaires*, Acta Math. **15** (1891), 53-63.

[97] H. von Koch, *Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires*, Acta Math. **16** (1892), 217-295.

[98] H. von Koch, *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini et des fractions continues*, C. R. **120** (1894), 144-147.

[99] H. von Koch, *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini* (Sw.), Stockh. Akad. Bihang **22**(4) (1896), 31.

[100] H. von Koch, *Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis*, Acta Math. **24** (1900), 89-122.

[101] H. von Koch, *Sur une application des déterminants infinis a la théorie des équations fonctionnelles*, Stockh. Akad. Bihang **25**(5) (1900), 24.

[102] H. v. Koch, *Sur la convergence des déterminants infinis*, Palermo Rend. **28** (1909), 265-266.

[103] S.G. Kolesnikov, N.V. Mal'tsev, *Derivations of a matrix ring containing a subring of triangular matrices*, Russ. Math. **55**(11) (2011), 18-26.

[104] A. Kostić, Z.Z. Petrović, Z.S. Pucanović, M. Roslavcev, *On a generalized Jordan form of an infinite upper triangular matrix*, Linear Multilinear Algebra **69**(8) (2021), 1534–1542.

[105] V.M. Levchuk, *Automorphisms of certain nilpotent matrix groups and rings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **222**(6) (1975), 1279–1282.

[106] V.M. Levchuk, *Automorphisms of the group of invertible triangular matrices over a ring*, Permanents: theory and applications (Russian), 39–46, Krasnoyarsk. Politekhn.Inst., Krasnoyarsk, 1990.

[107] P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The theory of matrices. 2nd ed. with applications*,Computer Science and Applied Mathematics. Orlando etc.: Academic Press (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), 1985.

[108] J. Levine, H. M. Nahikian, *On the construction of the involutory matrices*, Amer. Math. Mon. **69**(4) (1962), 267-272.

[109] T. Leżański, *The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces*, Studia Math. **13** (1953), 244–276.

[110] C.-K. Li, S. Pierce, *Linear preserver problems*, Am. Math. Mon. **108**(7) (2001), 591-605.

[111] C.-K. Li, N.-K. Tsing, *Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques*, Linear Algebra Appl. **162-164** (1992), 217-235.

[112] A. Li, R.P. Tucci, *Zero divisor graphs of upper triangular matrix rings*, Commun. Algebra **41**(12) (2013), 4622-4636.

[113] K.-M. Liu, *Decomposition of matrices into three involutions*, Linear Algebra Appl. **111** (1988), 1-24.

[114] M. López-Pellicer, R. Bru, *Jordan basis for an infinite-dimensional space*, Portugal. Math. **43**(1) (1985/86), 153–156.

[115] A. Lúzon, M.A. Morón, L.F. Prieto-Martinez, *A formula to construct all involutions in Riordan matrix groups*, Linear Algebra Appl. **533** (2017), 397-417.

[116] A. Lúzon, M.A. Morón, L.F. Prieto-Martinez, *The group generated by Riordan involutions*, Rev. Mat. Complut. **35**(1) (2022), 199-217.

[117] A.J. Malcolm, *The involution width of finite simple groups*, J. Algebra **493** (2018), 297–340.

[118] M. Malejki, *Approximation of eigenvalues of some unbounded self-adjoint discrete Jacobi matrices by eigenvalues of finite submatrices*, Opuscula Math. **27**(1) (2007), 37–49.

[119] J. Mao, L. Mu, Y. Wang, *Yet another criterion for the total positivity of Riordan arrays*, Linear Algebra Appl. **634** (2022), 106-111.

[120] L. W. Marcoux, A. R. Sourour, *Commutativity preserving linear maps and Lie automorphisms of triangular matrix algebras*, Linear Algebra Appl. **288** (1999), 89–104.

[121] M. Marcus, B. N. Moyls, *Linear transformations on algebras of matrices*, Canad. J. Math. **11** (1959), 61-66.

[122] M. Marcus, B. N. Moyls, *Transformations on tensor product spaces*, Pacific J. Math. **9** (1959), 1215-1221.

[123] G. Matthews, *Non-associative rings of infinite matrices*, Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **60** (1957), 584-589.

[124] V.D. Mazurov, *Characterizations of finite groups by sets of orders of their elements*, Algebra Log. **36**(1) (1997), 23-32.

[125] V.D. Mazurov, *Recognition of finite groups by a set of orders of their elements*, Algebra Log. **37**(6) (1998), 371-379.

[126] D. Merlini, M. Nocentini, *Functions and Jordan canonical forms of Riordan matrices*, Linear Algebra Appl. **565** (2019), 177-207.

[127] D. Merlini, M.C. Verri, *Generating trees and proper Riordan arrays*, Discrete Math. **218**(1-3) (2000), 167-183.

[128] D. Merlini, D. G. Rogers, R. Sprungoli, M. C. Verri, *On some alternative characterizations of Riordan arrays*, Can. J. Math. **49** (1997), 301-320.

[129] L. Molnár, *Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces*, Lecture Notes in Mathematics 1895, Springer, Berlin, 2007.

[130] L. Molnár, *Bilocal* **-automorphisms of* $B(H)$, Arch. Math. (Basel) **102**(1) (2014), 83-89.

[131] L. Molnár, P. Šemrl, *Some linear preserver problems on upper triangular matrices*, Linear Multilinear Algebra **45**(2-3) (1998), 189–206.

[132] L. Molnár, P. Šemrl, A. M. Sourour, *Bilocal automorphisms*, Oper. Matrices **9**(1) (2015), 113-120.

[133] Z.S.M.H. Mursaleen, *Infinite matrices and some new sequence spaces*, Mat. Vesn. **37** (1985), 293-297.

[134] K.R. Nagarajan, M. Paul Devasahayam, T. Soundararajan, *Products of three triangular matrices over commutative rings*, Linear Algebra Appl. **348** (2002), 1-6.

[135] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer Verlag, New York, 1967.

[136] J. von Neumann, *Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen*, J. Reine Angew. Math. **161** (1929), 208-236.

[137] A. Nowicki, *Derivations of special subrings of matrix rings and regular graph*, Tsukuba J. Math. **7** (1983), 281–297.

[138] A.G. O'Farrell, *Composition of involutive power series, and reversible series*, Comput. Methods Funct. Theory **8**(1-2) (2008), 173–193.

[139] S.K. Ou, D.Y. Wang, W. Zhang, *Bijective maps preserving commutators on a solvable classical group*, Sci. China Math. **53** (2010), 1723–1730.

[140] C. Pearcy, D. Topping, *Sums of small numbers of idempotents*, Michigan Math. J. **14** (1967), 453-465.

[141] S. Pehlivan, *Infinite matrices and incomplete sequence spaces*, Turk. J. Math. **16**(2) (1992), 129-133.

[142] V.M. Petechuk, *Automorphisms of the groups SLn and GLn over certain local rings*, Math. Notes **28** (1981), 556-564.

[143] D. Phulara, L. Shapiro, *Constructing pseudo-involutions in the Riordan group*, J. Integer Seq. **20**(4) (2017), Art. 17.4.7.

[144] M.J. Piff, *Inverses of banded and k-Hessenberg matrices*, Linear Algebra Appl. **85** (1987), 9-15.

[145] A. Pinkus, *Totally positive matrices*, Cambridge Tracts in Mathematics 181, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[146] H. Poincaré, *Remarques sur l'emploi de la métode précédente*, Bul. SMF **13** (1884/85), 19-27.

[147] H. Poincaré, *Sur les detérminants d'ordre infini*, Bull. Soc. Math. Fr. **14** (1886), 77-90.

[148] S.S. Poljak, *Triangular similarity of triangular matrices*, Ukr. Math. J. **16** (1964), 539-–544.

[149] E.C. Posner, *Derivations in prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **8**(6) (1957), 56-64.

[150] D. Przeworska-Rolewicz, S. Rolewicz, *Equations in linear spaces*, Monografie Matematyczne, PWN, Warszawa, 1968.

[151] H. Radjavi, *Products of hermitian matrices and symmetries*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 369–372.

[152] H. Radjavi, *Decomposition of matrices into simple involutions*, Linear Algebra Appl. **12** (1975), 247-255.

[153] J. Riordan, *Combinatorial identities*, New York-London-Sydney, John Wiley and Sons, 1968.

[154] É, Rouché, *Mémoire sur la série de Lagrange*, Journal de l'École Polytechnique **22** (1862), 193-224.

[155] V.P. Rud'ko, N.V. Yurchenko, *Sylow p-subgroups in $GL(n, Z[\epsilon])$*, Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ. Ser. Mat. Inform. **17** (2008), 193–196.

[156] A.R. Sampson, *A note on a new matrix decomposition*, Linear Algebra Appl. **8** (1974), 459–463.

[157] E. Savas, *Sequence spaces defined by infinite matrices and statistical convergence*, Indian J. Math. **38**(1) (1996), 19-25.

[158] L. Shapiro, *Some open questions about random walks, involutions, limiting distributions, and generating functions*, Adv. Appl. Math. **27** (2001), 585-596.

[159] L. Shapiro, *A survey of the Riordan group*, `http://users.dimi.uniud.it/~giacomo.dellariccia/Table%20of%20contents/Shapiro2005.pdf`

[160] L.W. Shapiro, S. Getu, W.-J. Woan, L.C. Woodson, *The Riordan group*, Discrete Appl. Math. **34** (1991), 229-239.

[161] E. Schmidt, *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Palermo Rend. **25** (1908), 53-77.

[162] E. Schmutz, *The expected order of a random unitary matrix*, J. Group Theory **11**(4) (2008), 495-510.

[163] C. de Seguins Pazzis, *On sums of idempotent matrices over a field of positive characteristic*, Linear Algebra Appl. **433**(4) (2010), 856-866.

[164] P. Šemrl, *Hua's fundamental theorems of the geometry of matrices and related results*, Ninth Conference of the International Linear Algebra Society (Haifa, 2001), Linear Algebra Appl. **361** (2003), 161–179.

[165] P. Šemrl, *Non-linear commutativity preserving maps*, Acta Sci. Math. (Szeged) **71** (2005), 781–819.

[166] R. Sikorski, *The determinant theory in Banach spaces*, Colloq. Math. **8**(2) (1961), 141–198.

[167] B. Simon, *A Cayley-Hamilton theorem for periodic finite band matrices*, Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics, European Mathematical Society PUblishing House, Zurich, 2017, str. 525-529.

[168] K.C. Sivakumar, *Moore-Penrose inverse of an invertible infinite matrix*, Linear Multilinear Algebra **54** (2006), 71-77.

[169] R. Słowik, *The lower central series of subgroups of the Vershik–Kerov group*, Linear Algebra Appl. **436** (2012), 2299–2310.

[170] K. C. Smith, L. van Wyk, *An internal characterisation of structural matrix rings*, Comm. Algebra **22**(14) (1994), 5599–5622.

[171] W. So, *Linear operators preserving the minimal rank*, Linear Algebra Appl. **302/303** (1999), 461-468.

[172] A.M.G. Solo, *Multidimensional matrix mathematics: multidimensional matrix equality, addition, substraction and multiplication, Part 2 of 6*, Proceedings of the World Congress on Engineering 2010, vol.III (2010).

[173] Yu.V. Sosnovsky, *On the width of verbal subgroups of the group of triangular matrices over a field of arbitrary characteristic*, arXiv:1201.6513v1.

[174] J.G. Stampfli, *Sums of projections*, Duke Math. J. **31** (1964), 455-461.

[175] R. Stong, *The average order of a matrix*, J. Combin. Theory Ser. A, **64**(2) (1993), 337–343.

[176] A.K. Suškevič, *On an infinite algebra of triangular matrices*, Har 'kov. Gos. Univ. Uč. Zap. **34** (1951), 77–93.

[177] L. Sylow, *Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier*, Acta Math. **11**(1-4) (1887), 201–256.

[178] X.-M. Tang, Y.-Q. Yang, *Strong linear preservers of rank reverse permutability on triangular matrices*, Linear Algebra Appl. **414**(1) (2006), 84–96.

[179] P. Thijsse, *Upper triangular similarity of upper triangular matrices*, Linear Algebra Appl. **260** (1997), 119–149.

[180] P.H. Tiep, A.E. Zalesski, *Real conjugacy classes in algebraic groups and finite groups of Lie type*, J. Group Theory **8** (2005), 291–315.

[181] E. Tunç, T. Bilgin, *Infinite matrices and some sequence spaces*, Int. J. Pure Appl. Math. **9**(1) (2003), 51-58.

[182] H.W. Turnbull, A.C. Aitken, *An introduction to the theory of canonical matrices*, Dover Publications, Inc., New York, 1961.

[183] L. van Wyk, *Maximal left ideals in structural matrix rings*, Comm. Algebra **16**(2) (1988), 399–419.

[184] L.N. Vaserstein, E. Wheland, *Commutators and companion matrices over Rings of stable rank* 1, Linear Algebra Appl. **142** (1990), 263–277.

[185] L. Verde-Star, *Elementary triangular matrices and inverses of k-Hessenberg and triangular matrices*, Spec. Matrices **3** (2015), 250-256.

[186] P. Vermes, *Non-associative rings of infinite matrices*, Indag. Math. **14** (1952), 245-252.

[187] P. Vermes, *Multiplicative groups of row- and column-finite matrices*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvós. Sect. Math. **5** (1962), 15–23.

[188] S. Wang, *The Jordan normal form of infinite matrices*, Chinese Sci. Bull. **41**(23) (1996), 1943–1946.

[189] L. Wang, *A note on automorphisms of the zero-divisor graph of upper triangular matrices*, Linear Algebra Appl. **465** (2015), 214-220.

[190] J.H. Wang, P.Y. Wu, *Sums of square-zero operators*, Studia Math. **99**(2) (1991), 115–127.

[191] Z. Wang, H. You, *Maps on upper-triangular matrix algebras preserving k-potences*, Linear Algebra Appl. **429**(8-9) (2008), 1915–1928.

[192] W. Watkins, *Linear maps that preserve commuting pairs of matrices*, Linear Algebra Appl. **14** (1976), 29-35.

[193] A.J. Weir, *Sylow p-subgroups of the general linear group over finite fields of characteristic p*, Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955), 454-464.

[194] A.J. Weir, *Sylow p-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to p*, Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955), 529-533.

[195] M.J. Wonenburger, *Transformations which are products of two involutions*, J. Math. Mech. **16** (1966), 327-338.

[196] W.J. Wong, *Maps on simple algebras preserving zero products. I: The associative case*, Pac. J. Math. **89** (1980), 229-247.

[197] W.J. Wong, *Maps on simple algebras preserving zero products. II: Lie algebras of linear type*, Pac. J. Math. **92** (1981), 469-488.

[198] J.P. Zhang, *Arithmetical conditions on element orders and group structure*, Proc. Amer. Math. Soc. **123**(1) (1995), 39–44.

[199] X. Zhang, *Idempotence-preserving maps without the linearity and surjectivity assumptions*, Linear Algebra Appl. **387** (2004), 167–182.

[200] X. Zhang, H.Y. Chongguang, *Multiplicative group automorphisms of invertible upper triangular matrices over fields*, Acta Math. Sci. (Engl. Ed.) **20**(4) (2000), 515-521.

5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową w więcej niż jednej uczelni lub instytutcji naukowej

09.2019 – pobyt naukowy w Deparetamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Lizbona

6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzatorskich

Od dwunastu lat prowadzę zajęcia z Algebry Liniowej oraz Algebry Abstrakcyjnej dla studentów Wydziału Matematyki Stosowanej, a także Matematyki Wyższej, Analizy Matematycznej oraz Algebry Liniowej dla studentów innych wydziałów Politechniki Śląskiej. Ponadto prowadzę zajęcia w języku angielskim: z Matematyki Wyższej oraz Analizy Zespolonej. Do tej pory byłam promotorką 14 prac licencjackich z matematyki. Ponadto, jestem promotorem pomocniczym rozprawy doktorskiej mgr Michała Różańskiego.

PODPIS ZAUFANY
ROKSANA
SŁOWIK
07.11.2022 12:39:27 [GMT+1]
Dokument podpisany elektronicznie
podpisem zaufanym