UNIWERSYTET ŚLĄSKI W KATOWICACH
WYDZIAŁ NAUK ŚCISŁYCH I TECHNICZNYCH
INSTYTUT MATEMATYKI

Streszczenie w języku polskim
rozprawy doktorskiej pt.

„Uogólnienia nierówności Hadamarda oraz twierdzeń Frobeniusa i Dieudonné”

Michał Różański

Promotor: **dr hab. inż. Roman Wituła, prof. PŚ**
Promotor pomocniczy: **dr inż. Roksana Słowik**

KATOWICE 2022

Praca doktorska ma syntetyczną postać. Wyróżniono w niej dwa główne rozdziały i trzeci dodatkowy. Pierwsza rozdział związany jest z nierównościami macierzowymi, a ściślej z nierównością Hadamarda i nierównością von Neumanna. Natomiast na drugi rozdział składa się problematyka przekształceń liniowych macierzy kwadratowych, które zachowują wybrane własności macierzy. Podstawą głównych rozważań stały się klasyczne już twierdzenia znanych matematyków: Jacques'a Hadamarda, Johna von Neumanna, Ferdinanda Frobeniusa oraz Jeana Dieudonné.

Jeśli chodzi o pierwszy rozdział, to jego tematyka opiera się na nierówności Hadamarda opublikowanej w 1893 roku oraz nierówności von Neumanna o śladzie macierzy z 1937 roku. Jego problematyka została skierowana na wzmocnienie klasycznej nierówności Hadamarda do postaci zoptymalizowanej nierówności Hadamarda. Wyniki dotyczące tych wzmocnień zostały już opublikowane w artykułach [10] i [11]. Autor dysertacji jest ich głównym współautorem. Tym niemniej rezultaty tych prac przedstawione są w dysertacji w odświeżonej i rozszerzonej formie. Dodatkowo w pierwszym rozdziale przedstawiono nowy dowód nierówności von Neumanna dla śladów macierzy w przypadku ilości macierzy większej niż dwa i doprecyzowano założenia w wersji nierówności von Neumanna dla dwóch macierzy hermitowskich. Co ciekawe nierówności Hadamarda i von Neumanna mają pewien wspólny wątek. Jedna z wersji nierówności von Neumanna może być użyta do udowodnienia wzmocnionej nierówności Hadamarda przedstawionej przez znanego radzieckiego matematyka – Marka Krejna [6], co również zostało przedstawione w dysertacji. Zainteresowanie tą tematyką wciąż jest aktualne, o czym na przykład może świadczyć całkiem świeży artykuł [7] autorstwa Lina i Sinnamona z 2020 roku.

Natomiast drugi rozdział pracy zainicjowany został rozważaniami nad dwoma twierdzeniami, które zostały podane przez Ferdinanda Frobeniusa w 1897 roku i przez Jeana Dieudonné w 1949 roku. Pierwsze z nich mówi o postaci przekształcenia liniowego, które zachowuje wyznacznik macierzy, a drugie o postaci przekształcenia liniowego, które zachowuje zbiór macierzy nieosobliwych. Śmiało można powiedzieć, że zagadnienia te stanowiły podwalinę pod nową gałąź teorii macierzy, zajmującą się przekształceniami liniowymi zachowującymi pewne własności macierzy, a mianowicie rzędy macierzy, wartości własne i wartości osobliwe [9], zbiory macierzy ortogonalnych [3], unitarnych [8] i nilpotentnych [4]. Rozważania te były często prowadzone kosztem utraty dowolności struktury, nad którą opisane są macierze. Najczęściej rozważano macierze nad ciałem liczb zespolonych lub nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym. W drugim rozdziale główne rozważania poszły dwutorowo. Po pierwsze z sukcesem zajęto się zagadnieniem rozszerzenia twierdzenia Frobeniusa na dowolne ciała, a nawet na pierścienie modulo tak dla twierdzenia Frobeniusa, jak i dla twierdzenia Dieudonné. Kluczowe okazało się tutaj, czy k jest potęgą liczby pierwszej dla pierścienia modulo k. Po drugie przeprowadzono rozważania nad twierdzeniem Dieudonné dla przekształceń liniowych osobliwych. W tym temacie uzyskano uogólnienie wariantu twierdzenia Dieudonné podanego przez Bottę w artykule [2] dla ciał algebraicznie domkniętych na prawie wszystkie ciała (oprócz ciał skończonych o ilości elementów nie większej niż stopień macierzy). Końcówka drugiego rozdziału dysertacji skupia się na szczegółowych badaniach oraz uspójnieniem materiału nad postacią przekształcenia liniowego, które zachowuje rząd macierzy, równy jeden i dwa lub ewentualnie równy jeden. Okazuje się, że tutaj główną rolę odgrywa fakt, czy ciało, nad którym rozważane są macierze, jest algebraicznie domknięte. Tematyka drugiego rozdziału jest wciąż aktualna, o czym świadczą prace [1, 5, 12] z ostatniej dekady.

Trzeci rozdział dysertacji składa się z dwóch dodatków luźno związanych z tematem pracy. Pierwszy z nich opowiada o generowaniu zbiorów macierzy kwadratowych stopnia 2 nad pierścieniem liczb całkowitych oraz nad pierścieniami modulo k. Rezultat ten powstał przy okazji opracowywania drugiego rozdziału dysertacji. Drugi z dodatków związany jest z pewnymi przekształceniami macierzy zachowującymi osobliwość i nieosobliwość, rząd lub wyznacznik macierzy, co w pewien sposób dopełnia tematykę drugiego rozdziału dysertacji.

Spis literatury cytowanej w streszczeniu

[1] El Abidine Abdelali Z., *Maps preserving the spectrum of polynomial products of matrices*, J. Math. Anal. Appl. **480** (2019), Article 123392.

[2] Botta P., *Linear maps that preserve singular and nonsingular matrices*, Linear Algebra Appl. **20** (1978), 45–49.

[3] Botta P., Pierce S., *The preservers of any orthogonal group*, Pac. J. Math. **70** (1977), 37–49.

[4] Botta P., Pierce S., Watkins W., *Linear transformations that preserve the nilpotent matrices*, Pac. J. Math. **104** (1983), 39-46.

[5] Costara C., *Linear maps preserving structured singular values of matrices*, Linear Algebra Appl. **620** (2021), 76–91.

[6] Krejn M.G., *Ob odnom predpoloženii A.M. Lâpunova*, Funkcionalnyj analiz i ego priloženiâ **7** (1973), 45–54 (po rosyjsku).

[7] Lin M.-H., Sinnamon G., *Revisiting a sharpened version of Hadamard's determinant inequality*, Linear Algebra Appl. **606** (2020), 192–200.

[8] Marcus M., *All linear operators leaving the unitary group invariant*, Duke Math. J. **26** (1959), 155–163.

[9] Marcus M., Moyls B.N., *Linear transformations on algebras of matrices*, Canad. J. Math. **11** (1959), 61–66.

[10] Różański M., Wituła R., Hetmaniok E., *More subtle versions of the Hadamard inequality*, Linear Algebra Appl. **532** (2017), 500–511.

[11] Różański M., Wituła R., *Hadamard's optimized inequality*, Linear Algebra Appl. **620** (2021), 109–123.

[12] de Seguins Pazzis C., *The singular linear preservers of non-singular matrices*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 483–490.