UNIWERSYTET ŚLĄSKI W KATOWICACH
WYDZIAŁ NAUK ŚCISŁYCH I TECHNICZNYCH
INSTYTUT MATEMATYKI

ROZPRAWA DOKTORSKA

Uogólnienia nierówności Hadamarda oraz twierdzeń Frobeniusa i Dieudonné

Michał Różański

Promotor: **dr hab. inż. Roman Wituła, prof. PŚ**
Promotor pomocniczy: **dr inż. Roksana Słowik**

KATOWICE 2022

Rozprawę doktorską dedykuję:
moim promotorom za pomoc przy jej pisaniu,
moim rodzicom za ciągłe wspieranie mnie na duchu
oraz mojej córeczce Ani za to, że po prostu ze mną jest.

Wstęp

Na niniejszą dysertację składają się wyniki autora uzyskane podczas kilku lat pracy w Politechnice Śląskiej jako pracownika naukowo-dydaktycznego w Katedrze Matematyki. Chociaż zagadnienia związane z macierzami były przedmiotem zainteresowania autora od samego momentu zatrudnienia w 2016 w Politechnice Śląskiej (zob. monografię [21] oraz pracę [22] o twierdzeniu Gerszgorina i Brauera, w których opracowaniu autor aktywnie współuczestniczył), to jednak zainteresowania matematyczne autora są dość rozległe – obejmują m.in.: teorię macierzy, analizę funkcjonalną, teorię miary oraz rachunek prawdopodobieństwa.

Tematyka dysertacji mieści się w szeroko rozumianej teorii macierzy. Wyróżniono w niej dwa główne rozdziały i trzeci dodatkowy. Pierwszy rozdział związany jest z nierównościami macierzowymi, a ściślej z nierównością Hadamarda i nierównością von Neumanna. Natomiast na drugi rozdział składa się problematyka przekształceń liniowych macierzy kwadratowych, które zachowują pewne wybrane własności macierzy. Podstawą rozważań w tym rozdziale stały się klasyczne już twierdzenia uznanych matematyków: Jacques'a Hadamarda, Johna von Neumanna, Ferdinanda Frobeniusa, Jeana Dieudonné, Ky Fana oraz Henryka Minca.

Jeśli chodzi o pierwszy rozdział, to jego tematyka opiera się na nierówności francuskiego matematyka Jacques'a Salomona Hadamarda (1865–1963) opublikowanej w 1893 roku oraz nierówności o śladzie macierzy z 1937 roku autorstwa amerykańskiego matematyka i fizyka węgierskiego pochodzenia Johna von Neumanna (1903–1957). Składa się on z trzech podrozdziałów.

Problematyka pierwszego podrozdziału jest skierowana na wzmocnienie klasycznej nierówności Hadamarda. Wprowadzono tu dwa takie wzmocnienia, nazwane odpowiednio permutacyjną nierównością Hadamarda i zoptymalizowaną nierównością Hadamarda. Obydwa zostały już opublikowane odpowiednio w artykułach [47] i [48]. Autor dysertacji jest ich współautorem. Tym niemniej rezultaty tych prac będą w dysertacji przedstawione w odświeżonej i rozszerzonej formie. Warto zaznaczyć, że w pracach [53, 54] chińscy matematycy Xiaodong Zhang i Shangjun Yang[1] przedstawili odpowiednik permutacyjnej nierówności Hadamarda dla szerszych klas macierzy, tj. dla macierzy całkowicie nieujemnych oraz F-macierzy, jednak bez warunków równości. W pracy [47] niezależnie od nich udowodniono permutacyjną nierówność Hadamarda dla szczególnych postaci permutacji łącznie z pełnymi warunkami równości. Odpowiedzią na wspomniany artykuł była praca [31] Minghua Lina i Gorda Sinnamona, która co prawda przedstawia permutacyjną nierówność Hadamarda dla wszystkich nietrywialnych permutacji, ale bez pełnych warunków równości. Warunki te zostały podane dopiero w pracy [48] i dodatkowo okraszone niepublikowaną nigdzie wcześniej zoptymalizowaną nierównością Hadamarda.

[1]Praca [53] jest napisana w języku chińskim i bardzo późno przebiła się do powszechnej literatury – prawdopodobnie dopiero przy okazji recenzji pracy [31].

W drugim podrozdziale badania poszły też w stronę nierówności von Neumanna dla śladów macierzy. Dowody nierówności von Neumanna podane przez von Neumanna w artykule [44], czy też Leona Mirsky'ego w artykułach [43] i [42] nie są proste. Wykorzystywane są w nich bardziej zaawansowane narzędzia matematyczne. Dopiero o dowodzie Rolfa Dietera Grigorieffa, przedstawionym w krótkiej notce [19], można powiedzieć, że jest elementarny. Wykorzystanie idei Grigorieffa zaowocowało nowym, elementarnym dowodem dla nierówności von Neumanna w wersji dla ilości macierzy większej niż dwa. Dodajmy, iż wspomniane uogólnienie nierówności von Neumanna podane zostało pierwszy raz w artykule [14] przez Ky Fana. Ponadto udało się doprecyzować założenia w nierówności von Neumanna dla dwóch macierzy hermitowskich, która została podana z błędem w monografii [38]. Co ciekawe nierówności Hadamarda i von Neumanna mają pewien wspólny wątek. Jedna z wersji nierówności von Neumanna może być użyta do udowodnienia wzmocnionej nierówności Hadamarda przedstawionej przez radzieckiego matematyka – Marka Krejna [27], co zostało przedstawione w trzecim podrozdziale.

W drugim rozdziale pracy zajęto się zagadnieniem zachowywania przez przekształcenia liniowe wybranych własności macierzy. Śmiało można powiedzieć, że zagadnienie to stanowi dzisiaj odrębną gałąź teorii macierzy, której początków należy szukać w twierdzeniu mówiącym, iż *jeśli przekształcenie liniowe L, odwzorowujące zespolone kwadratowe macierze pewnego ustalonego stopnia w zespolone kwadratowe macierze tego samego stopnia, zachowuje wyznacznik odwzorowywanej macierzy, to istnieją nieosobliwe zespolone macierze P i Q takie że $\det(PQ) = 1$, dla których zachodzi:*

$$\forall X \colon L(X) = PXQ \qquad \text{albo} \qquad \forall X \colon L(X) = PX^TQ.$$

Twierdzenie pochodzi z pracy [16] z 1897 roku i zawdzięczamy go jednemu z klasyków algebraicznej teorii macierzy niemieckiemu matematykowi Ferdinandowi Georgowi Frobeniusowi (1849–1917). Na podobieństwo wspomnianego twierdzenia francuski matematyk Jean Dieudonné (1906–1992) w pracy [12] z 1949 roku przedstawił twierdzenie mówiące, że dla macierzy nad dowolnym ciałem nieosobliwe przekształcenia liniowe (tj. przekształcenia liniowe o trywialnym jądrze) zachowujące zbiór macierzy osobliwych mają taką samą postać jak w powyższym twierdzeniu Frobeniusa. Wydaje się, że dwa powyższe twierdzenia stały się podwaliną badań w tej tematyce. Wynikiem pracy wielu autorów (m.in.: S. Pierce'a, M.H. Lima i R. Loewy'ego) w problematyce zachowywania własności macierzy w wyniku działania przekształceń liniowych jest monografia [45].

Podkreślmy, że wspomniana monografia bynajmniej nie zakończyła badań w tym temacie. Zajmowano się nadal wieloma starymi ale i nowymi zagadnieniami na przykład postaciami przekształceń liniowych zachowujących rzędy macierzy, wartości własne i osobliwe [1, 11, 37], zbiory macierzy ortogonalnych [8], unitarnych [35] i nilpotentnych [9], czy też funkcje [36]. Często rozważania te były prowadzone kosztem utraty dowolności struktury, nad którą opisane są macierze. Najczęściej na warsztat badawczy brane były macierze nad ciałem liczb zespolonych lub nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym. Inne pomysły polegały na ograniczaniu zbioru macierzy przykładowo do zbioru macierzy symetrycznych [10] czy hermitowskich [20].

W dysertacji rozważono przede wszystkim uogólnienia wspomnianych problemów w zakresie macierzy nad pominiętymi ciałami, które nie są algebraicznie domknięte, nad ciałami skończonymi, czy nawet nad pierścieniami reszt modulo. Uogólnienia na dowolne pierścienie są celem najbliższych badań. Niektóre wyniki otrzymane przez autora dysertacji pominięto w niniejszej pracy ze względu na skomplikowanie teorii jak i dowodów jej dotyczących. Warto zaznaczyć, że pewni autorzy również zajęli się tą tematyką. Przykładowo znany amerykański matematyk o polskich korzeniach Henryk Minc w pracy [40] pokazał, że wspomniane na początku twierdzenie Frobeniusa działa także dla macierzy nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym o charakterystyce zero, natomiast amerykański matematyk Roy Westwick w artykule [51] osłabił założenia twierdzenia Minca do ciał algebraicznie domkniętych dowolnej charakterystyki. Kolejni amerykańscy matematycy Marvin Marcus i Benjamin Nelson Moyls podali piękny dowód standardowej wersji twierdzenia Frobeniusa w pracy [37] używając do tego celu przekształceń liniowych zachowujących rząd macierzy.

W prezentowanej pracy udało się pokazać, że twierdzenie Frobeniusa jest prawdziwe również dla macierzy nad dowolnym ciałem. Uzyskano pełną klasyfikację, dla jakich pierścieni reszt modulo twierdzenia te zachodzą, a dla których nie. Co więcej, okazało się również, że te twierdzenia są jednocześnie spełnione dla tych samych pierścieni reszt modulo, podczas gdy dla pozostałych pierścieni reszt modulo są one jednocześnie fałszywe (tutaj oczywiście warunek nieosobliwości należy zastąpić warunkiem zerowania się wyznacznika macierzy). Kluczowym okazało się tutaj rozróżnienie, czy k jest potęgą liczby pierwszej dla pierścienia modulo k, czy też nie jest tą potęgą.

Innym zagadnieniem związanym z powyższym twierdzeniem Dieudonné jest pytanie, co się dzieje, gdy przekształcenie liniowe zachowujące zbiór macierzy osobliwych jest osobliwe (czyli o nietrywialnym jądrze). Dla twierdzenia dualnego do twierdzenia Dieudonné'a, tj. mówiącego, że postać nieosobliwego przekształcenie liniowego zachowującego nieosobliwe macierze jest taka sama jak w twierdzeniu pierwotnym, kwestia co się dzieje, gdy przekształcenie liniowe zachowujące macierze nieosobliwe jest osobliwe, zostało już rozwiązane przez francuskiego matematyka Clémenta de Seguinsa Pazzisa w pracy [49]. W przypadku pierwszego problemu zaprezentowanego w tym akapicie pełnego rozwiązania jeszcze nie ma. Kanadyjski matematyk Peter Botta w artykule [7] rozwiązał sytuację dla ciał algebraicznie domkniętych, używając w dowodzie twierdzenia Hilberta o zerach powszechnie znanego jako Nullstellensatz Hilberta. Z użyciem tak mocnego narzędzia wiązał się przymus ograniczenia się tylko do ciał algebraicznie domkniętych. W niniejszej pracy udało się zrobić duży krok naprzód, otrzymując wynik dla dowolnych ciał o ilości elementów większej niż stopień macierzy. Wychodząc z zupełnie innego pomysłu, znacznie uproszczono dowód wspomnianego twierdzenia. Przypadek szczególny, który znaleziono w pracy [30] dobitnie świadczy o tym, że poczynione tam założenia są za silne. Przypuszcza się (w tym autor niniejszej rozprawy), że rozważane twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego ciała bez względu na ilość jego elementów.

W ostatnim podrozdziale drugiego rozdziału skupiono się na przekształceniach liniowych zachowujących rząd macierzy. Dla wygody ograniczono się tylko do macierzy kwadratowych, chociaż oczywiście wszystkie przedstawione wyniki można sformułować i udowodnić dla macierzy prostokątnych. Głównym problemem związanym z tym zagadnieniem jest duża różnorodność założeń przedstawianych przez autorów w swoich pracach. W prezentowanej rozprawie przeprowadzono więc ujednolicenie głównych wyników dotyczące tej problematyki, uzupełniając je o pewne wyniki własne. Najważniejsze prace związane z tą tematyką to: [3], [13], [37], [40] oraz [51].

Zarówno w pierwszym, jak i drugim rozdziale pracy szeroko są stosowane metody ogólnej teorii macierzy dotyczące wartości i wektorów własnych, wartości osobliwych i rozkładu według tych wartości. Rozważania wykorzystują elementy algebry oraz analizy funkcjonalnej.

Trzeci rozdział dysertacji – stanowiący dodatek – składa się z dwóch podrozdziałów luźniej związanych z tematyką pracy. Pierwszy z nich dotyczy generowania zbiorów macierzy kwadratowych stopnia 2 nad pierścieniem liczb całkowitych oraz nad pierścieniami modulo k. Rezultat ten powstał jako poboczny skutek pracy przy drugim rozdziale dysertacji. Drugi z dodatków przedstawia twierdzenia, które dotyczą pewnych specyficznych przekształceń macierzy, zachowujących osobliwość i nieosobliwość, rząd lub wyznacznik macierzy, co w pewnym sensie dopełnia tematykę drugiego rozdziału dysertacji. Prezentowane wyniki pochodzą z prac [24, 25, 26] autorstwa Józefa Kalinowskiego z początku lat dwutysięcznych. W dysertacji przedstawiono nowe dowody tych wyników. Jest o tyle istotne, że oryginalne dowody wymagały naprawdę istotnych korekt.

Wykaz osiągnięć autora rozprawy:

a) współautorstwo permutacyjnej nierówności Hadamarda – twierdzenie 4, zob. [47];

b) współautorstwo zoptymalizowanej nierówności Hadamarda – twierdzenia 5 i 6, zob. [48];

c) nowe dowody twierdzeń wzorowanych na nierówności von Neumanna dla śladów macierzy – twierdzenia 22, 24 i 25;

d) uogólnienie twierdzenia Frobeniusa na dowolne ciała – twierdzenie 30;

e) uogólnienie twierdzenia Frobeniusa na pierścienie modulo – twierdzenie 35;

f) uogólnienie twierdzenia Dieudonné na pierścienie modulo – twierdzenie 36;

g) uogólnienie twierdzenia Botty na dowolne ciała o mocy większej lub równej n, gdzie n jest stopniem macierzy kwadratowej z rozważanej rodziny tych macierzy – twierdzenie 39.

Ważnym uzupełnieniem wskazanych osiągnięć są przykłady 1, 2, 5, 6, 7 i 8. Uwypuklają one znaczenie założeń w odpowiednich twierdzeniach.

Spis treści

1

Nierówności macierzowe

W tym rozdziale będziemy przez $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ i $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$ oznaczać[1] odpowiednio zbiór wszystkich macierzy kwadratowych, zbiór macierzy unitarnych, zbiór macierzy półunitarnych, zbiór macierzy hermitowskich, zbiór macierzy hermitowskich dodatnio półokreślonych; wszystkie stopnia n (dla macierzy półunitarnych wymiaru $k \times n$, $k \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant k < n$) nad ciałem $\mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K}$ może być ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Dla danej macierzy prostokątnej A nad ciałem $\mathbb{K}$ symbolem A^* oznaczamy macierz sprzężoną hermitowsko do niej.

Przypomnijmy jeszcze trzy definicje.

Definicja 1. *Macierz $U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{K})$, gdy $UU^* = I$.*

Definicja 2. *Macierz $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$, gdy $H^* = H$.*

Definicja 3. *Macierz $H \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$, gdy $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ oraz nierówność $zHz^* \geqslant 0$ zachodzi dla każdego $z \in \mathbb{K}^n$.*

1.1. Mocniejsze wersje nierówności Hadamarda

Macierz Grama została wprowadzona do nauki przez duńskiego matematyka Jørgena Pedersena Grama w pracy [18] z 1883 roku. Jej definicję przestawimy dla ustalonej dowolnie przestrzeni unitarnej $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nad ciałem $\mathbb{K}$.

Definicja 4. *Macierz kwadratową:*

$$G(x_1,\ldots,x_n) := \begin{bmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \cdots & \langle x_2,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle \end{bmatrix},$$

gdzie $x_1,\ldots,x_n \in U$, nazywamy macierzą Grama, natomiast jej wyznacznik – gramianem. Oznaczamy go symbolem $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$. Zatem mamy:

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_n) := \det G(x_1,\ldots,x_n).$$

W poniższym twierdzeniu przedstawiono kilka podstawowych własności macierzy Grama i gramianu, które zostaną wykorzystane w dalszej części rozprawy.

[1] Zastosowanie oznaczenia pochyłą czcionką rodzin macierzy w dysertacji podyktowane jest czytelnością zapisu, a nie związkiem z innymi oznaczeniami stosowanymi w algebrze.

Twierdzenie 1. *Dla wektorów $x_1, \ldots, x_n \in U$ zachodzi:*

a) $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$,

b) $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1, \ldots, x_n$ *są liniowo zależne,*

c) $\operatorname{rank} G(x_1, \ldots, x_n) = \dim(\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\})$,

d) $\forall \sigma \in S_n \colon \Gamma(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ *(zob. definicję 5),*

e) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon \Gamma(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots x_n) = |\lambda|^2 \Gamma(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$,

f) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \colon \Gamma(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots x_n) = \Gamma(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

Dowód.

a) Zobacz uwagę 1.

b) Jeśli $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0$, to istnieją skalary $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{K}$, takie że:

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$. Mnożąc stronami j-te równanie przez $\bar{\kappa}_j$ i sumując wszystkie równania stronami, dostajemy:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \kappa_i \bar{\kappa}_j \langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i, \sum_{j=i}^{n} \kappa_j x_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i \right\|^2,$$

czyli:

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i = \mathbf{0},$$

a więc wektory $x_1, \ldots, x_n$ są liniowo zależne. Natomiast w drugą stronę, jeśli wektory $x_1, \ldots, x_n$ są liniowo zależne, to wtedy istnieją skalary $\lambda_i, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, takie że zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \mathbf{0}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \langle \mathbf{0}, x_j \rangle = 0$$

dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$, a więc $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

c) Jeśli $\dim(\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}) = n$, to korzystamy z podpunktu b) dowodzonego twierdzenia. Załóżmy więc, że $r = \dim(\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}) < n$. Istnieją wtedy parami różne indeksy $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$, takie że wektory $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ są liniowo niezależne. Stąd, na mocy podpunktu b), zachodzi $\Gamma(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) \neq 0$, czyli pewien minor stopnia r macierzy $G(x_1, \ldots, x_n)$ jest niezerowy, zatem $\operatorname{rank} G(x_1, \ldots, x_n) \geqslant r$. Wybierzmy parami różne indeksy $i_1, \ldots, i_{r+1} \in \{1, \ldots, n\}$ oraz parami różne indeksy

$j_1, \ldots, j_{r+1} \in \{1, \ldots, n\}$. Ponieważ wektory $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}}$ są liniowo zależne więc istnieją skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1} \in \mathbb{K}$, takie że:

$$\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k x_{i_k} = \mathbf{0},$$

a więc:

$$\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k \langle x_{i_k}, x_{j_l} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k x_{i_k}, x_{j_l} \right\rangle = \langle \mathbf{0}, x_{j_l} \rangle = 0$$

dla każdego $l \in \{1, \ldots, r+1\}$, czyli minor stopnia $r+1$ macierzy $G(x_1, \ldots, x_n)$ wyznaczony przez wiersze $i_1, \ldots, i_{r+1}$ oraz kolumny $j_1, \ldots, j_{r+1}$ jest zerowy. Z dowolności wyboru minoru stopni $r+1$ wnioskujemy, że $\operatorname{rank} G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant r$, a zatem $\operatorname{rank} G(x_1, \ldots, x_n) = r$.

d) Wystarczy zauważyć, że macierz $G(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ powstaje z macierzy $G(x_1, \ldots, x_n)$ poprzez „wykonanie” permutacji σ na wierszach i na kolumnach.

e) Macierz $G(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n)$ powstaje z macierzy $G(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ przez pomnożenie i-tego wiersza przez λ oraz pomnożenie i-tej kolumny przez $\bar{\lambda}$.

f) Macierz $G(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_j, \ldots, x_n)$ powstaje z macierzy $G(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ przez dodanie j-tego wiersza pomnożonego przez λ do i-tego wiersza oraz przez dodanie j-tej kolumny pomnożonej przez $\bar{\lambda}$ do i-tej kolumny. □

Rozpocznijmy od przypomnienia standardowej postaci nierówności Hadamarda. Celem tego podrozdziału będzie przedstawienie kilku „poprawionych” wersji wspomnianej nierówności, która została pierwszy raz podana przez Jacquesa Hadamarda w 1893 roku.

Twierdzenie 2. *Dla wektorów $x_1, \ldots, x_n \in U$ prawdziwa jest nierówność:*

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $x_1, \ldots, x_n$ są parami ortogonalne lub co najmniej jeden spośród wektorów $x_1, \ldots, x_n$ jest wektorem zerowym.

Dowód. Niech wektory $x_1, \ldots, x_n$ będą liniowo niezależne, w przeciwnym przypadku nierówność z dowodzonego twierdzenia jest trywialna. Korzystając z ortogonalizacji Grama-Schmidta, otrzymujemy:

$$u_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle x_i, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j \tag{1.1}$$

dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, gdzie wektory $u_1, \ldots, u_n$ są parami ortogonalne. Zatem z twierdzenia Pitagorasa wynika, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ spełnione jest:

$$\|u_i\|^2 = \|x_i\|^2 - \sum_{j=1}^{i-1} |\langle x_i, u_j \rangle|^2 \leqslant \|x_i\|^2. \tag{1.2}$$

Jeśli wykorzystamy twierdzenie 1 podpunkt f), to z nierówności (1.2) mamy:

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \Gamma(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

gdzie drugie przejście wynika z diagonalności macierzy $G(u_1, \ldots, u_n)$. Równość zachodzi tutaj wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ mamy $\langle x_i | u_j \rangle = 0$. To znów z (1.1) oznacza, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ jest $u_i = x_i$, czyli wektory $x_1, \ldots, x_n$ muszą być parami ortogonalne, co kończy dowód nierówności. □

Uwaga 1. *Powyższy dowód pokazuje jednocześnie prawdziwość twierdzenia 1 podpunkt a) o nieujemności gramianu.*

Rozważmy teraz nierówność przedstawioną przez Ernsta Fischera w pracy [15] z 1907 roku – swojego rodzaju odpowiednik nierówności Hadamarda. Analogię z nierównością Hadamarda szczególnie widać po indukcyjnym rozszerzeniu tej nierówności na inne podziały wektorów $x_1, \ldots, x_n$.

Twierdzenie 3. *Dla dowolnych $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ i dla dowolnych wektorów $x_1, \ldots, x_n \in U$ spełnione jest:*

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \Gamma(x_1, \ldots, x_k)\Gamma(x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Równość zachodzi tutaj wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\} \perp \operatorname{span}\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$, albo przynajmniej jeden z wektorów $x_1, \ldots, x_n$ jest wektorem zerowym, albo wektory $x_1, \ldots, x_k$ lub $x_{k+1}, \ldots, x_n$ są liniowo zależne.

Dowód. Niech wektory $x_1, \ldots, x_n$ będą liniowo niezależne. Z ortogonalizacji Grama-Schmidta mamy dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$u_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle x_i, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

oraz dla każdego $i \in \{k+1, \ldots, n\}$:

$$u_i = x_i - \sum_{j=k+1}^{i-1} \frac{\langle x_i, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j.$$

Wektory $u_1, \ldots, u_k$ oraz $u_{k+1}, \ldots, u_n$ są parami ortogonalne, ponadto:

$$\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$$

oraz:

$$\operatorname{span}\{u_{k+1}, \ldots, u_n\} = \operatorname{span}\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}.$$

Z twierdzenia 1 podpunkt f) oraz z diagonalności macierzy $G(u_1, \ldots, u_k)$ i $G(u_{k+1}, \ldots, u_n)$ dostajemy:

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_k) = \Gamma(u_1, \ldots, u_k) = \prod_{i=1}^{k} \|u_i\|^2$$

oraz:

$$\Gamma(x_{k+1},\ldots,x_n)=\Gamma(u_{k+1},\ldots,u_n)=\prod_{i=k+1}^{n}\|u_i\|^2.$$

Również z twierdzenia 1 podpunkt f) oraz dodatkowo z twierdzenia 2 mamy:

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_n)=\Gamma(u_1,\ldots,u_n)\leqslant\prod_{i=1}^{k}\|u_i\|^2=\Gamma(x_1,\ldots,x_k)\Gamma(x_{k+1},\ldots,x_n).$$

Równość zachodzi tutaj wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ mamy $\langle u_i|u_j\rangle=0$, czyli w szczególności $\operatorname{span}\{u_1,\ldots,u_k\}\perp\operatorname{span}\{u_{k+1},\ldots,u_n\}$, a więc również $\operatorname{span}\{x_1,\ldots,x_k\}\perp\operatorname{span}\{x_{k+1},\ldots,x_n\}$, co kończy dowód twierdzenia. □

Zanim przejdziemy do głównych rozważań tego podrozdziału zapoznajmy się z dwiema definicjami.

Definicja 5. *Zbiór wszystkich permutacji na zbioru $\{1,\ldots,n\}$ oznaczymy przez S_n, a zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1,\ldots,n\}$ za wyjątkiem permutacji identycznościowej jako S_n^*. Poza tym zbiór wszystkich transpozycji zbioru $\{1,\ldots,n\}$ oznaczymy jako T_n.*

Definicja 6. *Dla dowolnej permutacji $\sigma\in S_n$ zdefiniujmy:*

$$\operatorname{supp}(\sigma):=\{i\in\{1,\ldots,n\}\colon\sigma(i)\neq i\}.$$

Poniżej podajemy permutacyjną nierówność Hadamarda, która jest ewidentnym wzmocnieniem nierówności Hadamarda.

Twierdzenie 4. *Dla dowolnej permutacji $\sigma\in S_n^*$ i dowolnych wektorów $x_1,\ldots,x_n\in U$ zachodzi nierówność:*

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_n)+\prod_{i=1}^{n}|\langle x_i,x_{\sigma(i)}\rangle|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|^2. \tag{1.3}$$

Powyższa nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest chociaż jeden z poniższych warunków:

a) jeśli $\sigma\in T_n$, to wektory $x_1,\ldots,x_n$ są parami ortogonalne za wyjątkiem pary wektorów x_i oraz x_j dla indeksów $i,j\in\operatorname{supp}(\sigma)$, $i\neq j$,

b) jeśli $\sigma\in S_n^*\setminus T_n$, to wektory $x_1,\ldots,x_n$ są parami ortogonalne,

c) dla każdego $i\in\{1,\ldots,n\}$ wektory x_i oraz $x_{\sigma(i)}$ są kolinearne,

d) przynajmniej jeden z wektorów $x_1,\ldots,x_n$ jest wektorem zerowym.

W pracach [53, 54] chińscy matematycy Xiaodong Zhang i Shangjun Yang przedstawili odpowiednik permutacyjnej nierówności Hadamarda dla odpowiednio całkowicie nieujemnych macierzy oraz F-macierzy (zdefiniujemy je w dalszej części podrozdziału) bez warunków równości, które wcale nie muszą trywialne dla tak szerokich klas macierzy. Autorzy pracy [47] – Różański, Hetmaniok i Wituła – niezależnie od nich udowodnili permutacyjną nierówności Hadamarda dla macierzy Grama oraz szczególnych postaci permutacji (cykli lub złożenia dwóch cykli bez punktów stałych) łącznie z pełnymi warunkami równości. Z drugiej strony praca [31] Minghua Lina i Gorda Sinnamona, co prawda przedstawia permutacyjną nierówność Hadamarda dla wszystkich nietrywialnych permutacji, ale nie podaje pełnych warunków równości. Warunki te zostały podane dopiero w pracy [48] przez Różańskiego i Witułę.

Pomocniczo rozważymy dwa pomocnicze lematy, na których oprzemy dowód permutacyjnej nierówności Hadamarda. Zanotujmy, że pierwszy z nich wynika bezpośrednio z nierówności Fischera i z twierdzenia 1 podpunkt d).

Lemat 1. *Dla dowolnych wektorów $x_1, \ldots, x_n \in U$ i dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$ spełniona jest następująca nierówność:*

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \Gamma(x_k)\Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \|x_k\|^2\Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Jeśli wektory $x_1, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne, to równość zachodzi tu wtedy i tylko wtedy, gdy wektor x_k jest ortogonalny do pozostałych wektorów.

Lemat 2. *Dla dowolnych wektorów $x_1, \ldots, x_n \in U$ i dowolnej permutacji $\sigma \in S_n^*$ istnieje transpozycja $\tau \in T_n$ taka, że:*

$$\prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle| \leqslant \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\tau(i)}\rangle|.$$

Dowód. Rozważmy dwa przypadki.

a) Niech w rozkładzie permutacji σ na cykle parami rozłączne będzie transpozycja. Weźmy $j \in \operatorname{supp}(\sigma)$ takie, że $\sigma^2(j) = j$ i zdefiniujmy $\tau \in T_n$ zależnością:

$$\tau(i) = \begin{cases} \sigma(i), & \text{gdy } i \in \{j, \sigma(j)\}, \\ i, & \text{gdy } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, \sigma(j)\}. \end{cases}$$

Stąd, z nierówności CBS, mamy:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle| &= |\langle x_j, x_{\sigma(j)}\rangle||\langle x_{\sigma(j)}, x_{\sigma^2(j)}\rangle| \prod_{i\notin\{j,\sigma(j)\}} |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle| \leqslant \\ &\leqslant |\langle x_j, x_{\sigma(j)}\rangle||\langle x_{\sigma(j)}, x_{\sigma^2(j)}\rangle| \prod_{i\notin\{j,\sigma(j)\}} \|x_i\|\|x_{\sigma(i)}\| = \\ &= |\langle x_j, x_{\sigma(j)}\rangle||\langle x_{\sigma(j)}, x_{\sigma^2(j)}\rangle| \prod_{i\notin\{j,\sigma(j)\}} \|x_i\|^2 = \\ &= |\langle x_j, x_{\tau(j)}\rangle||\langle x_{\sigma(j)}, x_{\tau(\sigma(j))}\rangle| \prod_{i\notin\{j,\sigma(j)\}} |\langle x_i, x_{\tau(i)}\rangle| = \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\tau(i)}\rangle|. \end{aligned}$$

b) Niech najkrótszy cykl we wspomnianym rozkładzie permutacji σ będzie dłuższy niż dwa. Wtedy istnieje $j \in \operatorname{supp}(\sigma)$ takie, że:

$$\|x_j\| \cdot |\langle x_{\sigma(j)}, x_{\sigma^2(j)}\rangle| \leqslant \|x_{\sigma^2(j)}\| \cdot |\langle x_j, x_{\sigma(j)}\rangle|. \tag{1.4}$$

Rzeczywiście jeśliby było:

$$\|x_i\| \cdot |\langle x_{\sigma(i)}, x_{\sigma^2(i)}\rangle| > \|x_{\sigma^2(i)}\| \cdot |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle|$$

dla każdego $i \in \operatorname{supp}(\sigma)$, to z faktu, że $\operatorname{supp}(\sigma^k) = \operatorname{supp}(\sigma)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, otrzymalibyśmy:

$$\begin{aligned}\prod_{i\in\operatorname{supp}(\sigma)} \|x_i\| \cdot |\langle x_{\sigma(i)}, x_{\sigma^2(i)}\rangle| > \prod_{i\in\operatorname{supp}(\sigma)} \|x_{\sigma^2(i)}\| \cdot |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle| =\\ = \prod_{i\in\operatorname{supp}(\sigma)} \|x_i\| \cdot |\langle x_{\sigma(i)}, x_{\sigma^2(i)}\rangle|,\end{aligned}$$

co jest niemożliwe. Ustalmy $j \in \operatorname{supp}(\sigma)$, dla którego spełniona jest nierówność (1.4) oraz zdefiniujmy $\tau \in T_n$ zależnością:

$$\tau(i) = \begin{cases} \sigma(j), & \text{gdy } i = j,\\ j, & \text{gdy } i = \sigma(j),\\ i, & \text{gdy } i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j, \sigma(j)\}.\end{cases}$$

Wykorzystując nierówność CBS i nierówność (1.4), dostajemy:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle| &= |\langle x_j, x_{\sigma(j)}\rangle||\langle x_{\sigma(j)}, x_{\sigma^2(j)}\rangle| \prod_{i\notin\{j,\sigma(j)\}} |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle| \leqslant\\ &\leqslant |\langle x_j, x_{\sigma(j)}\rangle||\langle x_{\sigma(j)}, x_{\sigma^2(j)}\rangle| \prod_{i\notin\{j,\sigma(j)\}} \|x_i\|\|x_{\sigma(i)}\| =\\ &= |\langle x_j, x_{\sigma(j)}\rangle||\langle x_{\sigma(j)}, x_{\sigma^2(j)}\rangle|\|x_j\|\|x_{\sigma^2(j)}\| \prod_{i\notin\{j,\sigma(j),\sigma^2(j)\}} \|x_i\|^2 \leqslant\\ &\leqslant |\langle x_j, x_{\sigma(j)}\rangle||\langle x_j, x_{\sigma(j)}\rangle| \prod_{i\notin\{j,\sigma(j)\}} \|x_i\|^2 =\\ &= |\langle x_j, x_{\tau(j)}\rangle||\langle x_{\sigma(j)}, x_{\tau(\sigma(j))}\rangle| \prod_{i\notin\{j,\sigma(j)\}} |\langle x_i, x_{\tau(i)}\rangle| = \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\tau(i)}\rangle|.\end{aligned}$$

Ostatecznie, niezależnie od typu permutacji σ, dostajemy tezę lematu. □

Kwantyfikator szczegółowy dotyczący transpozycji w lemacie 2 nie może być zastąpiony przez kwantyfikator ogólny, co wynika z poniższego przykładu.

Przykład 1. *Niech* $x_1 = [-1, 2, 0]$, $x_2 = [-2, 1, 2]$, $x_3 = [2, -2, 2]$, $\sigma = (123) \in S_n^*$ *oraz* $\tau = (23) \in T_n$. *Wtedy:*

$$\prod_{i=1}^{3} |\langle x_i, x_{\tau(i)}\rangle| = 20 < 48 = \prod_{i=1}^{3} |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle|.$$

Mając już zaplecze w postaci dwóch powyższych pomocniczych lematów, możemy przejść bezpośrednio do dowodu permutacyjnej nierówności Hadamarda.

Dowód. Rozważymy cztery rozłączne przypadki.

a) Niech $\sigma \in T_n$ i wektory $x_1, \ldots, x_n$ będą liniowo niezależne. Wybierzmy $j \in \operatorname{supp}(\sigma)$. Wykorzystując lemat 1, mamy:

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \Gamma(x_j, x_{\sigma(j)}) \prod_{i \notin \{j, \sigma(j)\}} \|x_i\|^2. \tag{1.5}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, \ldots, x_n) &\leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - |\langle x_j, x_{\sigma(j)} \rangle| |\langle x_{\sigma(j)}, x_{\sigma^2(j)} \rangle| \prod_{i \notin \{j, \sigma(j)\}} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| = \\ &= \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle|. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Równość zachodzi tutaj wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi także w nierówności (1.5). Z lematu 1 jest to równoważne warunkowi, że wektory $x_1, \ldots, x_n$ są parami ortogonalne za wyjątkiem pary wektorów x_j i $x_{\sigma(j)}$.

b) Niech $\sigma \in S_n^* \setminus T_n$ i wektory $x_1, \ldots, x_n$ będą liniowo niezależne. Z lematu 2 istnieje permutacja $\tau \in T_n$ taka, że:

$$\prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| \leqslant \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\tau(i)} \rangle|. \tag{1.7}$$

Na podstawie nierówności (1.6) i (1.7) dostajemy:

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) - \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \leqslant - \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\tau(i)} \rangle| \leqslant - \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle|.$$

Jeśli zachodzi tu równość, to musi być spełnione:

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) + \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\tau(i)} \rangle| = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \tag{1.8}$$

oraz:

$$\prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\tau(i)} \rangle| = \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle|. \tag{1.9}$$

Wykorzystując warunki równości z nierówności (1.6) do równości (1.8) stwierdzamy, że wektory $x_1, \ldots, x_n$ są parami ortogonalne za wyjątkiem pary wektorów x_j i $x_{\tau(j)}$, gdzie przypomnijmy $j \in \operatorname{supp}(\tau)$. Ponieważ istnieje $k \in \operatorname{supp}(\sigma)$ takie, że $k \notin \operatorname{supp}(\tau)$, więc mamy $\langle x_k, x_{\sigma(k)} \rangle = 0$, co implikuje:

$$\prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| = 0.$$

Stąd równość (1.9) przyjmuje postać:

$$|\langle x_j, x_{\tau(j)} \rangle|^2 \prod_{i \neq \{j, \tau(j)\}} \|x_i\|^2 = \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\tau(i)} \rangle| = \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| = 0$$

i opierając się na liniowej niezależności $x_1, \ldots, x_n$ otrzymujemy:

$$\langle x_j, x_{\tau(j)} \rangle = 0.$$

Z drugiej strony, jeśli wektory $x_1, \ldots, x_n$ są parami ortogonalne, to:

$$\prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| = 0,$$

ponieważ $\operatorname{supp}(\sigma) \neq \emptyset$. Bazując na twierdzeniu 2, mamy:

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

i stąd dostajemy:

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) + \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

a więc otrzymujemy równość w nierówności (1.3).

c) Niech $\sigma \in S_n^*$ i wektory $x_1, \ldots, x_n$ będą niezerowe oraz liniowo zależne. Stąd, na podstawie nierówności CBS, mamy:

$$\prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\| \|x_{\sigma(i)}\| = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2. \tag{1.10}$$

Ponieważ $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0$, więc dostajemy nierówność (1.3). Równość w (1.3) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równość zachodzi w (1.10). To znów z nierówności CBS jest równoważne kolinearności wektorów x_i oraz $x_{\sigma(i)}$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$.

d) Niech teraz $\sigma \in S_n^*$ i co najmniej jeden z wektorów $x_1, \ldots, x_n$ będzie wektorem zerowym. Wtedy:

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = 0$$

i otrzymujemy równość w nierówności (1.3).

Po rozszerzeniu powyższych przypadków o wyłączoną część wspólną, uzyskujemy pełną tezę twierdzenia. □

W [53] możemy zobaczyć ideę optymalizacji nierówności z twierdzenia 4 poprzez wzięcie maksimum ze wszystkich nietrywialnych permutacji. Idea ta została wcielona w życie w pracy [48] przez Różańskiego i Witułę. Powstała nierówność została nazwana zoptymalizowaną nierównością Hadamarda.

Twierdzenie 5. *Dla dowolnych wektorów $x_1, \ldots, x_n \in U$ prawdziwa jest następująca nierówność:*

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) + \max_{\sigma \in S_n^*} \left\{ \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| \right\} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2. \tag{1.11}$$

Różański i Wituła również w pracy [48] zauważyli, że zbiór S_n^* w nierówności (1.11) może być zastąpiony jedynie przez T_n. Zauważmy, że twierdzenie 6 jest brakującym ogniwem twierdzenia 5.

Twierdzenie 6. *Dla dowolnych wektorów* $x_1, \ldots, x_n \in U$ *zachodzi:*

$$\max_{\sigma \in S_n^*} \left\{ \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| \right\} = \max_{\tau \in T_n} \left\{ \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\tau(i)} \rangle| \right\}.$$

W nawiązaniu do powyższego twierdzenia przeanalizujmy następujący przykład numeryczny.

Przykład 2. *Niech* $x_1 = [0,1,0,0]$, $x_2 = [-1,1,0,1]$, $x_3 = [-1,-2,-2,1]$, $x_4 = [0,-2,1,1]$. *Mamy* $\Gamma(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4$ *i* $\prod_{i=1}^{4} \|x_i\|^2 = 180$. *Rozważmy wartość* $r_\sigma := \prod_{i=1}^{4} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle|$ *dla permutacji* $\sigma \in S_4^*$.

σ	r_σ	σ	r_σ	σ	r_σ	σ	r_σ
$(1,4)$	120	$(1,2,4)$	20	$(1,3)(2,4)$	4	$(1,2,3,4)$	0
$(1,3)$	72	$(1,4,2)$	20	$(2,3)$	0	$(1,3,2,4)$	0
$(1,2)$	60	$(2,4)$	10	$(1,2,3)$	0	$(1,4,2,3)$	0
$(1,3,4)$	36	$(1,2)(3,4)$	9	$(1,3,2)$	0	$(1,4,3,2)$	0
$(1,4,3)$	36	$(1,2,4,3)$	6	$(2,3,4)$	0	$(1,4)(2,3)$	0
$(3,4)$	27	$(1,3,4,2)$	6	$(2,4,3)$	0		

Stąd widzimy, że:

$$\max_{\tau \in T_4} \left\{ \prod_{i=1}^{4} |\langle x_i, x_{\tau(i)} \rangle| \right\} = 120, \qquad \max_{\sigma \in S_4^* \setminus T_4} \left\{ \prod_{i=1}^{4} |\langle x_i, x_{\sigma(i)} \rangle| \right\} = 36,$$

co z nierówności (1.11) *daje:*

$$\Gamma(x_1,x_2,x_3,x_4) + 120 \leqslant 180.$$

Zauważmy, że klasyczna nierówność Hadamarda w tym przypadku jest bardzo słaba, podobnie jak permutacyjna nierówność Hadamarda dla nieidentycznościowych permutacji bez transpozycji, ponieważ mamy wtedy co najwyżej:

$$\Gamma(x_1,x_2,x_3,x_4) + 36 \leqslant 180.$$

Przejdźmy teraz do związku macierzy Grama z dodatnio półokreślonymi macierzami hermitowskimi. Zobaczmy jaki jest związek pomiędzy macierzą Grama a macierzą hermitowską dodatnio półokreśloną.

Twierdzenie 7. *Każda macierz Grama jest macierzą hermitowską dodatnio półokreśloną.*

Dowód. Zauważmy, że macierz Grama jest macierzą hermitowską. Wynika to z równości:

$$G(x_1,\ldots,x_n)^* = (\langle x_i|x_j\rangle)^*_{n\times n} = \left(\overline{\langle x_j|x_i\rangle}\right)_{n\times n} =$$

$$= (\langle x_i | x_j \rangle)_{n\times n} = G(x_1, \ldots, x_n).$$

Ponieważ wszystkie minory główne macierzy Grama są macierzami Grama, więc na mocy twierdzenia 1 podpunkt a) są one nieujemne. To zaś, na podstawie kryterium Sylvestera, kończy dowód twierdzenia. □

Znacznie ciekawsze i ważniejsze w naszych rozważaniach jest twierdzenie odwrotne do podanego.

Twierdzenie 8. *Jeżeli macierz $H \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$, to w przestrzeni unitarnej $(U, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ nad $\mathbb{K}$, gdzie $\dim U \geqslant \operatorname{rank} H$, istnieją wektory $x_1, \ldots, x_n \in U$, takie że:*

$$H = G(x_1, \ldots, x_n).$$

Dowód. Na mocy rozkładu Cholesky'ego[2] mamy $H = YY^* = G(y_1, \ldots, y_n)$, gdzie wektory $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}^n$ są wierszami macierzy Y. Niech wektory $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m \in \mathbb{K}^n$ będą bazą ortonormalną przestrzeni $\operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Wtedy dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \tilde{e}_j.$$

Jeśli weźmiemy teraz rodzinę ortonormalnych wektorów $e_1, \ldots, e_m \in U$ oraz dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ przyjmiemy:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} e_j,$$

to dostaniemy dla nich $H = G(x_1, \ldots, x_n)$, ponieważ spełnione jest $\langle x_j | x_k \rangle = \langle y_j | y_k \rangle$, co kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga 2. *Założenie, że $\dim U \geqslant \operatorname{rank} H$ jest tu znaczące, ponieważ jeśli byłoby:*

$$\dim(\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \leqslant \dim U < \operatorname{rank} H,$$

to wtedy na mocy twierdzenia 1 podpunkt c) zachodziłoby:

$$\operatorname{rank} G(x_1, \ldots, x_n) < \operatorname{rank} H,$$

co prowadzi do sprzeczności.

Na podstawie twierdzenia 8 możemy teraz podać wszystkie wcześniejsze twierdzenia w wersji dla macierzy hermitowskich dodatnio półokreślonych.

Twierdzenie 9 (nierówność Hadamarda)**.** *Dla każdej macierzy $H \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$ spełniona jest następująca nierówność:*

$$\det H \leqslant \prod_{i=1}^{n} (H)_{ii}.$$

[2] Rozkład Cholesky'ego jest procedurą rozkładu macierzy $A \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$ na iloczyn postaci $A = LL^*$, gdzie $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ jest macierzą dolnotrójkątną (zob. [23]). Został on odkryty przez André-Louisa Cholesky'ego – potomka Polaków z Wielkiej Emigracji.

Powyższa nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy macierz H jest diagonalna lub co najmniej jeden wiersz (kolumna) macierzy H jest zerowy.

Twierdzenie 10 (permutacyjna nierówność Hadamarda)**.** *Dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n^*$ i każdej macierzy $H \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$ zachodzi następująca nierówność:*

$$\det H + \prod_{i=1}^{n} |(H)_{i,\sigma(i)}| \leqslant \prod_{i=1}^{n} h_{ii}.$$

Powyższa nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy chociaż jeden z poniższych warunków jest spełniony:

a) jeśli $\sigma \in T_n$, to $(H)_{ij} = 0$ dla $i, j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \operatorname{supp}(\sigma)$, $i \neq j$,

b) jeśli $\sigma \in S_n^* \setminus T_n$, to macierz H jest diagonalna,

c) dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ i-ty oraz $\sigma(i)$-ty wiersz (kolumna) jako wektory są kolinearne,

d) co najmniej jeden wiersz (kolumna) macierzy H jest zerowy.

Twierdzenie 11 (zoptymalizowana nierówność Hadamarda)**.** *Dla dowolnej macierzy $H \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$ następująca nierówność jest prawdziwa:*

$$\det H + \max_{\sigma \in S_n^*} \left\{ \prod_{i=1}^{n} |(H)_{i,\sigma(i)}| \right\} \leqslant \prod_{i=1}^{n} h_{ii}.$$

Twierdzenie 12. *Dla dowolnej macierzy $H \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$ zachodzi następująca równość:*

$$\max_{\sigma \in S_n^*} \left\{ \prod_{i=1}^{n} |(H)_{i,\sigma(i)}| \right\} = \max_{\tau \in T_n} \left\{ \prod_{i=1}^{n} |(H)_{i,\tau(i)}| \right\}.$$

Podobnie jak dla macierzy Grama tak i w tym przypadku rozważmy przykład numeryczny.

Przykład 3. *Rozważmy dodatnio półokreśloną macierz hermitowską:*

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dla tej macierzy mamy $\det H = 1$, $\prod_{i=1}^{10} h_{ii} = 1920$ *oraz:*

$$\max_{\tau \in T_{10}} \left\{ \prod_{i=1}^{10} |(H)_{i,\tau(i)}| \right\} = 960, \qquad \max_{\sigma \in S_{10}^* \setminus T_{10}} \left\{ \prod_{i=1}^{10} |(H)_{i,\sigma(i)}| \right\} = 384.$$

Poniższa tabela prezentuje największe wartości $r_\sigma := \prod_{i=1}^{10} |(H)_{i,\sigma(i)}|$ *dla* $\sigma \in S_{10}^*$.

σ	r_σ	σ	r_σ	σ	r_σ
(5 9)	960	(5 9)(8 10)	384	(1 4)(3 8)	256
(3 8)	768	(3 8 10)	384	(1 4)(8 10)	256
(8 10)	768	(3 10 8)	384	(1 9)(3 8)	256
(1 2)	640	(1 5)	320	(1 9)(8 10)	256
(1 4)	640	(1 2)(5 9)	320	(2 5)	240
(1 9)	640	(1 4)(5 9)	320	(2 6)	240
(2 4)	480	(1 2 4)	320	(2 4)(5 9)	240
(3 10)	480	(1 4 2)	320	(3 10)(5 9)	240
(5 6)	480	(1 5 9)	320	(5 9)(6 7)	240
(6 7)	480	(1 9 5)	320	(5 9)(7 10)	240
(7 10)	480	(1 2)(3 8)	256	$\cdots$	$\cdots$
(3 8)(5 9)	384	(1 2)(8 10)	256	$\cdots$	$\cdots$

Z nierówności Fischera oraz twierdzenia 1 podpunkt a) i d) wynika poniższe twierdzenie, które poprzedzimy definicją.

Definicja 7. *Niech* $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ *oraz zbiór* N *będzie niepustym właściwym podzbiorem zbioru* $\{1, \ldots, n\}$. *Wtedy* $A[N]$ *oznacza główną podmacierz macierzy* A *powstała z macierzy* A *przez usunięcie i-tego wiersza oraz i-tej kolumny dla każdego* $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus N$.

Twierdzenie 13. *Dla każdej macierzy* $H \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$ *oraz dla każdego niepustego właściwego podzbioru* $N \subset \{1, \ldots, n\}$ *zachodzą następujące nierówności:*

$$\det(H[N]) \geqslant 0 \tag{1.12}$$

oraz:

$$\det H \leqslant \det(H[N]) \det(H[N^C]). \tag{1.13}$$

Bazując na powyższych własnościach dodatnio półokreślonych macierzy hermitowskich, definiujemy F-macierze jako dowolne macierze, które spełniają nierówności (1.12) i (1.13).

Definicja 8. *Macierz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *nazywamy F-macierzą, jeśli dla każdego niepustego właściwego podzbioru* $N \subset \{1, \ldots, n\}$*:*

$$\det(A[N]) \geqslant 0 \tag{1.14}$$

oraz:

$$\det A \leqslant \det(A[N]) \det(A[N^C]). \tag{1.15}$$

Metody dowodowe dla macierzy Grama przedstawione w tej rozprawie mogą być użyte dla F-macierzy z analogicznymi rezultatami. Dowodząc twierdzenia 15, wykorzystujemy lemat 2 zastępując w nim tylko nierówność CBS przez nierówność (1.14) użytą dla dwuelementowego podzbioru N. Prześledźmy więc wersje podanych już twierdzeń dla F-macierzy.

Twierdzenie 14 (nierówność Hadamarda)**.** *Dla dowolnej F-macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ spełniona jest następująca nierówność:*

$$\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} (A)_{ii}.$$

Twierdzenie 15 (permutacyjna nierówność Hadamarda)**.** *Dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n^*$ i dowolnej F-macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ zachodzi następująca nierówność:*

$$\det A + \left(\prod_{i=1}^{n} (A)_{i,\sigma(i)} (A)_{\sigma(i),i} \right)^{1/2} \leqslant \prod_{i=1}^{n} (A)_{ii}.$$

Uwaga 3. *Twierdzenie 15 jest właśnie tym wynikiem z pracy [54] wspomnianym na początku tego podrozdziału.*

Twierdzenie 16 (zoptymalizowana nierówność Hadamarda)**.** *Dla dowolnej F-macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ prawdziwa jest następująca nierówność:*

$$\det A + \max_{\sigma \in S_n^*} \left\{ \left(\prod_{i=1}^{n} (A)_{i,\sigma(i)} (A)_{\sigma(i),i} \right)^{1/2} \right\} \leqslant \prod_{i=1}^{n} (A)_{ii}.$$

Twierdzenie 17. *Dla dowolnej F-macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ prawdziwa jest następująca równość:*

$$\max_{\sigma \in S_n^*} \left\{ \left(\prod_{i=1}^{n} (A)_{i,\sigma(i)} (A)_{\sigma(i),i} \right)^{1/2} \right\} = \max_{\tau \in T_n} \left\{ \left(\prod_{i=1}^{n} (A)_{i,\tau(i)} (A)_{\tau(i),i} \right)^{1/2} \right\}.$$

Niemal analogicznie twierdzenia można uzyskać dla całkowicie nieujemnych macierzy za pomocą podobnych metod dowodowych. Warto podkreślić, że nie wszystkie dodatnio półokreślone macierze hermitowskie są całkowicie nieujemne. Można przeczytać więcej o rodzinie tych macierzy w monografii [41].

Jako ciekawostkę wspomnijmy, że prace nad mocniejszą wersją nierówności Hadamarda zaczęły się od odkrycia następującej nierówności, tj. permutacyjnej nierówności Hadamarda dla $n = 3$ i $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

Twierdzenie 18. *Dla wektorów $x_1, x_2, x_3 \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$ prawdziwa jest nierówność:*

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3) + |\langle x_1, x_2 \rangle| |\langle x_2, x_3 \rangle| |\langle x_3, x_1 \rangle| \leqslant \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \|x_3\|^2.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x_1, x_2, x_3 są ortogonalne lub kolinearne.

Dowód. Bezpośrednio rozpisując wyznacznik macierzy Grama G_3 mamy:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, x_3) = {} & \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \|x_3\|^2 + 2\Re(\langle x_1, x_2 \rangle \langle x_2, x_3 \rangle \langle x_3, x_1 \rangle) + \\ & - \|x_1\|^2 |\langle x_2, x_3 \rangle|^2 - \|x_2\|^2 |\langle x_3, x_1 \rangle|^2 - \|x_3\|^2 |\langle x_1, x_2 \rangle|^2. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ponieważ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ spełnione jest $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, więc stosując dodatkowo nierówność CBS dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|x_1\|^2|\langle x_2, x_3\rangle|^2 + \frac{1}{2}\|x_2\|^2|\langle x_3, x_1\rangle|^2 &\geqslant \|x_1\|\|x_2\||\langle x_2, x_3\rangle||\langle x_3, x_1\rangle| \geqslant \\ &\geqslant |\langle x_1, x_2\rangle||\langle x_2, x_3\rangle||\langle x_3, x_1\rangle| \end{aligned}$$

i analogicznie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|x_1\|^2|\langle x_2, x_3\rangle|^2 + \frac{1}{2}\|x_3\|^2|\langle x_1, x_2\rangle|^2 &\geqslant |\langle x_1, x_2\rangle||\langle x_2, x_3\rangle||\langle x_3, x_1\rangle|, \\ \frac{1}{2}\|x_2\|^2|\langle x_3, x_1\rangle|^2 + \frac{1}{2}\|x_3\|^2|\langle x_1, x_2\rangle|^2 &\geqslant |\langle x_1, x_2\rangle||\langle x_2, x_3\rangle||\langle x_3, x_1\rangle|. \end{aligned}$$

Sumując te trzy nierówności otrzymujemy:

$$\|x_1\|^2|\langle x_2, x_3\rangle|^2 + \|x_2\|^2|\langle x_3, x_1\rangle|^2 + \|x_3\|^2|\langle x_1, x_2\rangle|^2 \geqslant 3|\langle x_1, x_2\rangle||\langle x_2, x_3\rangle||\langle x_3, x_1\rangle|. \tag{1.17}$$

Ponieważ część rzeczywista liczby zespolonej jest mniejsza bądź równa jej modułowi, więc prawdziwa jest nierówność:

$$\Re(\langle x_1, x_2\rangle\langle x_2, x_3\rangle\langle x_3, x_1\rangle) \leqslant |\langle x_1, x_2\rangle||\langle x_2, x_3\rangle||\langle x_3, x_1\rangle|,$$

Podstawiając ją i nierówność (1.17) do równości (1.16) otrzymujemy:

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3) \leqslant \|x_1\|^2\|x_2\|^2\|x_3\|^2 - |\langle x_1, x_2\rangle||\langle x_2, x_3\rangle||\langle x_3, x_1\rangle|,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Druga ciekawostka, o której wspomnimy, dotyczy artykułu w czasopiśmie *The College Mathematics Journal* ***52*** *(2021)*, gdzie zostało przedstawione poniższe twierdzenie (problem nr 1168), które zaproponował George Stoica, a rozwiązał Eugene Herman.

Twierdzenie 19. *Dla wektorów $x, y, z \in U$ o normie jeden spełniona jest nierówność:*

$$\Re^2\langle x, y\rangle + \Re^2\langle y, z\rangle + \Re^2\langle z, x\rangle \leqslant 1 + 2\Re\langle x, y\rangle\Re\langle y, z\rangle\Re\langle z, x\rangle.$$

Rozwiązanie Hermana chociaż długie i z „drobnym błędem edytorskim”, jest bardzo ciekawe. Jednak można je zrobić dużo prościej. Z rozwiązania Hermana zachowamy jedynie pomysł skorzystania z ogólniejszej nierówności prawdziwej bez założenia o tym by wektory x, y i z miały normę jeden:

$$\begin{aligned} \|z\|^2\Re^2\langle x, y\rangle + \|x\|^2\Re^2\langle y, z\rangle + \|y\|\Re^2\langle z, x\rangle &\leqslant \\ &\leqslant \|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle\Re\langle y, z\rangle\Re\langle z, x\rangle. \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia 19. Zauważmy, że odwzorowanie $[\cdot, \cdot]\colon U \times U \to \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$[x, y] = \Re\langle x, y\rangle \tag{1.18}$$

jest rzeczywistym iloczynem skalarnym. Korzystając z twierdzenia 1 podpunkt a) i rozpisując wprost gramian $\Gamma(x,y,z)$, mamy:

$$0 \leqslant \Gamma(x,y,z) = [x,x][y,y][z,z] + 2[x,y][y,z][z,x] - [x,x][x,y]^2 - [y,y][z,x]^2 - [z,z][x,y]^2.$$

Jednak z definicji (1.18) dostajemy:

$$0 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 + 2\Re\langle x,y\rangle\Re\langle y,z\rangle\Re\langle z,x\rangle - \|x\|^2\Re^2\langle y,z\rangle - \|y\|^2\Re^2\langle z,x\rangle - \|z\|^2\Re^2\langle x,y\rangle,$$

co prowadzi do poszukiwanej tezy. □

1.2. Nierówność von Neumanna

W 1937 roku słynny amerykański matematyk o węgierskich korzeniach John von Neumann w pracy [44] przedstawił pewną nierówność, która od jego nazwiska wzięła nazwę (ang. *von Neumann's Trace Inequality*).

Definicja 9. *Dla dowolnej macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ symbolami $\sigma_1(A), \ldots, \sigma_n(A)$ oznaczymy wartości osobliwe macierzy A uporządkowane nierosnąco, czyli $\sigma_1(A) \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n(A)$.*

Twierdzenie 20. *Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ zachodzi jest nierówność:*

$$|\operatorname{tr}(AB)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A)\sigma_i(B).$$

Ponieważ $\sigma_i(UA) = \sigma_i(A)$, gdzie $i \in \{1, \ldots, n\}$, dla dowolnego $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ oraz dla dowolnego $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, więc można podać kolejne twierdzenie, które również pojawiło się w pracy [44]. Jest ono wnioskiem i wzmocnieniem twierdzenia 20.

Twierdzenie 21. *Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ spełniona jest równość:*

$$\sup_{U,V \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} |\operatorname{tr}(UAVB)| = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A)\sigma_i(B).$$

Dowody twierdzenia 21 podane przez von Neumanna w artykule [44], czy też Leona Mirsky'ego w artykułach [43] i [42] nie są proste. Wykorzystywane są w nich bardziej zaawansowane narzędzia matematyczne, takie jak na przykład teoria majoryzacji. Dopiero o dowodzie Rolfa Dietera Grigorieffa, przedstawionym w krótkiej notce [19], można powiedzieć, że jest elementarny. Na podstawie tej notki autor niniejszej dysertacji skonstruował elementarny dowód twierdzenia 22, które jest uogólnieniem twierdzenia 21 na większą ilość macierzy. Twierdzenie 22 podane zostało w artykule [28] przez Waltera Kristofa, a wcześniej przez Ky Fan w pracy [14] w ogólniejszej wersji dla całkowicie ciągłych operatorów w przestrzeni Hilberta[3]. Oryginalne dowody tego twierdzenia także nie należą do najprostszych.

[3]Operator liniowy $T\colon X \to Y$ między przestrzeniami Hilberta X i Y nad wspólnym ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nazywamy całkowicie ciągłym, jeśli dla każdego słabo zbieżnego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ elementów przestrzeni X ciąg wartości $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w sensie normy przestrzeni Y.

Twierdzenie 22. *Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Dla dowolnych $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ spełniona jest równość:*

$$\sup_{U_1,\ldots,U_k \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \left| \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} U_j A_j \Big) \right| = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \sigma_i(A_j).$$

Dowód. Dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$ rozłóżmy macierz A_j według wartości osobliwych do postaci:

$$A_j = V_j D_j W_j,$$

gdzie $V_j, W_j \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ oraz:

$$D_j = \operatorname{diag}\Big(\sigma_1(A_j), \ldots, \sigma_n(A_j)\Big).$$

Stąd, korzystając z faktu, że ślad macierzy jest niezależny od cyklicznej permutacji produktów, dla dowolnych $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ otrzymujemy:

$$\operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} U_j A_j \Big) = \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} U_j V_j D_j W_j \Big) = \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} W_{j-1} U_j V_j D_j \Big) = \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} Q_j D_j \Big),$$

gdzie $Q_j := W_{j-1} U_j V_j \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ dla dowolnego $j \in \{1, \ldots, n\}$ i z definicji przyjmujemy oznaczenie $W_{-1} := W_k$. Zauważmy, że aby udowodnić nierówność:

$$\sup_{U_1,\ldots,U_k \in \mathcal{U}_n} \left| \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} U_j A_j \Big) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \sigma_i(A_j) \tag{1.19}$$

wystarczy pokazać, że:

$$\left| \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} Q_j D_j \Big) \right| \leqslant \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} D_j \Big). \tag{1.20}$$

Rzeczywiście, mamy wtedy:

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} U_j A_j \Big) \right| &= \left| \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} Q_j D_j \Big) \right| \leqslant \operatorname{tr}\Big(\prod_{j=1}^{k} D_j \Big) = \\ &= \operatorname{tr}\left(\operatorname{diag}\Big(\prod_{j=1}^{k} \sigma_1(A_j), \ldots, \prod_{j=1}^{k} \sigma_n(A_j) \Big) \right) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \sigma_i(A_j) \end{aligned}$$

i przechodząc do kresu górnego po dowolnych $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ dostajemy nierówność (1.19). Zajmijmy się więc udowodnieniem nierówności (1.20). Zauważmy, że zachodzi następujący rozkład:

$$D_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,j} X_i, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.21}$$

gdzie $X_i := \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i \text{ krotnie}}, 0, \ldots, 0)$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz:

$$\xi_{i,j} := \begin{cases} \sigma_n(A_j), & \text{gdy } i = 1, \\ \sigma_{n-i+1}(A_j) - \sigma_{n-i+2}(A_j), & \text{gdy } i \in \{2, \ldots, n\}, \end{cases}$$

dla $j \in \{1, \ldots, n\}$. Korzystając z rozkładu (1.21) i elementarnych przekształceń macierzowych mamy:

$$\prod_{j=1}^{k} Q_j D_j = \prod_{j=1}^{k} Q_j \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,j} X_i = \prod_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,j} Q_j X_i =$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}} \prod_{j=1}^{k} \xi_{i_j,j} Q_j X_{i_j} = \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}} \Big(\prod_{j=1}^{k} \xi_{i_j,j} \Big) \Big(\prod_{j=1}^{k} Q_j X_{i_j} \Big)$$

oraz:

$$\prod_{j=1}^{k} D_j = \prod_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,j} X_i = \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}} \prod_{j=1}^{k} \xi_{i_j,j} X_{i_j} = \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}} \Big(\prod_{j=1}^{k} \xi_{i_j,j} \Big) \Big(\prod_{j=1}^{k} X_{i_j} \Big).$$

Stąd, jeśli tylko przyjmiemy, że dla dowolnych $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ prawdziwa jest nierówność:

$$\Big| \operatorname{tr} \Big(\prod_{j=1}^{k} Q_j X_{i_j} \Big) \Big| \leqslant \operatorname{tr} \Big(\prod_{j=1}^{k} X_{i_j} \Big), \tag{1.22}$$

to przy wykorzystaniu liniowości śladu macierzy oraz z faktu, że dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi $\xi_{i,j} \geqslant 0$, mamy:

$$\Big| \operatorname{tr} \Big(\prod_{j=1}^{k} Q_j D_j \Big) \Big| = \Big| \operatorname{tr} \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}} \Big(\prod_{j=1}^{k} \xi_{i_j,j} \Big) \Big(\prod_{j=1}^{k} Q_j X_{i_j} \Big) \Big) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}} \Big(\prod_{j=1}^{k} \xi_{i_j,j} \Big) \Big| \operatorname{tr} \Big(\prod_{j=1}^{k} Q_j X_{i_j} \Big) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}} \Big(\prod_{j=1}^{k} \xi_{i_j,j} \Big) \operatorname{tr} \Big(\prod_{j=1}^{k} X_{i_j} \Big) =$$
$$= \operatorname{tr} \Big(\sum_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,n\}} \Big(\prod_{j=1}^{k} \xi_{i_j,j} \Big) \Big(\prod_{j=1}^{k} X_{i_j} \Big) \Big) = \operatorname{tr} \Big(\prod_{j=1}^{k} D_j \Big)$$

i dostajemy nierówność (1.20). Pozostaje teraz jedynie sprawdzić prawdziwość nierówności (1.22). Ustalmy $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Wybierzmy $r \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $i_r = \min\{i_1, \ldots, i_k\}$ i przyjmijmy oznaczenie:

$$S := \Big(\prod_{j=r+1}^{k} Q_j X_{i_j} \Big) \Big(\prod_{j=1}^{r} Q_j X_{i_j} \Big).$$

Zauważmy, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o kolumnach, których norma euklidesowa jest nie większa niż 1 oraz dla dowolnej macierzy $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ macierz UA ma kolumny o normie euklidesowej nie większej niż 1. Analogiczny wniosek dostajemy, gdy macierz U zastąpimy macierzą X_i, gdzie $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wynika to stąd, że kolumny macierzy UA lub macierzy $X_i A$ są kombinacją liniową ortonormalnych wektorów ze współczynnikami, których suma kwadratów jest mniejsza lub równa 1, co po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa daje poszukiwaną własność. Stąd, na podstawie zasady indukcji matematycznej, wynika, iż kolumny macierzy S mają normę euklidesową nie większą 1. W szczególności dla każdego $i \in \{1, \dots, r\}$ musi więc zachodzić:

$$|(S)_{ii}| \leqslant 1. \tag{1.23}$$

Ponieważ macierz S jest iloczynem macierzy, z których ostatnią jest macierz X_r, więc $(n-r)$ ostatnich kolumn macierzy S składa się z samych zer, czyli dla każdego $i \in \{r+1, \dots, k\}$ mamy:

$$(S)_{ii} = 0. \tag{1.24}$$

Ostatecznie, korzystając z niezmienności śladu macierzy na cykliczną permutację czynników oraz z warunków (1.23) i (1.24), otrzymujemy:

$$\left| \operatorname{tr} \left(\prod_{j=1}^{k} Q_j X_j \right) \right| = |\operatorname{tr} S| = \left| \sum_{i=1}^{n} (S)_{ii} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |(S)_{ii}| \leqslant r \cdot 1 + (n-r) \cdot 0 = r = \operatorname{tr} \left(\prod_{j=1}^{k} X_j \right),$$

czyli nierówność (1.22). Żeby udowodnić nierówność przeciwną do nierówności (1.19), wystarczy zauważyć, że dla każdego $j \in \{1, \dots, n\}$ mamy $W_{j-1}^* V_j^* \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, a więc zachodzi:

$$\begin{aligned} \sup_{U_1,\dots,U_k \in \mathcal{U}_n} \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{j=1}^{k} U_j A_j \right) \right| &\geqslant \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{j=1}^{k} W_{j-1}^* V_j^* A_j \right) \right| = \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{j=1}^{k} V_j^* A_j W_j^* \right) \right| = \\ &= \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{j=1}^{k} D_j \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \sigma_i(A_j) \right| = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \sigma_i(A_j), \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Z przedstawionego twierdzenia łatwo można wyprowadzić analogiczne twierdzenie dla macierzy hermitowskich dodatnio półokreślonych. Zauważmy, że w tym przypadku odpowiednie wartości osobliwe i wartości własne są sobie równe.

Definicja 10. *Dla dowolnej macierzy $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ symbolami $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ oznaczymy wartości własne macierzy A uporządkowane nierosnąco, czyli $\lambda_1(A) \geqslant \dots \geqslant \lambda_n(A)$.*

Twierdzenie 23. *Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Dla macierzy $H_1, \dots, H_k \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$ spełniona jest równość:*

$$\sup_{U_1,\dots,U_k \in \mathcal{U}_n} \left| \operatorname{tr} \left(\prod_{j=1}^{k} U_j H_j \right) \right| = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_i(H_j).$$

Możemy zadać sobie pytanie, czy możemy osłabić założenia powyższego twierdzenia biorąc macierze hermitowskie zamiast macierzy hermitowskich dodatnio półokreślonych. Odpowiedź jest przecząca, co pokazuje następujący przykład.

Przykład 4. *Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Przyjmijmy:*

$$H_1 = \operatorname{diag}(-1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)\ \mathit{krotnie}}), \quad H_2 = \operatorname{diag}(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)\ \mathit{krotnie}})$$

oraz, jeśli $k \geqslant 3$ *to,* $H_j = I$ *dla* $j \in \{3, \dots, k\}$*. Stąd mamy:*

$$\prod_{j=1}^{k} H_j = \mathrm{diag}(-1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)\ krotnie}) \qquad i \qquad \mathrm{tr}\left(\prod_{j=1}^{k} H_j\right) = -1.$$

Można sprawdzić, że:

	λ_1	λ_2	$\dots$	λ_{n-1}	λ_n
H_1	0	0	$\dots$	0	-1
H_2	1	0	$\dots$	0	0
H_3	1	1	$\dots$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
H_k	1	1	$\dots$	1	1

i mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_i(H_j) = 0,$$

czyli:

$$\sup_{U_1,\dots,U_k \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \left| \mathrm{tr}\left(\prod_{j=1}^{k} U_j H_j\right)\right| \geqslant \left| \mathrm{tr}\left(\prod_{j=1}^{k} I H_j\right)\right| = \left| \mathrm{tr}\left(\prod_{j=1}^{k} H_j\right)\right| =$$
$$= |-1| = 1 > 0 = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_i(H_j).$$

Jak widzimy, próbując osłabić założenia twierdzenia 23 napotykamy pewien problem. Jeśli usuniemy założenie o dodatniej półokreśloności macierzy, to aby twierdzenie 23 nadal było prawdziwe musimy usunąć moduł. Aby wyrażenie po prawej stronie pozostało liczbą rzeczywistą musimy też ograniczyć ilość macierzy do dwóch i dowolność macierzy unitarnych tj. do macierzy unitarnej i jej sprzężenia. Po tych zmianach można też dołożyć dodatkową równość z kresem dolnym. Tak zaprojektowane twierdzenie zostało przedstawione przez Yuanyuan Tu i Runqing Su w pracy [50]. Dowód tego twierdzenia przeprowadzimy tą samą metodą jak w dowodzie twierdzenia 21. Oryginalny dowód wykorzystuje narzędzia teorii majoryzacji. Należy jeszcze wspomnieć, że analogiczną nierówność jak we wspomnianym twierdzeniu przedstawił niezależnie Hans Richter w pracy [46].

Twierdzenie 24. *Dla dowolnych macierzy* $A, B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ *spełnione są równości:*

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \mathrm{tr}(UAU^*B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B) \tag{1.25}$$

oraz:

$$\inf_{U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \mathrm{tr}(UAU^*B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_{n-i+1}(B). \tag{1.26}$$

Dowód. Zauważmy, że równość (1.26) wynika bezpośrednio z równości (1.25) poprzez podstawienie macierzy $-B$ w miejsce macierzy B, ponieważ $\lambda_i(-B) = -\lambda_{n-i+1}(B)$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$. Z tego powodu udowodnimy tylko równość (1.25). Rozłóżmy macierze A

i B według wartości własnych, odpowiednio, do postaci:

$$A = VDV^* \qquad \text{oraz} \qquad B = WTW^*,$$

gdzie $V, W \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ oraz $D = \operatorname{diag}\Big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\Big)$ i $T = \operatorname{diag}\Big(\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(B)\Big)$. Stąd korzystając z faktu, że ślad macierzy jest niezależny od cyklicznej permutacji czynników iloczynu macierzy mamy:

$$\operatorname{tr}(UAU^*B) = \operatorname{tr}(UVDV^*U^*WTW^*) = \operatorname{tr}(W^*UVDV^*U^*WT) = \operatorname{tr}(QDQ^*T), \tag{1.27}$$

gdzie $Q := W^*UV \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$. Zapiszmy macierze D i T jako:

$$D = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \qquad \text{oraz} \qquad T = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i, \tag{1.28}$$

gdzie dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ mamy:

$$X_i := \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i \text{ krotnie}}, 0, \ldots, 0),$$

$$\alpha_i := \begin{cases} \lambda_n(A), & \text{gdy } i = 1, \\ \lambda_{n-i+1}(A) - \lambda_{n-i+2}(A), & \text{gdy } i \in \{2, \ldots, n\}, \end{cases}$$

oraz:

$$\beta_i := \begin{cases} \lambda_n(B), & \text{gdy } i = 1, \\ \lambda_{n-i+1}(B) - \lambda_{n-i+2}(B), & \text{gdy } i \in \{2, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę, że $\alpha_i \geqslant 0$ oraz $\beta_i \geqslant 0$ dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ oraz $\alpha_n \in \mathbb{R}$ i $\beta_n \in \mathbb{R}$. Na mocy rozkładów (1.28) mamy:

$$QDQ^*T = Q \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i Q^* \sum_{j=1}^n \beta_j X_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j Q X_i Q^* X_j,$$

skąd równość (1.27), przy wykorzystaniu liniowości śladu macierzy, przechodzi w następujące wyrażenie:

$$\operatorname{tr}(UAU^*B) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j Q X_i Q^* X_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \operatorname{tr}(Q X_i Q^* X_j). \tag{1.29}$$

Ustalmy $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że dla każdego $l \in \{1, \ldots, n\}$ mamy:

$$(QX_iQ^*X_j)_{ll} = \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{i} |(Q)_{lr}|^2, & \text{gdy } l \leqslant j, \\ 0, & \text{gdy } l > j, \end{cases}$$

czyli:

$$\operatorname{tr}(QX_iQ^*X_j) = \sum_{l=1}^{j} \sum_{r=1}^{i} |(Q)_{lr}|^2 = \sum_{r=1}^{i} \sum_{l=1}^{j} |(Q)_{lr}|^2.$$

Macierz Q jest unitarna, więc zachodzi:

$$\sum_{r=1}^{n} |(Q)_{rl}|^2 = 1, \quad l \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{l=1}^{n} |(Q)_{rl}|^2 = 1, \quad r \in \{1, \ldots, n\}.$$

Rozważamy cztery przypadki.

a) Jeśli $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \geqslant j$, to:

$$\operatorname{tr}(QX_iQ^*X_j) \leqslant \sum_{l=1}^{j}\sum_{r=1}^{n} |(Q)_{lr}|^2 = \sum_{l=1}^{j} 1 = j = \operatorname{tr}(X_iX_j).$$

b) Jeśli $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i < j$, to:

$$\operatorname{tr}(QX_iQ^*X_j) \leqslant \sum_{r=1}^{i}\sum_{l=1}^{n} |(Q)_{lr}|^2 = \sum_{r=1}^{i} 1 = i = \operatorname{tr}(X_iX_j).$$

c) Jeśli $i = n$, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, to:

$$\operatorname{tr}(QX_iQ^*X_j) = \sum_{l=1}^{j}\sum_{r=1}^{n} |(Q)_{lr}|^2 = \sum_{l=1}^{j} 1 = j = \operatorname{tr}(X_iX_j).$$

d) Jeśli $j = n$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, to:

$$\operatorname{tr}(QX_iQ^*X_j) = \sum_{r=1}^{i}\sum_{l=1}^{n} |(Q)_{lr}|^2 = \sum_{r=1}^{i} 1 = i = \operatorname{tr}(X_iX_j).$$

Stąd, ponieważ $\alpha_i \geqslant 0$ oraz $\beta_j \geqslant 0$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ oraz $\alpha_n \in \mathbb{R}$ i $\beta_n \in \mathbb{R}$, więc:

$$\alpha_i\beta_j \operatorname{tr}(QX_iQ^*X_j) \leqslant \alpha_i\beta_j \operatorname{tr}(X_iX_j) \tag{1.30}$$

dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Równanie (1.29), na podstawie nierówności (1.30) oraz liniowości śladu macierzy, przyjmuje postać nierówności:

$$\operatorname{tr}(UAU^*B) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j \operatorname{tr}(X_iX_j) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j \operatorname{tr}(X_iX_j)\right).$$

Ponieważ po elementarnych przekształceniach i skorzystaniu z rozkładu (1.28) otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_j X_iX_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \sum_{i=1}^{n} \beta_j X_j = TD = \operatorname{diag}\Big(\lambda_1(A)\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(A)\lambda_n(B)\Big),$$

więc:

$$\operatorname{tr}(UAU^*B) \leqslant \operatorname{tr}\Bigg(\operatorname{diag}\Big(\lambda_1(A)\lambda_1(B), \ldots, \lambda_n(A)\lambda_n(B)\Big)\Bigg) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B),$$

co po przejściu do kresu górnego po dowolnych $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ daje:

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*B) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B).$$

Aby udowodnić przeciwną nierówność, wystarczy zauważyć, że $WV^* \in \mathcal{U}_n$, a więc zachodzi:

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*B) \geqslant \operatorname{tr}(WV^*AVW^*B) = \operatorname{tr}(V^*AVW^*BW) = \operatorname{tr}(DT) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B),$$

co prowadzi do tezy twierdzenia. □

Uwaga 4. *Podobnie jak w twierdzeniu 24, tak i w twierdzeniu 22 można rozważać oprócz kresu górnego również kres dolny. W tym przypadku, przy założeniach takich jak w twierdzeniu 22, mamy:*

$$\inf_{U_1,\ldots,U_k \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})} \left| \operatorname{tr}\left(\prod_{j=1}^{k} U_j A_j \right) \right| = 0.$$

Można uogólnić twierdzenie 24 zmniejszając wymiar drugiej macierzy hermitowskiej i zamieniając macierz unitarną na półunitarną. Aby po tych zmianach twierdzenie nadal było prawdziwe trzeba dodatkowo założyć, by druga macierz hermitowska była dodatnio półokreślona. Wspomniane uogólnienie jest podane w znanej monografii Alberta W. Marshalla, Ingrama Olkina i Barry'ego C. Arnolda z teorii majoryzacji – zob. [38, Chapter 20, Proposition A.2.a]. Jednak brakuje w nim założenia, by druga macierz hermitowska była dodatnio półokreślona. Stosowny kontrprzykład podamy po twierdzeniu, przytoczonym oczywiście już w poprawnej wersji.

Twierdzenie 25. *Dla każdej macierzy $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ oraz każdej macierzy $B \in \mathcal{H}_k^+(\mathbb{C})$ spełnione są równości:*

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*B) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A)\lambda_i(B)$$

oraz:

$$\inf_{U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*B) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n-j+1}(A)\lambda_j(B).$$

Nim przejdziemy do dowodu powyższego twierdzenia, rozważymy pomocnicze twierdzenie zwane twierdzeniem Poincarégo o oddzielaniu[4] (ang. *Poincaré separation theorem*).

Twierdzenie 26. *Dla dowolnej macierzy $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ oraz dowolnej macierzy $U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})$ zachodzi $UAU^* \in \mathcal{H}_k(\mathbb{C})$ oraz:*

$$\lambda_i(UAU^*) \leqslant \lambda_i(A)$$

dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$.

[4]Można przypuszczać, że słowo „oddzielanie" w nazwie twierdzenia bierze się stąd, że w najogólniejszej wersji twierdzenia dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ spełnione jest:

$$\lambda_{n-k+i}(A) \leqslant \lambda_i(UAU^*) \leqslant \lambda_i(A),$$

czyli wartości własne macierzy UAU^* „oddzielają" od siebie największą i najmniejszą wartość własną macierzy A.

Dowód. Zauważmy, że na podstawie ortogonalizacji Grama-Schmidta można znaleźć macierz $V \in \mathcal{U}_{(n-k),n}(\mathbb{C})$ taką, że:

$$W := \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}).$$

Wtedy spełnione jest:

$$WAW^* = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} UA \\ VA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & V^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UAU^* & UAV^* \\ VAU^* & VAV^* \end{bmatrix} \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}).$$

Oczywiście również $UAU^* \in \mathcal{H}_k(\mathbb{C})$. Niech $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n$ oraz $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{C}^k$ będą ortonormalnymi zbiorami wektorów własnych odpowiednio macierzy WAW^* i UAU^*, czyli:

$$WAW^* x_i = \lambda_i(WAW^*) x_i \qquad \text{dla każdego } i \in \{1, \ldots, n\}$$

oraz:

$$UAU^* y_i = \lambda_i(UAU^*) y_i \qquad \text{dla każdego } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Ponieważ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ zachodzi:

$$\det(WAW^* - \lambda I) = \det\Big(W(A - \lambda I)W^*\Big) = \det(WW^*)\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I),$$

więc dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$ możemy przyjąć:

$$\lambda_i(A) = \lambda_i(WAW^*).$$

Dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ zdefiniujmy wektor $z_i \in \mathbb{C}^n$ jako:

$$z_i := \begin{bmatrix} y_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Ustalmy pewne $i \in \{1, \ldots, k\}$ oraz rozważmy dwie podprzestrzenie liniowe R oraz S przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^n$:

$$R = \operatorname{span}\{x_i, \ldots, x_n\} \qquad \text{oraz} \qquad S = \operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_i\}.$$

Ponieważ:

$$\dim R + \dim S = (n - i + 1) + i = n + 1,$$

więc $\dim(R \cap S) \geqslant 1$, czyli istnieje wektor jednostkowy $u \in R \cap S \subset \mathbb{C}^n$. Ponieważ $u \in S$, więc istnieje wektor jednostkowy $v \in \mathbb{C}^k$ taki, że:

$$u = \begin{bmatrix} v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad v \in \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_i\}.$$

Stąd istnieją skalary $\alpha_i, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_i \in \mathbb{C}$, dla których:

$$u = \sum_{j=i}^{n} \alpha_j x_j \qquad \text{oraz} \qquad v = \sum_{j=1}^{i} \beta_j y_j,$$

gdzie z twierdzenia Pitagorasa zachodzi:

$$\sum_{j=i}^{n} |\alpha_j|^2 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{j=1}^{i} |\beta_j|^2 = 1.$$

Na tej podstawie znajdujemy:

$$\begin{aligned}\langle WAW^*u, u\rangle &= \left\langle \sum_{j=i}^{n} \alpha_j WAW^* x_j, \sum_{l=i}^{n} \alpha_l x_l \right\rangle = \left\langle \sum_{j=i}^{n} \alpha_j \lambda_j(A) x_j, \sum_{l=i}^{n} \alpha_l x_l \right\rangle = \\ &= \sum_{j=i}^{n}\sum_{l=i}^{n} \alpha_j \bar{\alpha}_l \lambda_j(A) \langle x_j, x_l\rangle = \sum_{j=i}^{n} |\alpha_j|^2 \lambda_j(A) \leqslant \lambda_i(A) \sum_{j=i}^{n} |\alpha_j|^2 = \lambda_i(A)\end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned}\langle UAU^*v, v\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{i} \beta_j UAU^* y_j, \sum_{l=1}^{i} \beta_l y_l \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{i} \beta_j \lambda_j(UAU^*) y_j, \sum_{l=1}^{i} \beta_l y_l \right\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} \beta_j \bar{\beta}_l \lambda_j(UAU^*) \langle y_j, y_l\rangle = \sum_{j=1}^{i} |\beta_j|^2 \lambda_j(UAU^*) \geqslant \\ &\geqslant \lambda_i(UAU^*) \sum_{j=1}^{i} |\beta_j|^2 = \lambda_i(UAU^*).\end{aligned}$$

Ponieważ jednak:

$$\begin{aligned}\langle WAW^*u, u\rangle = u^*WAW^*u &= \begin{bmatrix} v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} UAU^* & UAV^* \\ VAU^* & VAV^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} v^* & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} UAU^*v \\ VAU^*v \end{bmatrix} = v^*UAU^*v = \langle UAU^*v, v\rangle,\end{aligned}$$

więc otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Teraz możemy przejść do anonsowanego powyżej dowodu.

Dowód twierdzenia 25. Zacznijmy od tego, że druga równość wynika z pierwszej przez podstawienie macierzy $-A$ w miejsce macierzy A. Stąd wystarczy udowodnić pierwszą równość. Na mocy twierdzenia 24 dla każdego $U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})$ mamy:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(UAU^*)\lambda_i(B) \geqslant \operatorname{tr}(IUAU^*I^*B) = \operatorname{tr}(UAU^*B),$$

gdyż $UAU^* \in \mathcal{H}_k(\mathbb{C})$. Wykorzystując twierdzenie 26 oraz fakt, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ zachodzi $\lambda_i(B) \geqslant 0$, otrzymujemy:

$$\operatorname{tr}(UAU^*B) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(UAU^*)\lambda_i(B) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A)\lambda_i(B).$$

Stąd, po przejściu do kresu górnego po dowolnych $U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})$, dostajemy:

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*B) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A)\lambda_i(B).$$

Udowodnimy nierówność przeciwną. Rozłóżmy macierze A i B według wartości własnych, odpowiednio, do postaci:

$$A = VDV^* \qquad \text{oraz} \qquad B = WTW^*,$$

gdzie $V \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, $W \in \mathcal{U}_k(\mathbb{C})$ i $D = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$, $T = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(B), \ldots, \lambda_k(B)\big)$. Zdefiniujmy macierz $F \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})$ wzorem:

$$F := \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

i zauważmy, że $WFV^* \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})$. Stąd otrzymujemy:

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*B) \geqslant \operatorname{tr}(WFV^*AVF^*W^*B) =$$
$$= \operatorname{tr}(FV^*AVF^*W^*BW) = \operatorname{tr}(FDF^*T) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A)\lambda_i(B),$$

ponieważ:

$$FDF^* = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_k(A)\big),$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Przejdźmy teraz do wspomnianego wcześniej kontrprzykładu.

Przykład 5. *Niech:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy:

$$WAW^*B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad i \qquad \operatorname{tr}(WAW^*B) = 0$$

oraz:

$$\lambda_1(A) = 1, \qquad \lambda_2(A) = 1, \qquad \lambda_3(A) = -1, \qquad \lambda_1(B) = 0, \qquad \lambda_2(B) = -1.$$

Stąd znajdujemy:

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_{2,3}(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*B) \geqslant \operatorname{tr}(WAW^*B) = 0 > -1 = \lambda_1(A)\lambda_1(B) + \lambda_2(A)\lambda_2(B).$$

Zauważmy, że podstawiając w twierdzeniu 25 macierz jednostkową I w miejsce macierzy B, możemy otrzymać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 27. *Dla każdej macierzy $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ spełnione są równości:*

$$\sup_{U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) \qquad \text{oraz} \qquad \inf_{U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})} \operatorname{tr}(UAU^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n-j+1}(A).$$

Twierdzenie to będzie wykorzystane w kolejnym podrozdziale.

1.3. Mocniejsza wersja nierówności Hadamarda według Krejna

W artykule [27] Mark Grigorjewicz Krejn zajmował się twierdzeniem o uśrednianiu operatorów jądrowych. Jako rezultat uzupełniający główny wynik podał następującą nierówność, będącą wzmocnieniem nierówności Hadamarda.

Twierdzenie 28. *Dla dowolnej macierzy $H \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{K})$ prawdziwa jest następująca nierówność:*

$$\det H \leqslant \left(1 - \frac{\kappa}{n^2 - n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{\kappa}{n}\right) \prod_{i=1}^{n} (H)_{ii},$$

gdzie:

$$\kappa := \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(H)_{ij}}{\sqrt{(H)_{ii}(H)_{jj}}}.$$

Zauważmy, iż powyższa nierówność jest ewidentnym wzmocnieniem nierówności Hadamarda. Wynika to stąd, że funkcja:

$$\Big(-(n^2 - n), n^2 - n\Big) \ni \kappa \mapsto \left(1 - \frac{\kappa}{n^2 - n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{\kappa}{n}\right)$$

przyjmuje wartość maksymalną równą 1 dla $\kappa = 0$. Warto zastanowić się nad pytaniem, czy jest ona wzmocnieniem zoptymalizowanej nierówności Hadamarda. W związku z nim zwróćmy uwagę, że majoranta wyznacznika macierzy H jest funkcją elementów na przekątnej macierzy H dla klasycznej nierówności Hadamarda, funkcją elementów na przekątnej macierzy H i części rzeczywistych elementów poza przekątną macierzy H dla nierówności Hadamarda według Krejna oraz funkcją wszystkich elementów macierzy H dla zoptymalizowanej nierówności Hadamarda. Na tej podstawie nie dziwi niejednoznaczna odpowiedź na powyżej postawione pytanie, a czego dowodzą poniższe dwa przykłady.

Przykład 6. *Weźmy dodatnio określoną macierz hermitowską:*

$$H = \begin{bmatrix} 19 & 5 & -1 & -10 \\ 5 & 9 & 9 & 0 \\ -1 & 9 & 13 & 4 \\ -10 & 0 & 4 & 13 \end{bmatrix}.$$

Z klasycznej nierówności Hadamarda mamy:

$$\det H \leqslant 28899,$$

natomiast ze zoptymalizowanej nierówności Hadamarda dostajemy:

$$\det H \leqslant 8892,$$

podczas gdy z nierówności Hadamarda w wersji Krejna otrzymujemy tylko:

$$\det H \leqslant 26208.$$

Warto również to porównać z wartością wyznacznika:

$$\det H = 1764$$

Przykład 7. *Rozważmy tym razem dodatnio określoną macierz hermitowską postaci:*

$$H = \begin{bmatrix} 13 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 18 & -3 & -3 \\ -4 & -3 & 9 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & 14 \end{bmatrix}.$$

Klasyczna nierówność Hadamarda daje nam oszacowanie:

$$\det H \leqslant 29484.$$

Zauważmy, że zoptymalizowana nierówność Hadamarda daje nam tylko:

$$\det H \leqslant 25452,$$

a nierówność Hadamarda w wersji Krejna znacznie lepiej:

$$\det H \leqslant 19950.$$

Natomiast wartość wyznacznika to:

$$\det H = 17424.$$

Aby udowodnić twierdzenie 28 rozważmy następujący lemat. Jest on jednym z podstawowych wyników teorii majoryzacji (zob. [38]), którą jednak pominiemy w tej dysertacji, tak jak Krejn pominął ją w swoich rozważaniach.

Lemat 3. *Niech liczby* $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$ *i* $\beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n \geqslant 0$ *będą takie, że dla każdego* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *spełnione jest:*

$$\sum_{i=1}^{j} \alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{j} \beta_i, \tag{1.31}$$

a poza tym zachodzi równość:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i. \tag{1.32}$$

Wtedy prawdziwa jest nierówność:

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Dowód. Rozważmy funkcję $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$f(t) = \prod_{i=1}^{n} \Big(t\alpha_i + (1-t)\beta_i\Big).$$

Jej pochodna ma postać:

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \Big(t\alpha_i + (1-t)\beta_i\Big)\right)(\alpha_j - \beta_j),$$

skąd, po skorzystaniu z przekształcenia Abela dla sum skończonych, dostajemy:

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \Big(t\alpha_i + (1-t)\beta_i\Big)\right) - \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j+1}}^{n} \Big(t\alpha_i + (1-t)\beta_i\Big)\right)\right) \sum_{i=1}^{j}(\alpha_i - \beta_i) +$$
$$+ \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n} \Big(t\alpha_i + (1-t)\beta_i\Big)\right) \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i).$$

Na mocy równości (1.32) otrzymujemy z powyższego:

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \Big(t(\alpha_{j+1} - \alpha_j) + (1-t)(\beta_{j+1} - \beta_j)\Big)\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\notin\{j,j+1\}}}^{n} \Big(t\alpha_i + (1-t)\beta_i\Big)\right) \sum_{i=1}^{j}(\alpha_i - \beta_i).$$

Ponieważ dla każdego $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ mamy $\alpha_j \geqslant \alpha_{j+1}$ oraz $\beta_j \geqslant \beta_{j+1}$, więc:

$$t(\alpha_{j+1} - \alpha_j) + (1-t)(\beta_{j+1} - \beta_j) \leqslant 0,$$

a ponieważ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi $\alpha_i \geqslant 0$ oraz $\beta_i \geqslant 0$, więc dla każdego $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ otrzymujemy:

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\notin\{j,j+1\}}}^{n} \Big(t\alpha_i + (1-t)\beta_i\Big) \geqslant 0.$$

To zaś w połączeniu z nierównością (1.31) daje:

$$f'(t) \geqslant 0,$$

czyli funkcja f jest niemalejąca, więc ostatecznie dostajemy:

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = f(1) \geqslant f(0) = \prod_{i=1}^{n} \beta_i,$$

co było do pokazania. $\square$

Oprócz powyższego lematu do udowodnienia twierdzenia 28 użyjemy następującego twierdzenia, które zostało przedstawione przez Krejna w wersji operatorowej. Tutaj również będziemy oznaczać wartości własne macierzy hermitowskiej tak jak w poprzednim podrozdziale.

Twierdzenie 29. *Niech macierze $H_1, \ldots, H_r \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$ mają dokładnie takie same wartości własne. Wtedy dla dowolnych liczb $\mu_1, \ldots, \mu_r \in (0,1)$ takich, że:*

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j = 1,$$

prawdziwa jest nierówność:

$$\det H_1 \leqslant \det\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j H_j\right).$$

Dowód. Ustalmy $k \in \{1, \ldots, n\}$. Weźmy dowolną macierz $U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})$. Na mocy twierdzenia 27 zachodzi:

$$\operatorname{tr}(UH_jU^*) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_1),$$

gdzie ostatnie przejście wynika z faktu, że wszystkie macierze $H_1, \ldots, H_r$ mają takie same wartości własne. Przemnażając j-tą nierówność przez μ_j i sumując tak powstałe nierówności stronami, otrzymujemy:

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j \operatorname{tr}(UH_jU^*) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \mu_j \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_1) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_1),$$

co z liniowości śladu daje nam:

$$\operatorname{tr}\left(U\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j H_j\right)U^*\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_1).$$

Ponieważ $\sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j H_j \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$, więc przechodząc do kresu górnego po wszystkich macierzach $U \in \mathcal{U}_{k,n}(\mathbb{C})$, otrzymujemy z twierdzenia 27 nierówność:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j H_j\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_1), \tag{1.33}$$

prawdziwą dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$ z dowolności wyboru k. Co więcej jeszcze mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j H_j\right) &= \operatorname{tr}\left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j H_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \operatorname{tr} H_j = \\ &= \sum_{j=1}^{r} \mu_j \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(H_j) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(H_1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(H_1). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Nierówność (1.33) oraz równość (1.34) na podstawie lematu 3 implikują, że:

$$\det\left(\sum_{j=1}^{r}\mu_j H_j\right) \geqslant \det H_1,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Potrzebny nam jeszcze będzie lemat, mówiący o wartości wyznacznika pewnej specyficznej macierzy.

Lemat 4. *Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{C}$ oraz macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ takiej, że:*

$$(A)_{ij} = \begin{cases} x, & \text{gdy } i = j, \\ y, & \text{gdy } i \neq j, \end{cases}$$

zachodzi:

$$\det A = (x-y)^{n-1}\big(x + (n-1)y\big).$$

Dowód. Aby obliczyć wyznacznik:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & y & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & y & \cdots & y \\ y & y & x & y & \cdots & y \\ y & y & y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix},$$

odejmijmy pierwszy wiersz od wszystkich pozostałych, otrzymując w wyniku tego:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & y & y & y & \cdots & y \\ y-x & x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y-x & 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ y-x & 0 & 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y-x & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}.$$

Dodając teraz do pierwszej kolumny wszystkie pozostałe kolumny, dostajemy:

$$\det A = \begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & y & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix},$$

skąd już bezpośrednio odczytujemy wyznacznik macierzy A, co było do pokazania. □

Możemy już teraz przejść do dowodu głównego twierdzenia tego podrozdziału.

Dowód twierdzenia 28. Niech macierz $G \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$ będzie taka, że:

$$(G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j, \\ \frac{(H)_{ij}}{\sqrt{(H)_{ii}(H)_{jj}}}, & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

Wtedy spełnione jest:

$$\det H = \left(\prod_{i=1}^{n} (H)_{ii} \right) \det G \tag{1.35}$$

oraz:

$$\kappa = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{n} (G)_{kl}.$$

Dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$ zdefiniujmy macierz $P_\sigma \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ jako:

$$(P_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \sigma(i) = j, \\ 0, & \text{gdy } \sigma(i) \neq j. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$ macierz $P_\sigma G P_\sigma^* \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$, a jej wartości własne są takie same jak wartości własne macierzy G. Poza tym:

$$(P_\sigma G P_\sigma^*)_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} (P_\sigma)_{ik} (G)_{kl} (P_\sigma^*)_{lj} = \sum_{k,l=1}^{n} (P_\sigma)_{ik} (G)_{kl} (P_\sigma)_{jl} = (G)_{\sigma(i),\sigma(j)}.$$

Jako że $P_{\mathrm{id}} = I$, więc na mocy twierdzenia 29 zachodzi:

$$\det G \leqslant \det \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma G P_\sigma^* \right). \tag{1.36}$$

Zwróćmy uwagę, że jeśli $i = j$, to:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma G P_\sigma^* \right)_{ij} &= \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma G P_\sigma^* \right)_{ii} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (G)_{\sigma(i),\sigma(i)} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \overline{\{\sigma \in S_n \colon \sigma(i) = k\}} (G)_{kk} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} (n-1)! \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

a jeżeli $i \neq j$, to wtedy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma G P_\sigma^* \right)_{ij} &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (G)_{\sigma(i),\sigma(j)} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{n} \overline{\{\sigma \in S_n \colon \sigma(i) = k \wedge \sigma(j) = l\}} (G)_{kl} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{n} (n-2)! (G)_{kl} = \frac{1}{n^2 - n} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{n} (G)_{kl} = \frac{\kappa}{n^2 - n}. \end{aligned}$$

Stąd, korzystając z lematu 4, otrzymujemy:

$$\det\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} P_\sigma G P_\sigma^*\right) = \left(1-\frac{\kappa}{n^2-n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{(n-1)\kappa}{n^2-n}\right) = \left(1-\frac{\kappa}{n^2-n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{\kappa}{n}\right),$$

co w połączeniu z równością (1.35) i nierównością (1.36) prowadzi do tezy twierdzenia. □

2

Przekształcenia liniowe zachowujące pewne rodziny macierzy

W tym rozdziale będziemy przez $\mathcal{M}_n(R)$, $\mathcal{GL}_n(R)$, $\mathcal{SL}_n(R)$, $\Sigma_n(R)$ i $\Theta_n(R)$ oznaczać zbiory wszystkich macierzy odpowiednio kwadratowych, nieosobliwych, nieosobliwych o wyznaczniku równym jeden, osobliwych oraz osobliwych o wyznaczniku równym zero; wszystkie te macierze są stopnia n nad R, gdzie R jest ciałem lub pierścieniem przemiennym z jedynką oraz $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Zauważmy, że jeśli R jest ciałem, to $\Sigma_n(R) = \Theta_n(R)$.

Przypomnijmy jeszcze dwie definicje.

Definicja 11. *Przekształcenie liniowe* $L\colon \mathcal{M}_n(R) \to \mathcal{M}_n(R)$ *nazywamy osobliwym, jeśli* $\ker L \neq \{\mathbf{0}\}$.

Definicja 12. *Przekształcenie liniowe* $L\colon \mathcal{M}_n(R) \to \mathcal{M}_n(R)$ *nazywamy nieosobliwym, jeśli* $\ker L = \{\mathbf{0}\}$.

2.1. Przekształcenia liniowe zachowujące wyznacznik macierzy

Przedstawimy krótko historię tytułowego zagadnienia zachowywania wyznacznika macierzy. Przyjmijmy, że $\mathbb{F}$ jest dowolnym ciałem. Następujące twierdzenie zawdzięczamy jednemu z klasyków algebraicznej teorii macierzy Ferdinandowi Georgowi Frobeniusowi. Określa ono specyficzną postać przekształcenia liniowego, które zachowuje wyznacznik każdej macierzy.

Twierdzenie 30. *Jeśli przekształcenie liniowe* $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ *zachowuje wyznacznik macierzy, czyli:*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon\ \det L(X) = \det X,$$

to istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$*, dla których* $\det(PQ) = 1$*, oraz zachodzi jeden z dwóch warunków:*

$$\textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PXQ, \qquad \textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PX^TQ.$$

Frobenius w pracy [16] podał powyższe twierdzenie przy założeniu, że $\mathbb{F}$ jest ciałem liczb zespolonych. Amerykańskim matematykom Marvinowi Marcusowi i Benjaminowi Nelsonowi Moylsowi zawdzięczamy natomiast kolejny dowód twierdzenia podanego przez Frobeniusa (zob. [37]). Następnie polski matematyk Henryk Minc w pracy [40] pokazał, że w twierdzeniu 30 wystarczy założyć, iż ciało $\mathbb{F}$ jest algebraicznie domknięte o charakterystyce zero. I wreszcie w prezentowanej tutaj rozprawie pokażemy, że w twierdzeniu 30 można przyjąć jeszcze słabsze założenie, a mianowicie tak jak we wstępie że $\mathbb{F}$ jest dowolnym ciałem o dowolnej charakterystyce. Dowód twierdzenia 30 oprzemy na twierdzeniu 31 z kolejnego podrozdziału. Zamienienie kolejności podania tych dwóch twierdzeń wynika z faktu, iż nie chcemy zaburzyć chronologii powstawania dwóch podstawowych twierdzeń tego rozdziału. Zauważmy, że nie można tu wykorzystać oryginalnego pomysłu Frobeniusa, ponieważ w swoim dowodzie korzystał on z faktu, iż jeśli dwie funkcje wielomianowe są równe, to mają identyczne współczynniki, co nie zawsze jest prawdą w ciałach skończonych.

Dowód twierdzenia 30. Oczywistym jest, że przekształcenie L zachowuje zbiór macierzy osobliwych, tj. $L\big(\Sigma_n(\mathbb{F})\big) \subset \Sigma_n(\mathbb{F})$. Dla każdego $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ oznaczmy przez $D_k^1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ oraz $D_k^0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ macierze diagonalne odpowiednio:

$$D_k^1 := \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ krotnie}}, 0, \ldots, 0)$$

oraz:

$$D_k^0 := \operatorname{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ krotnie}}, 1, \ldots, 1).$$

Załóżmy nie wprost, że przekształcenie L jest osobliwe, czyli z definicji istnieje macierz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ taka, że $L(A) = \mathbf{0}$. Wtedy istnieją macierze $Y, Z \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ takie, że:

$$A = YD_t^1 Z,$$

gdzie $t = \operatorname{rank} A \neq 0$ (zob. [17]). Zdefiniujmy macierz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ wzorem:

$$B := YD_t^0 Z.$$

Ponieważ:

$$YZ = Y(D_t^1 + D_t^0)Z = YD_t^1 Z + YD_t^0 Z = A + B,$$

więc dostajemy:

$$\begin{aligned} \det(YZ) = \det(A + B) = \det L(A + B) = \det L(B) = \\ = \det B = \det(YD_t^0 Z) = \det(YZ) \det D_t^1, \end{aligned}$$

czyli:

$$\det D_t^0 = 1,$$

a więc $D_t^0 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$, a stąd $t = 0$, co prowadzi do sprzeczności, zatem przekształcenie L jest nieosobliwe. Używając twierdzenia 31, otrzymujemy poszukiwaną tezę. □

2.2. Nieosobliwe przekształcenia liniowe zachowujące macierze osobliwe (odpowiednio – nieosobliwe)

Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem. Rozważmy teraz pewne twierdzenie, które wyrosło z twierdzenia Frobeniusa o przekształceniu liniowym zachowującym wyznacznik macierzy. Zawdzięczamy go francuskiemu matematykowi Jeanowi Dieudonné – zob. [12]. Opisuje ono postać przekształcenia liniowego, które zachowuje zbiór macierzy osobliwych.

Twierdzenie 31. *Jeśli* $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ *jest nieosobliwym przekształceniem liniowym takim, że* $L\Big(\Sigma_n(\mathbb{F})\Big) \subset \Sigma_n(\mathbb{F})$*, to istnieją macierze* $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$*, dla których:*

$$\textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PXQ, \qquad \textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PX^TQ.$$

Do powyższego twierdzenia bardzo prosto jest podać twierdzenie dualne. Mówi ono o postaci przekształcenia liniowego, które zachowuje zbiór macierzy nieosobliwych.

Twierdzenie 32. *Jeśli* $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ *jest nieosobliwym przekształceniem liniowym takim, że* $L\Big(\mathcal{GL}_n(\mathbb{F})\Big) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$*, to istnieją macierze* $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$*, dla których:*

$$\textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PXQ, \qquad \textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PX^TQ.$$

W tym podrozdziale udowodnimy twierdzenie 31 na podstawie poniższego twierdzenia, którego autorem również jest Dieudonné.

Twierdzenie 33. *Niech przestrzeń liniowa* $\mathcal{V} \subset \Sigma_n(\mathbb{F})$ *będzie wymiaru* $n^2 - n$*. Wtedy:*

$$\textit{albo} \qquad \exists u \in \mathbb{F}^{n\times 1} \setminus \{\mathbf{0}\}\colon \mathcal{V} = \mathcal{R}_n^u(\mathbb{F}), \qquad \textit{albo} \qquad \exists v \in \mathbb{F}^{1\times n} \setminus \{\mathbf{0}\}\colon \mathcal{V} = \mathcal{L}_n^v(\mathbb{F}),$$

gdzie:

$$\mathcal{R}_n^u(\mathbb{F}) := \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon Xu = \mathbf{0}\} \qquad \textit{oraz} \qquad \mathcal{L}_n^v(\mathbb{F}) := \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon vX = \mathbf{0}\}.$$

Najpierw podamy autorski dowód twierdzenia 33, który został oparty na metodach pochodzących z pracy [39].

Dowód twierdzenia 33. Wprowadzając na zbiorze $\{1, \ldots, n\}^2$ porządek leksykograficzny $\prec$, możemy przestrzeń $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ utożsamić z przestrzenią liniową $\mathbb{F}^{n^2}$. Przypomnijmy, że porządek $\prec$ definiujemy dla dowolnych par $(i,j), (k,l) \in \{1, \ldots, n\}^2$ następująco:

$$(i,j) \prec (k,l) \iff \Big(i < k \ \vee \ (i = k \ \wedge \ j < l)\Big).$$

Dla dowolnej macierzy $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ zdefiniujemy jeszcze:

$$w(X) := \min\Big\{(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2\colon (X)_{ij} \neq 0\Big\},$$

tzn. $w(X)$ jest parą indeksów (i,j) najmniejszą względem relacji $\prec$ na zbiorze niezerowych elementów macierzy X. Dla przestrzeni liniowej $\mathcal{V}$ znajdujemy bazę $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_{n^2-n}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ w takiej postaci, aby zachodziło:

$$w(B_1) \prec w(B_2) \prec \ldots \prec w(B_{n^2-n}) \tag{2.1}$$

oraz:

$$(B_s)_{w(B_s)} = 1, \qquad (B_s)_{w(B_t)} = 0 \tag{2.2}$$

dla dowolnych $s, t \in \{1, \ldots, r\}$, $s < t$. W tym celu wystarczy na macierzach dowolnej bazy przestrzeni $\mathcal{V}$ rozważanych jako wektory przestrzeni $\mathbb{F}^{n^2}$ przeprowadzić algorytm eliminacji Gaussa.

Pomocniczo zdefiniujmy kwadratową macierz zerojedynkową F stopnia n powiązaną z bazą $\mathcal{B}$ następująco:

$$(F)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy istnieje } s \in \{1, \ldots, n^2 - n\} \text{ takie, że } w(B_s) = (i, j), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zauważmy, że z warunku (2.1) wynika, że w macierzy F jest dokładnie n zer, a każda jedynka w macierzy F „odpowiada” dokładnie jednej macierzy z bazy $\mathcal{B}$. Załóżmy nie wprost, że żaden wiersz oraz żadna kolumna macierzy F nie jest zerowa. Wtedy, na podstawie lematu 5 istnieje permutacja $\sigma \in S_n$ taka, że:

$$(F)_{i,\sigma(i)} = 1$$

dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Stąd, na mocy definicji macierzy F, możemy rozważyć macierze $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ takie, że dla każdego $s \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi:

$$w(A_s) = \big(s, \sigma(s)\big).$$

To zaś oznacza, że macierze $A_1, \ldots, A_n$ łącznie z permutacją σ spełniają warunki lematu 6, na podstawie którego istnieją współczynniki $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \{0, 1\}$ takie, że:

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s A_s \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}).$$

Ponieważ jednak:

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s A_s \in \operatorname{span}\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \operatorname{span} \mathcal{B} \subset \Sigma_n(\mathbb{F}),$$

więc dochodzimy do sprzeczności z przypuszczeniem, że żaden wiersz oraz żadna kolumna macierzy F nie jest zerowa.

Załóżmy, że n-ty wiersz macierzy F jest wierszem zerowym. Korzystając z definicji macierzy F, możemy przyjąć, że:

$$\mathcal{B} = \Big\{E_{st} \colon s \in \{1, \ldots, n-1\} \wedge t \in \{1, \ldots, n\}\Big\},$$

oraz:

$$w(E_{st}) = (s, t)$$

dla dowolnych $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $t \in \{1, \ldots, n\}$. Na podstawie definicji funkcji w oraz warunku (2.2) wnioskujemy, że:

$$(E_{st})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (i, j) = (s, t), \\ 0, & \text{gdy } (i, j) \neq (s, t) \wedge i \neq n. \end{cases}$$

Ustalmy liczby $\hat{s} \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\hat{t} \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $\hat{\jmath} \in \{1, \ldots, n\}$, $\hat{\jmath} \neq \hat{t}$, a także permutację $\tau \in S_n$ taką, że $\tau(\hat{s}) \neq \hat{t}$ i $\tau(n) = \hat{\jmath}$. Zauważmy, że:

$$Y := \sum_{s=1}^{n-1} E_{s,\tau(s)} \in \Sigma_n(\mathbb{F})$$

oraz:

$$(Y)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \tau(i) = j \wedge i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ 0, & \text{gdy } \tau(i) \neq j \wedge i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ \sum\limits_{s=1}^{n-1} (E_{s,\tau(s)})_{n\hat{\jmath}}, & \text{gdy } (i,j) = (n, \hat{\jmath}). \end{cases}$$

Jeśli $\varrho \in S_n$ i $\varrho \neq \tau$, to istnieje $r \in \{1, \dots, n-1\}$ takie, że $\varrho(r) \neq \tau(r)$ i wtedy $(Y)_{r,\varrho(r)} = 0$. Stąd, na mocy permutacyjnej definicji wyznacznika, mamy:

$$0 = \det Y = \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{s=1}^{n-1} (E_{s,\tau(s)})_{n\hat{\jmath}}. \tag{2.3}$$

Kolejno stwierdzamy, że:

$$Z := \sum_{s=1}^{n-1} E_{s,\tau(s)} + E_{\hat{s}\hat{t}} \in \Sigma_n(\mathbb{F})$$

oraz:

$$(Z)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \Big(\tau(i) = j \wedge i \in \{1, \dots, n-1\}\Big) \vee (i,j) = (\hat{s}, \hat{t}), \\ 0, & \text{gdy } \Big(\tau(i) \neq j \wedge i \in \{1, \dots, n-1\}\Big) \wedge (i,j) \neq (\hat{s}, \hat{t}), \\ \sum\limits_{s=1}^{n-1} (E_{s,\tau(s)})_{n\hat{\jmath}} + (E_{\hat{s}\hat{t}})_{n\hat{\jmath}}, & \text{gdy } (i,j) = (n, \hat{\jmath}). \end{cases}$$

Niech $\varrho \in S_n$ i $\varrho \neq \tau$. Jeśli $\varrho(\hat{s}) \neq \tau(\hat{s})$ i $\varrho(\hat{s}) \neq \hat{t}$, to mamy $(Z)_{\hat{s},\varrho(\hat{s})} = 0$. Natomiast jeśli $\varrho(\hat{s}) = \tau(\hat{s})$, to istnieje $r \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{\hat{s}\}$ takie, że $\varrho(r) \neq \tau(r)$ i stąd $(Z)_{r,\varrho(r)} = 0$. Jeżeli zaś $\varrho(\hat{s}) = \hat{t}$, to ponieważ $p := \tau^{-1}(\hat{t}) \neq \hat{s}$, więc:

$$\varrho(p) \neq \varrho(\hat{s}) = \hat{t} = \tau\Big(\tau^{-1}(\hat{t})\Big) = \tau(p).$$

Jednakże $p \in \{1, \dots, n-1\}$, czyli $(Z)_{p,\varrho(p)} = 0$. Używając permutacyjnej definicji wyznacznika, dostajemy na podstawie powyższego, że:

$$0 = \det Z = \operatorname{sgn}(\tau) \left(\sum_{s=1}^{n-1} (E_{s,\tau(s)})_{n\hat{\jmath}} + (E_{\hat{s}\hat{t}})_{n\hat{\jmath}} \right). \tag{2.4}$$

Bezpośrednio z równości (2.3) i (2.4) otrzymujemy:

$$(E_{\hat{s}\hat{t}})_{n\hat{\jmath}} = 0.$$

Podsumowując wynik częściowy, widzimy, że:

$$(E_{st})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (i,j) = (s,t), \\ 0, & \text{gdy } (i,j) \neq (s,t) \wedge (i,j) \neq (n,t), \end{cases}$$

dla dowolnych $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Pozostaje nam jeszcze sprawdzić, że dla dowolnego $\hat{s} \in \{1, \ldots, n-1\}$ oraz dowolnych $\hat{t}_1, \hat{t}_2 \in \{1, \ldots, n\}$, $\hat{t}_1 \neq \hat{t}_2$, zachodzi:

$$(E_{\hat{s}\hat{t}_1})_{n\hat{t}_1} = (E_{\hat{s}\hat{t}_2})_{n\hat{t}_2}. \tag{2.5}$$

Rozważmy permutację $\tau \in S_n$, dla której $\tau(\hat{s}) = \hat{t}_1$ i $\tau(n) = \hat{t}_2$. Zwróćmy uwagę, że:

$$M := \sum_{s=1}^{n-1} E_{s,\tau(s)} + E_{\hat{s}\hat{t}_2} \in \Sigma_n(\mathbb{F})$$

oraz:

$$(M)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \Big(\tau(i) = j \wedge i \in \{1, \ldots, n-1\}\Big) \vee (i,j) = (\hat{s}, \hat{t}_2), \\ 0, & \text{gdy } \Big(\tau(i) \neq j \wedge i \in \{1, \ldots, n-1\}\Big) \wedge (i,j) \neq (\hat{s}, \hat{t}_2), \\ (E_{\hat{s}\hat{t}_1})_{n\hat{t}_1}, & \text{gdy } (i,j) = (n, \hat{t}_1), \\ (E_{\hat{s}\hat{t}_2})_{n\hat{t}_2}, & \text{gdy } (i,j) = (n, \hat{t}_2). \end{cases}$$

Niech $\varrho \in S_n$ będzie takie, że dla permutacji τ i transpozycji $(\hat{t}_1\ \hat{t}_2)$ zachodzi $\varrho \neq \tau$ oraz $\varrho \neq (\hat{t}_1\ \hat{t}_2) \circ \tau$. Jeśli $\varrho(\hat{s}) \neq \hat{t}_1$ i $\varrho(\hat{s}) \neq \hat{t}_2$, to $(M)_{\hat{s},\varrho(\hat{s})} = 0$. Jeżeli $\varrho(\hat{s}) = \hat{t}_1$ lub $\varrho(\hat{s}) = \hat{t}_2$, to istnieje $r \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{\hat{s}\}$ takie, że $\varrho(r) \neq \tau(r)$ lub $\varrho(r) \neq (\hat{t}_1\ \hat{t}_2) \circ \tau(r)$, jednakże $(\hat{t}_1\ \hat{t}_2) \circ \tau(r) = \tau(r)$, czyli $(M)_{r,\varrho(r)} = 0$. Stąd, korzystając z permutacyjnej definicji wyznacznika, otrzymujemy:

$$0 = \det M = \operatorname{sgn}(\tau)\Big((E_{\hat{s}\hat{t}_2})_{n\hat{t}_2} - (E_{\hat{s}\hat{t}_1})_{n\hat{t}_1}\Big), \tag{2.6}$$

czyli dostajemy (2.5). Wnioskujemy z tego, że istnieją skalary $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1} \in \mathbb{F}$, takie że ostatecznie zachodzi:

$$(E_{st})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (i,j) = (s,t), \\ \kappa_s, & \text{gdy } (i,j) = (n,t), \\ 0, & \text{gdy } (i,j) \neq (s,t) \wedge (i,j) \neq (n,t), \end{cases}$$

dla dowolnych $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Zdefiniujmy wektor $v \in \mathbb{F}^{1\times n}$ następująco:

$$v := [-\kappa_1, \ldots, -\kappa_{n-1}, 1]$$

i zauważmy, że dla dowolnych $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $t \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi:

$$vE_{st} = \mathbf{0}.$$

Oznacza to, że $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}_n^v(\mathbb{F})$, ale ponieważ wymiar przestrzeni liniowej $\mathcal{L}_n^v(\mathbb{F})$ jest równy $n^2 - n$, więc $\mathcal{V} = \mathcal{L}_n^v(\mathbb{F})$. Sytuację, gdy któryś z innych wierszy macierzy F jest zerowy lub któraś z kolumn macierzy F jest zerowa, rozważa się analogicznie, co równocześnie kończy dowód twierdzenia. $\square$

Jak widzieliśmy, w dowodzie twierdzenia 33 korzystaliśmy z dwóch wyników technicznych, z których pierwszy jest natury kombinatorycznej. Dla porządku podajemy je poniżej łącznie z dowodami, w których będziemy używali oznaczenia $A(k,l) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{F})$ na macierz powstałą z macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ poprzez wykreślenie k-tego wiersza i l-tej kolumny. Zauważmy, że wtedy dla $i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}$ oraz $j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{l\}$ zachodzi:

$$A_{ij} = \Big(A(k,l)\Big)_{\varrho_k(i),\varrho_l(j)}, \tag{2.7}$$

gdzie ϱ_m jest cyklem postaci $(n\ n-1\ \ldots\ m+1\ m) \in S_n$ dla $m \in \{1,\ldots,n\}$.

Lemat 5. *Jeśli kwadratowa macierz zerojedynkowa F stopnia n zawiera dokładnie n zer, które nie leżą ani w tym samym wierszu, ani w tej samej kolumnie, to istnieje permutacja $\sigma \in S_n$ taka, że:*

$$(F)_{i,\sigma(i)} = 1 \tag{2.8}$$

dla każdego $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Dowód. Udowodnimy słabszą wersję lematu. Przeprowadzimy tu indukcję ze względu na $n \in \mathbb{N}$ przy słabszym założeniu mówiącym, iż macierz F zawiera nie więcej niż n zer oraz w żadnym wierszu ani w żadnej kolumnie nie ma samych tylko zer. Jeśli $n = 2$, to macierz F nie ma zer, ma jedno zero lub na którejś z przekątnych ma dwa zera i permutacja $\sigma \in S_2$ spełniająca warunek (2.8) jest prosta do znalezienia. Teraz przyjmijmy, że $n > 2$ i rozważmy trzy możliwe sytuacje:

- jeśli macierz F ma w każdym wierszu i każdej kolumnie co najwyżej jedno zero, to bierzemy dowolne $k, l \in \{1,\ldots,n\}$, dla których zachodzi $(F)_{kl} = 1$,
- jeśli macierz F ma w wierszu $k \in \{1,\ldots,n\}$ więcej niż jedno zero, to ponieważ nie może być w tym wierszu samych zer, więc istnieje takie $l \in \{1,\ldots,n\}$, że $(F)_{kl} = 1$,
- jeśli macierz F ma w kolumnie $l \in \{1,\ldots,n\}$ więcej niż jedno zero, to ponieważ nie może być w tej kolumnie samych zer, więc istnieje takie $k \in \{1,\ldots,n\}$, że $(F)_{kl} = 1$.

Tak czy inaczej, macierz $F(k,l)$ jest zerojedynkową macierzą kwadratową stopnia $n-1$, która zawiera nie więcej niż $n-1$ zer oraz w żadnym wierszu ani w żadnej kolumnie nie ma samych tylko zer. Poprzez indukcję wnosimy, że istnieje permutacja $\tau \in S_{n-1}$ taka, że:

$$\Big(F(k,l)\Big)_{j,\tau(j)} = 1 \tag{2.9}$$

dla dowolnego $j \in \{1,\ldots,n-1\}$. Zdefiniujmy permutację $\sigma := \varrho_l^{-1} \circ \tau \circ \varrho_k \in S_n$. Jeśli $i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}$, to wtedy $\varrho_k(i) \in \{1,\ldots,n-1\}$ i korzystając z własności (2.7) oraz równości (2.9), otrzymujemy:

$$F_{i,\sigma(i)} = \Big(F(k,l)\Big)_{\varrho_k(i),\varrho_l(\sigma(i))} = \Big(F(k,l)\Big)_{\varrho_k(i),\tau(\varrho_k(i))} = 1.$$

Natomiast gdy $i = k$, to:

$$F_{i,\sigma(i)} = F_{kl} = 1.$$

Stąd permutacja σ spełnia warunek (2.8), co na mocy zasady indukcji matematycznej ostatecznie kończy dowód lematu. $\square$

Lemat 6. *Niech macierze $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ będą takie, że dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$ w macierzy A_s, gdzie $s \in \{1, \ldots, n\}$, pierwsze $s-1$ wierszy jest zerowych, natomiast s-ty wiersz ma jedynkę na $\sigma(s)$-tej pozycji, a przed nią same zera. Wtedy istnieją współczynniki $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \{0, 1\}$, takie że:*

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s A_s \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}).$$

Dowód. Zdefiniujmy macierz $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ przyjmując, że s-tym wierszem macierzy C jest s-ty wiersz macierzy A_s, tj. pierwszy niezerowy wiersz macierzy A_s, który ma pierwszy niezerowy element na pozycji $\sigma(s)$. Stąd każdy wiersz macierzy C ma pierwszy niezerowy element w innej kolumnie, a więc macierz ta jest nieosobliwa. Przyjmijmy $D_s := A_s C^{-1}$ dla każdego $s \in \{1, \ldots, n\}$. Zwróćmy uwagę, że w macierzy D_s pierwsze $s-1$ wierszy jest zerowych, a s-ty wiersz ma jedynkę na s-tej pozycji i poza tym zera. Pokażemy indukcyjnie, że istnieją współczynniki $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \{0, 1\}$ takie, że:

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s D_s \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}). \tag{2.10}$$

Przeprowadzimy indukcję matematyczną względem n. Dla $n = 2$ teza (2.10) jest oczywiście spełniona. Niech więc $n > 2$. Załóżmy, że (2.10) jest spełnione dla pewnego $n-1$, gdzie $n > 1$. Wówczas istnieją współczynniki $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \{0, 1\}$ takie, że:

$$\det\left(\sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s D_s(n, n)\right) \neq 0. \tag{2.11}$$

Zauważmy, że korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem ostatniego wiersza, dla dowolnej macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachodzi:

$$\begin{aligned}\det(A + D_n) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} (A + D_n)_{nj} \det\Big((A + D_n)(n, j)\Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} A_{nj} \det\Big(A(n, j)\Big) + \det\Big(A(n, n)\Big) = \det A + \det\Big(A(n, n)\Big).\end{aligned}$$

Stąd mamy:

$$\det\left(\sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s D_s + D_n\right) = \det\left(\sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s D_s\right) + \det\left(\sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s D_s(n, n)\right),$$

czyli:

$$\det\left(\sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s D_s + D_n\right) \neq 0 \qquad \text{lub} \qquad \det\left(\sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s D_s\right) \neq 0,$$

gdyż w innej sytuacji dostalibyśmy sprzeczność z założeniem (2.11). Jeśli zachodzi:

$$\det\left(\sum_{s=1}^{n-1} \lambda_s D_s + D_n\right) \neq 0,$$

to przyjmujemy $\lambda_n = 1$, natomiast w przeciwnym przypadku $\lambda_n = 0$. Ostatecznie więc

otrzymujemy:
$$\det\left(\sum_{s=1}^{n}\lambda_s D_s\right)\neq 0,$$
co na mocy zasady indukcji matematycznej prowadzi do tezy (2.10), z której to dostajemy:
$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s A_s=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s D_s C=\left(\sum_{s=1}^{n}\lambda_s D_s\right)C\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{F}),$$
co kończy dowód lematu. $\square$

Teraz możemy już przejść do bezpośredniego dowodu głównego twierdzenia tego podrozdziału. W dowodzie tym wykorzystamy metody dowodowe z pracy [49].

Dowód twierdzenia 31. Niech $e_1,\ldots,e_n\in\mathbb{F}^{n\times 1}$ będą kolejnymi wektorami bazy kanonicznej. Zauważmy, że dla każdego $i\in\{1,\ldots,n\}$ przestrzeń liniowa $\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})$ jest zbiorem wszystkich macierzy o zerowej i-tej kolumnie. Zdefiniujmy również dla $i\in\{1,\ldots,n\}$ przestrzeń liniową $\mathcal{K}_n^i(\mathbb{F})\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ jako zbiór tych wszystkich macierzy, które poza i-tą kolumną mają zerowe kolumny. Pomiędzy wspomnianymi przestrzeniami zachodzi następująca tożsamość:
$$\mathcal{K}_n^i(\mathbb{F})=\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\mathcal{R}_n^{e_k}(\mathbb{F}),\qquad i\in\{1,\ldots,n\}. \tag{2.12}$$

Ponieważ dla każdego $i\in\{1,\ldots,n\}$ przestrzeń liniowa $L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})\Big)$ ma wymiar n^2-n i zawiera tylko osobliwe macierze, więc z twierdzenia 33 istnieją wektory $u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{F}^{n\times 1}$ takie, że:
$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})\Big)=\mathcal{R}_n^{u_i}(\mathbb{F})\qquad\text{lub}\qquad L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})\Big)=\mathcal{L}_n^{u_i^T}(\mathbb{F})$$
dla każdego $i\in\{1,\ldots,n\}$. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że:
$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{F})\Big)=\mathcal{R}_n^{u_1}(\mathbb{F}),$$
zastępując w razie potrzeby przekształcenie $L(\cdot)$ przekształceniem $\Big(L(\cdot)\Big)^T$.

Załóżmy nie wprost, że dla pewnego $i\in\{2,\ldots,n\}$ spełnione jest:
$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})\Big)=\mathcal{L}_n^{u_i^T}(\mathbb{F}).$$
Zauważmy, że wtedy przestrzeń liniowa $\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{F})\cap\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})$ ma wymiar n^2-2n, podczas gdy wymiar przestrzeni liniowej:
$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{F})\cap\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})\Big)=L\Big(\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{F})\Big)\cap L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})\Big)=\mathcal{R}_n^{u_1}(\mathbb{F})\cap\mathcal{L}_n^{u_i^T}(\mathbb{F})$$
jest równy n^2-2n+1. To zaś jest sprzeczne z nieosobliwością przekształcenia L. Stąd wnioskujemy, że dla każdego $i\in\{1,\ldots,n\}$ zachodzi:
$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})\Big)=\mathcal{R}_n^{u_i}(\mathbb{F}).$$

Przyjmijmy, że wektory $u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{F}^{n\times 1}$ są liniowo zależne. Wtedy istnieją skalary

$\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{F}$, nie wszystkie równe zero, dla których spełnione jest:

$$\sum_{k=1}^{n} \kappa_k u_k = \mathbf{0}.$$

Bez utraty ogólności możemy założyć, że właśnie $\kappa_1 \neq 0$. Zauważmy, że możemy przedstawić dowolną macierz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ w postaci:

$$A = \tilde{A} + \hat{A},$$

gdzie $\tilde{A} \in \mathcal{K}_n^1(\mathbb{F})$ oraz $\hat{A} \in \mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{F})$. Wtedy z zależności (2.12) otrzymujemy:

$$L(\tilde{A}) \in L\Big(\mathcal{K}_n^1(\mathbb{F})\Big) = L\left(\bigcap_{k=2}^{n} \mathcal{R}_n^{e_k}(\mathbb{F})\right) = \bigcap_{k=2}^{n} L\Big(\mathcal{R}_n^{e_k}(\mathbb{F})\Big) = \bigcap_{k=2}^{n} \mathcal{R}_n^{u_k}(\mathbb{F}),$$

czyli dla każdego $k \in \{2, \ldots, n\}$ mamy $L(\tilde{A})u_k = \mathbf{0}$, a więc:

$$L(\tilde{A})u_1 = L(\tilde{A})\left(-\kappa_1^{-1} \sum_{k=2}^{n} \kappa_k u_k \right) = -\kappa_1^{-1} \sum_{k=2}^{n} \kappa_k L(\tilde{A}) u_k = \mathbf{0}.$$

Ponadto $L(\hat{A}) \in L\Big(\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{F})\Big) = \mathcal{R}_n^{u_1}(\mathbb{F})$, co implikuje $L(\hat{A})u_1 = \mathbf{0}$. Stąd, z liniowości przekształcenia L, dostajemy:

$$L(A)u_1 = L(\tilde{A})u_1 + L(\hat{A})u_1 = \mathbf{0}.$$

Ponieważ $u_1 \neq \mathbf{0}$, więc $L(A) \in \Sigma_n(\mathbb{F})$, czyli $L\Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{F})\Big) \subset \Sigma_n(\mathbb{F})$, co jest z sprzeczne z nieosobliwością przekształcenia L, a zatem wektory $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ są liniowo niezależne.

Zdefiniujmy teraz przekształcenie $\Lambda\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ wzorem:

$$\Lambda(X) = L(X)U,$$

gdzie:

$$U := \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}).$$

Jest ono liniowe, nieosobliwe i odwzorowuje macierze osobliwe w macierze osobliwe. Co więcej, dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ otrzymujemy:

$$\Lambda\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})\Big) = \mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F}), \tag{2.13}$$

ponieważ wymiar przestrzeni $\Lambda\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})\Big)$ jest równy $n^2 - n$ oraz jeśli $A \in \mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})$, to $L(A) \in \mathcal{R}_n^{u_i}(\mathbb{F})$ i wtedy:

$$\Lambda(A)e_i = L(A)Ue_i = L(A)u_i = \mathbf{0},$$

czyli $\Lambda(A) \in \mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{F})$. Posługując się po raz kolejny zależnością (2.12), dostajemy na podstawie powyższego:

$$\Lambda\Big(\mathcal{K}_n^i(\mathbb{F})\Big) = \Lambda\left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathcal{R}_n^{e_k}(\mathbb{F})\right) = \bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \Lambda\Big(\mathcal{R}_n^{e_k}(\mathbb{F})\Big) = \bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathcal{R}_n^{e_k}(\mathbb{F}) = \mathcal{K}_n^i(\mathbb{F}), \qquad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Stwierdzamy więc, że przekształcenie Λ działa tylko na niezerowej kolumnie macierzy z przestrzeni liniowej $\mathcal{K}_n^i(\mathbb{F})$, gdzie $i \in \{1, \ldots, n\}$, co w połączeniu z liniowością rzeczonego przekształcenia implikuje następujący fakt:

$$\Lambda(X) = \Big[T_1\Big((X)_{\cdot 1}\Big) \quad T_2\Big((X)_{\cdot 2}\Big) \quad \cdots \quad T_n\Big((X)_{\cdot n}\Big)\Big], \tag{2.14}$$

gdzie $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$.

Weźmy dowolny wektor $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ i załóżmy nie wprost, że wektor $T_i T_1^{-1} x$ nie jest krotnością[1] wektora x dla pewnego $i \in \{2, \ldots, n\}$. Dobierzmy do nich takie wektory $v_2 \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$, aby łącznie tworzyły zbiór wektorów liniowo niezależnych. Zdefiniujmy macierz:

$$M := \Big[T_1^{-1}x \quad T_2^{-1}v_2 \quad \cdots \quad T_{i-1}^{-1}v_{i-1} \quad T_1^{-1}x \quad T_{i+1}^{-1}v_{i+1} \quad \cdots \quad T_n^{-1}v_n\Big] \in \Sigma_n(\mathbb{F}).$$

Otrzymujemy wtedy:

$$\Lambda(M) = \Big[x \quad v_2 \quad \cdots \quad v_{i-1} \quad T_i T_1^{-1}x \quad v_{i+1} \quad \cdots \quad v_n\Big] \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}),$$

co prowadzi do sprzeczności, zatem dla każdego $i \in \{2, \ldots, n\}$ wektor $T_i T_1^{-1} x$ jest krotnością wektora x. Podstawiając za x kolejne wektory bazy kanonicznej, widzimy, że macierz $T_i T_1^{-1}$ musi być diagonalna, natomiast podstawiając za x wektor $[1, \ldots, 1]^T$, stwierdzamy, że co więcej macierz $T_i T_1^{-1}$ musi być skalarna. Z tego wnioskujemy, że dla każdego $i \in \{2, \ldots, n\}$ zachodzi:

$$T_i = \gamma_i T_1,$$

gdzie $\gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Ostatecznie więc przekształcenie L musi być postaci:

$$\begin{aligned} L(X) = \Lambda(X)U^{-1} &= \Big[T_1\Big((X)_{\cdot 1}\Big) \quad \gamma_2 T_1\Big((X)_{\cdot 2}\Big) \quad \cdots \quad \gamma_n T_1\Big((X)_{\cdot n}\Big)\Big]\, U^{-1} = \\ &= T_1 \Big[(X)_{\cdot 1} \quad (X)_{\cdot 2} \quad \cdots \quad (X)_{\cdot n}\Big] \operatorname{diag}(1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) U^{-1} = \\ &= T_1 X \operatorname{diag}(1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) U^{-1}. \end{aligned}$$

Przyjmując:

$$P := T_1 \qquad \text{oraz} \qquad Q := \operatorname{diag}(1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) U^{-1},$$

dowodzimy prawdziwości tezy twierdzenia. □

2.3. Ilość przekształceń pewnej postaci zachowujących wyznacznik macierzy

W tym podrozdziale założymy tylko, że R jest pierścieniem przemiennym z jedynką. Niech $P, Q \in \mathcal{GL}_n(R)$. Zdefiniujmy przekształcenia $U_{P,Q} \colon \mathcal{M}_n(R) \to \mathcal{M}_n(R)$ oraz $V_{P,Q} \colon \mathcal{M}_n(R) \to \mathcal{M}_n(R)$ odpowiednio wzorami:

$$U_{P,Q}(X) = PXQ$$

[1]Przez krotność wektora $z \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ rozumiemy tutaj wektor λz, gdzie $\lambda \in \mathbb{F}$.

oraz:

$$V_{P,Q}(X) = PX^TQ.$$

Przy założeniu $\det(PQ) = 1$ są to przekształcenia liniowe z poprzedniego rozdziału, które zachowują wyznacznik macierzy. Przyjmijmy:

$$\mathcal{Z}_n(R) := \{U_{P,Q}\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\} \cup \{V_{P,Q}\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\}.$$

Postaramy się znaleźć moc zbioru $\mathcal{Z}_n(R)$. Rozważymy najpierw pewien techniczny wynik, który nam to ułatwi.

Lemat 7. *Niech $P_1, Q_1, P_2, Q_2 \in \mathcal{GL}_n(R)$. Jeśli:*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(R)\colon U_{P_1,Q_1}(X) = U_{P_2,Q_2}(X) \tag{2.15}$$

lub:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(R)\colon V_{P_1,Q_1}(X) = V_{P_2,Q_2}(X), \tag{2.16}$$

to istnieje odwracalne $r \in R$ takie, że:

$$P_2 = rP_1 \qquad \textit{oraz} \qquad Q_2 = r^{-1}Q_1.$$

Natomiast niemożliwe jest, aby:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(R)\colon U_{P_1,Q_1}(X) = V_{P_2,Q_2}(X). \tag{2.17}$$

Dowód. Przyjmijmy więc, że warunek (2.15) jest spełniony. Podstawiając w nim $X = I$, widzimy, że:

$$P_1Q_1 = P_2Q_2,$$

czyli:

$$G := P_2^{-1}P_1 = Q_2Q_1^{-1} \in \mathcal{GL}_n(R).$$

Na podstawie warunku (2.15) dla każdego $X \in \mathcal{M}_n(R)$ mamy:

$$P_2^{-1}P_1X = XQ_2Q_1^{-1},$$

a więc spełnione jest:

$$GX = XG \tag{2.18}$$

dla każdego $X \in \mathcal{M}_n(R)$. Dla każdej pary $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ niech $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(R)$ będzie macierzą mającą jedynkę na pozycji (i, j) i zera poza. Zauważmy, że z równości (2.18) dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, zachodzi:

$$0 = (GE_{ii})_{ij} = (E_{ii}G)_{ij} = (G)_{ij}.$$

Stąd, również wykorzystując równość (2.18), dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, mamy:

$$(G)_{ii} = (GE_{ij})_{ii} = (E_{ij}G)_{ii} = (G)_{jj}.$$

Oznacza to, że istnieje element odwracalny $r \in R$ taki, że:

$$G = rI,$$

co kończy pierwszą część dowodu. Przejdźmy do warunku (2.16). Ponieważ:

$$\mathcal{M}_n(R) = \{X^T \colon X \in \mathcal{M}_n(R)\},$$

więc może być on sprowadzony do warunku (2.15), co bezpośrednio potwierdza tę część lematu. Analogicznie jak wcześniej pokazujemy, że jeśli warunek (2.17) zachodzi, to dla każdego $X \in \mathcal{M}_n(R)$ musi być spełnione:

$$GX = X^T G. \tag{2.19}$$

Korzystając z równości (2.19), dla każdej pary $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ otrzymujemy:

$$0 = (GE_{ii})_{ij} = (E_{ii}^T G)_{ij} = (G)_{ij}.$$

Stąd, również na mocy równości (2.19), dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, spełnione jest:

$$(G)_{ii} = (GE_{ij})_{ii} = (E_{ij}^T G)_{ii} = 0,$$

czyli:

$$G = 0,$$

co stoi w sprzeczności z definicją macierzy G i prowadzi do tezy lematu. □

Uwaga 5. *Zauważmy jeszcze, że* $\det(P_1Q_1) = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det(P_2Q_2) = 1$.

Możemy teraz przejść do głównego twierdzenia tego podrozdziału[2].

Twierdzenie 34. *Jeśli pierścień R jest skończony, to wtedy:*

$$|\mathcal{Z}_n(R)| = 2|\mathcal{SL}_n(R)|^2.$$

Dowód. Niech $r_1, \ldots, r_k \in R$ będą elementami odwracalnymi, gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $r_1 = 1$. Połóżmy:

$$\mathcal{GL}_n^{r_i}(R) := \{X \in \mathcal{GL}_n(R) \colon \det X = r_i\} \qquad \text{dla } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Ponieważ dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ przekształcenie $T_i \colon \mathcal{GL}_n^{r_i}(R) \to \mathcal{SL}_n(R)$ zdefiniowane wzorem:

$$T_i(X) = \operatorname{diag}(r_i^{-1}, 1, \ldots, 1)X$$

jest bijekcją, więc:

$$|\mathcal{GL}_n^{r_i}(R)| = |\mathcal{SL}_n(R)| \tag{2.20}$$

dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$. Na mocy lematu 7 dla dowolnych $P, Q \in \mathcal{GL}_n(R)$ takich, że $\det(PQ) = 1$, mamy:

$$U_{r_1 P, r_1^{-1} Q} = U_{r_2 P, r_2^{-1} Q} = \ldots = U_{r_k P, r_k^{-1} Q},$$

[2]Autorowi dysertacji nie udało się rozstrzygnąć pytania, czy twierdzenie 34 jest oryginalne.

a więc:

$$k \cdot |\{U_{P,Q}\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\}| = |\{(P, Q)\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\}|,$$

czyli:

$$k \cdot |\{U_{P,Q}\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\}| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{GL}_n^{r_i}(R)| \cdot |\mathcal{GL}_n^{r_i^{-1}}(R)|.$$

Stąd z równości (2.20) dostajemy:

$$k \cdot |\{U_{P,Q}\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\}| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{SL}_n(R)|^2,$$

co daje nam:

$$|\{U_{P,Q}\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\}| = |\mathcal{SL}_n(R)|^2.$$

Analogicznie pokazujemy, że:

$$|\{V_{P,Q}\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\}| = |\mathcal{SL}_n(R)|^2.$$

Ponieważ z lematu 7 wynika, że:

$$\{U_{P,Q}\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\} \cap \{V_{P,Q}\colon P, Q \in \mathcal{GL}_n(R) \wedge \det(PQ) = 1\} = \emptyset,$$

więc:

$$|\mathcal{Z}_n(R)| = 2|\mathcal{SL}_n(R)|^2,$$

co należało pokazać. □

Uwaga 6. *Na podstawie poprzedniego twierdzenia można odnaleźć przemienne pierścienie z jedynką, dla których twierdzenie 30 jest spełnione. I tak, korzystając z programu Mathematica udało się ustalić, że* $|\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_4)| = 48$*, a ilość przekształceń liniowych zbioru* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_4)$ *zachowujących wyznacznik macierzy jest równa* 4608*, co na mocy twierdzenia 34 oznacza, że twierdzenie 30 jest dla niego prawdziwe. Podobnie jest ze zbiorem* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_8)$*. Jednak, już dla zbioru* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$*, okazało się, że* $|\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_6)| = 144$*, a ilość przekształceń liniowych zbioru* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ *zachowujących wyznacznik macierzy jest równa* 82944*, czyli przekształceń liniowych zbioru* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ *zachowujących wyznacznik jest dwa razy więcej niż moc zbioru* $\mathcal{Z}_2(\mathbb{Z}_6)$*! Przykładowym przekształceniem liniowym zachowującym wyznacznik macierzy ze zbioru* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$*, które nie należy do* $\mathcal{Z}_2(\mathbb{Z}_6)$*, jest przekształcenie określone macierzą:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Każde przekształcenie liniowe zbioru $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_6)$ *zachowujące wyznacznik macierzy może być otrzymane przez złożenie powyższego przekształcenia z przekształceniem ze zbioru* $\mathcal{Z}_2(\mathbb{Z}_6)$*.*

Na podstawie powyższej uwagi powstał cały następny podrozdział.

2.4. Przekształcenia liniowe macierzy nad pierścieniem modulo

Jak już wspomniano, ten podrozdział powstał jako autorskie rozwinięcie uwagi 6. Składa się na niego uogólnienie twierdzeń Frobeniusa i Dieudonné (tj. twierdzeń 30 i 31 odpowiednio) z rozważań nad dowolnymi ciałami do dyskusji pierścieni modulo. Co ciekawe, analogiczny wynik jak w twierdzeniach 30 i 31 uzyskano tylko dla tych pierścieni modulo $\mathbb{Z}_k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, dla których liczba k jest potęgą pewnej liczby pierwszej. I tak zacznijmy najpierw od odpowiednika twierdzenia Frobeniusa.

Twierdzenie 35. *Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Załóżmy, że przekształcenie liniowe $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ zachowuje wyznacznik macierzy, czyli:*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\colon\ \det L(X) = \det X.$$

a) Jeśli k jest potęgą pewnej liczby pierwszej, to istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$, takie że $\det(PQ) = 1$ oraz:

$$\textit{albo}\quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\colon L(X) = PXQ, \quad \textit{albo}\quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\colon L(X) = PX^TQ.$$

b) Jeśli k nie jest potęgą żadnej liczby pierwszej, to istnieją macierze $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$, takie że $A + C, B + D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$, $\det\Big((A + C)(B + D)\Big) = 1$ oraz:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\colon L(X) = AXB + CX^TD.$$

Następny wynik to odpowiednik twierdzenia Dieudonné.

Twierdzenie 36. *Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Przyjmijmy, że nieosobliwe przekształcenie liniowe $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ jest takie, że $L\Big(\Theta_n(\mathbb{Z}_k)\Big) \subset \Theta_n(\mathbb{Z}_k)$.*

a) Jeśli k jest potęgą pewnej liczby pierwszej, to istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$, takie że:

$$\textit{albo}\quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\colon L(X) = PXQ, \quad \textit{albo}\quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\colon L(X) = PX^TQ.$$

b) Jeśli k nie jest potęgą żadnej liczby pierwszej, to istnieją macierze $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$, takie że $A + C, B + D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$ oraz:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\colon L(X) = AXB + CX^TD.$$

Jak widzimy, w sytuacji gdy k nie jest potęgą żadnej liczby pierwszej, to w obydwu twierdzeniach przekształcenie L jest postaci wizualnie różnej od postaci w sytuacji, gdy k jest potęgą pewnej liczby pierwszej. Oczywiście czasami może być do takiej postaci sprowadzalne, jednak w ogólności niemożliwe jest zawsze jego takie przedstawienie, co najlepiej widać w przykładzie 8, który ze względu na potrzebne narzędzia przedstawimy później.

Twierdzenie 36 podpunkt a) będziemy dowodzili podobnie jak twierdzenie 31, a więc wykorzystamy pewne pomocnicze twierdzenie 37, które jest odpowiednikiem twierdzenia 33. W wielu miejscach dowody odpowiadających sobie twierdzeń (pary: twierdzenie 36 podpunkt a) i twierdzenie 31 oraz twierdzenie 37 i twierdzenie 33) pokrywają się, jednak tutaj pozostawiono je w prawie pełnych wersjach ze względu na pewne niuanse spowodowane rozważaniami nad pierścieniami modulo, które zatraciłyby się w wersji skrótowej rzeczonych dowodów, a które mają istotny wpływ na możliwość przeprowadzenia tych dowodów. Dodajmy jeszcze, że twierdzenie 36 podpunkt b) oraz twierdzenie 35 udowodnimy za pomocą twierdzenia 36 podpunkt a).

Warto tutaj wspomnieć, że we wszystkich dowodach użyjemy pewnych wyników związanych z homomorfizmami pierścieni, o których teraz powiemy. W tym celu przyjmijmy, że P_1 oraz P_2 są pewnymi pierścieniami przemiennymi z jedynką. Funkcja $\xi\colon P_1 \to P_2$ jest homomorfizmem pierścieni P_1 i P_2, gdy dla dowolnych $x, y \in P_1$ spełnione są warunki:

$$\xi(x+y) = \xi(x) + \xi(y), \qquad \xi(xy) = \xi(x)\xi(y), \qquad \xi(0) = 0, \qquad \xi(1) = 1.$$

Przypomnijmy, że jeśli homomorfizm ξ jest bijekcją, to nazywamy go izomorfizmem. Zdefiniujmy działanie homomorfizmu ξ na dowolnej macierzy (odpowiednio wektorze) $Z \in P_1^{r\times s}$ jako macierz (odpowiednio wektor) $\xi(Z) \in P_2^{r\times s}$, taką że:

$$\Big(\xi(Z)\Big)_{ij} = \xi\Big((Z)_{ij}\Big) \qquad \text{dla } i \in \{1,\dots,r\}, j \in \{1,\dots,s\}.$$

Wtedy to dla dowolnych macierzy $X, Y \in \mathcal{M}_n(P_1)$ oraz skalaru $\lambda \in P_1$ zachodzą wzory:

$$\xi(X+Y) = \xi(X) + \xi(Y), \tag{2.21}$$
$$\xi(XY) = \xi(X)\xi(Y), \tag{2.22}$$
$$\xi(\lambda X) = \xi(\lambda)\xi(X), \tag{2.23}$$
$$\xi\Big(X^T\Big) = \Big(\xi(X)\Big)^T, \tag{2.24}$$
$$\xi(\det X) = \det\Big(\xi(X)\Big), \tag{2.25}$$

które można łatwo udowodnić wprost. Jeśli natomiast utożsamimy dowolne przekształcenie liniowe $\Lambda\colon \mathcal{M}_n(P_1) \to \mathcal{M}_n(P_1)$ z jego macierzą $\Lambda \in \mathcal{M}_{n^2}(P_1)$, to możemy określić przekształcenie liniowe $\xi(\Lambda)\colon \mathcal{M}_n(P_2) \to \mathcal{M}_n(P_2)$ poprzez utożsamienie go z macierzą $\xi(\Lambda) \in \mathcal{M}_{n^2}(P_2)$. Zaznaczmy, że w tym podrozdziale przyjmiemy konwencję oznaczania przekształcenia liniowego oraz reprezentującej to przekształcenie macierzy w bazie kanonicznej tym samym symbolem. Dla dowolnego przekształcenia liniowego $L\colon \mathcal{M}_n(P_1) \to \mathcal{M}_n(P_1)$ oraz dowolnej macierzy $X \in \mathcal{M}_n(P_1)$ prawdziwe są wzory:

$$\xi(\det L) = \det\Big(\xi(L)\Big), \tag{2.26}$$
$$\xi\Big(L(X)\Big) = \xi(L)\Big(\xi(X)\Big). \tag{2.27}$$

Oczywiście przekształcenie linowe L jest nieosobliwe wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy L tego przekształcenia jest elementem odwracalnym.

Zdefiniujemy teraz dwie fundamentalne w naszych rozważaniach funkcje – pewien homomorfizm i pewien izomorfizm. Definicję uzależnimy od tego, czy liczba $k \in \mathbb{N}$ jest potęgą pewnej liczby pierwszej, czy też nie. I tak jeśli k jest potęgą pewnej liczby pierwszej, to będziemy przyjmować oznaczenie $k = p^{\alpha}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{N}$, natomiast p jest liczbą pierwszą. Rzeczony homomorfizm $f_k\colon \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_p$ jest wtedy taki, że:

$$f_k(x) \equiv x \mod p.$$

Natomiast jeśli k nie jest potęgą żadnej liczby pierwszej, to będziemy przyjmować oznaczenie $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l}$, gdzie $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$, a $p_1, \dots, p_l$ to pewne liczby pierwsze tworzące ciąg rosnący oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{N}$. I wtedy wspomniany powyżej izomorfizm $g_k\colon \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_l^{\alpha_l}}$ definiujemy jako:

$$g_k(x) = \Big(h_k^{(1)}(x), \dots, h_k^{(l)}(x)\Big),$$

gdzie dla każdego $i \in \{1, \dots, l\}$ homomorfizmy $h_k^{(i)}\colon \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}$ są takie, że:

$$h_k^{(i)}(x) \equiv x \mod p_i^{\alpha_i}.$$

Poprawność powyższej definicji wynika z chińskiego twierdzenia o resztach. Zwróćmy uwagę, że $z \in \mathbb{Z}_k$ jest elementem odwracalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $f_k(z) \neq 0$ dla k będącego potęgą liczby pierwszej oraz wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne punktu $g_k(z)$ są elementami odwracalnymi dla k niebędącego potęgą żadnej liczby pierwszej.

Teraz wróćmy jeszcze do anonsowanego już przykładu.

Przykład 8. *Niech k nie będzie potęgą żadnej liczby pierwszej. Rozważmy przekształcenie liniowe $\Lambda\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ przedstawione wzorem:*

$$\Lambda(X) = AXB + CX^T D,$$

gdzie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ są takie, że:

$$h_k^{(1)}(A) = I, \qquad h_k^{(1)}(B) = I, \qquad h_k^{(1)}(C) = \mathbf{0} \qquad i \qquad h_k^{(1)}(D) = \mathbf{0}$$

oraz dla każdego dla każdego $i \in \{2, \dots, l\}$:

$$h_k^{(i)}(A) = \mathbf{0}, \qquad h_k^{(i)}(B) = \mathbf{0}, \qquad h_k^{(i)}(C) = I \qquad i \qquad h_k^{(i)}(D) = I.$$

Poprawność definicji macierzy A, B, C i D wynika z chińskiego twierdzenia o resztach. Zauważmy, że ze wzoru (2.21) *zachodzi:*

$$\begin{aligned} g_k(A+C) &= \Big(h_k^{(1)}(A+C), h_k^{(2)}(A+C), \dots, h_k^{(l)}(A+C)\Big) = \\ &= \Big(h_k^{(1)}(A) + h_k^{(1)}(C), h_k^{(2)}(A) + h_k^{(2)}(C), \dots, h_k^{(l)}(A) + h_k^{(l)}(C)\Big) = \\ &= (I + \mathbf{0}, \mathbf{0} + I, \dots, \mathbf{0} + I) = (I, I, \dots, I) = g_k(I), \end{aligned}$$

czyli z jednoznaczności izomorfizmu g_k *otrzymujemy* $A + C = I \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$. *Analogicznie pokazujemy, że również* $B + D = I \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$, *a więc także:*

$$\det\Big((A+C)(B+D)\Big) = \det I = 1.$$

Ponadto, korzystając ze wzorów (2.21), (2.22) *i* (2.24), *mamy:*

$$\begin{aligned} h_k^{(1)}\Big(\Lambda(X)\Big) &= h_k^{(1)}(AXB + CX^TD) = \\ &= h_k^{(1)}(A)h_k^{(1)}(X)h_k^{(1)}(B) + h_k^{(1)}(C)h_k^{(1)}(X^T)h_k^{(1)}(D) = h_k^{(1)}(X) \end{aligned} \tag{2.28}$$

oraz:

$$\begin{aligned} h_k^{(i)}\Big(\Lambda(X)\Big) &= h_k^{(i)}(AXB + CX^TD) = \\ &= h_k^{(i)}(A)h_k^{(i)}(X)h_k^{(i)}(B) + h_k^{(i)}(C)h_k^{(i)}(X^T)h_k^{(i)}(D) = h_k^{(i)}(X^T) \end{aligned} \tag{2.29}$$

dla każdego $i \in \{2, \ldots, l\}$. *A stąd, wykorzystując wzór* (2.25), *dostajemy:*

$$\begin{aligned} g_k\Big(\det\Big(\Lambda(X)\Big)\Big) &= \Bigg(h_k^{(1)}\Big(\det\Big(\Lambda(X)\Big)\Big), h_k^{(2)}\Big(\det\Big(\Lambda(X)\Big)\Big), \ldots, h_k^{(l)}\Big(\det\Big(\Lambda(X)\Big)\Big)\Bigg) = \\ &= \Bigg(\det\Big(h_k^{(1)}\Big(\Lambda(X)\Big)\Big), \det\Big(h_k^{(2)}\Big(\Lambda(X)\Big)\Big), \ldots, \det\Big(h_k^{(l)}\Big(\Lambda(X)\Big)\Big)\Bigg) = \\ &= \Big(\det\Big(h_k^{(1)}(X)\Big), \det\Big(h_k^{(2)}(X^T)\Big), \ldots, \det\Big(h_k^{(l)}(X^T)\Big)\Big) = \\ &= \Big(h_k^{(1)}\Big(\det(X)\Big), h_k^{(2)}\Big(\det(X^T)\Big), \ldots, h_k^{(l)}\Big(\det(X^T)\Big)\Big) = \\ &= \Big(h_k^{(1)}\Big(\det(X)\Big), h_k^{(2)}\Big(\det(X)\Big), \ldots, h_k^{(l)}\Big(\det(X)\Big)\Big) = g_k\Big(\det(X)\Big), \end{aligned}$$

czyli:

$$\det\Big(\Lambda(X)\Big) = \det(X).$$

Niech jeszcze macierz $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ *będzie taka, że* $\Lambda(Z) = \mathbf{0}$. *Wtedy na podstawie zależności* (2.28) *i* (2.29) *oraz wzoru* (2.24) *będziemy mieli:*

$$\mathbf{0} = h_k^{(1)}(\mathbf{0}) = h_k^{(1)}\Big(\Lambda(Z)\Big) = h_k^{(1)}(Z)$$

oraz:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}^T = \Big(h_k^{(i)}(\mathbf{0})\Big)^T = \Big(h_k^{(i)}\Big(\Lambda(Z)\Big)\Big)^T = \Big(h_k^{(i)}(Z^T)\Big)^T = h_k^{(i)}(Z)$$

dla każdego $i \in \{2, \ldots, l\}$. *Z tego wnosimy, iż:*

$$g_k(Z) = \Big(h_k^{(1)}(Z), h_k^{(2)}(Z), \ldots, h_k^{(l)}(Z)\Big) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}),$$

czyli $Z = \mathbf{0}$, *a więc przekształcenie* Λ *jest nieosobliwe. Reasumując, przekształcenie* Λ *spełnia założenia twierdzenia 35 podpunkt b) i twierdzenia 36 podpunkt b). Jednak jeśliby istniały macierze* $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$, *takie że:*

$$\Lambda(X) = PXQ,$$

to wtedy, korzystając ze wzorów (2.22) *i* (2.24)*, na podstawie zależności* (2.29)*, mamy:*

$$I\Big(h_k^{(2)}(X)\Big)^T I = h_k^{(2)}(X^T) = h_k^{(2)}\Big(\Lambda(X)\Big) = h_k^{(2)}(PXQ) = h_k^{(2)}(P)h_k^{(2)}(X)h_k^{(2)}(Q)$$

dla dowolnej macierzy $h_k^{(2)}(X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}})$*, co wynika z dowolności macierzy* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$*. To jednak na podstawie lematu 7 prowadzi do sprzeczności. Podobnie jeśliby istniały macierze* $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$*, takie że:*

$$\Lambda(X) = PX^TQ,$$

to wtedy, znowu korzystając ze wzorów (2.22) *i* (2.24)*, na mocy zależności* (2.28)*, dostajemy:*

$$Ih_k^{(1)}(X)I = h_k^{(1)}(X) = h_k^{(1)}\Big(\Lambda(X)\Big) = h_k^{(1)}(PX^TQ) = h_k^{(1)}(P)\Big(h_k^{(1)}(X)\Big)^T h_k^{(1)}(Q)$$

dla dowolnej macierzy $h_k^{(1)}(X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}})$*, co również wynika z dowolności macierzy* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$*. Na podstawie lematu 7 i w tej sytuacji dochodzimy do sprzeczności.*

Możemy już przejść do dowodu twierdzenia 36 podpunkt a), zaczynając od wspomnianego już pomocniczego twierdzenia.

Twierdzenie 37. *Niech* $k \in \mathbb{N}$*,* $k \neq 2$*, będzie potęgą pewnej liczby pierwszej, natomiast moduł* $\mathcal{V} \subset \Theta_n(\mathbb{Z}_k)$ *będzie wymiaru* $n^2 - n$*. Wtedy albo:*

$$\exists u \in \mathbb{Z}_k^{n\times 1} \setminus \{\mathbf{0}\}\colon f_k(u) \neq \mathbf{0} \wedge \mathcal{V} = \mathcal{R}_n^u(\mathbb{Z}_k),$$

albo:

$$\exists v \in \mathbb{Z}_k^{1\times n} \setminus \{\mathbf{0}\}\colon f_k(v) \neq \mathbf{0} \wedge \mathcal{V} = \mathcal{L}_n^v(\mathbb{Z}_k),$$

gdzie:

$$\mathcal{R}_n^u(\mathbb{Z}_k) := \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\colon Xu = \mathbf{0}\} \qquad \textit{oraz} \qquad \mathcal{L}_n^v(\mathbb{Z}_k) := \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\colon vX = \mathbf{0}\}.$$

Dowód. Niech będzie $k = p^\alpha$, gdzie p jest liczbą pierwszą oraz $\alpha \in \mathbb{N}$. Jeśliby $\alpha = 1$, to wtedy $\mathbb{Z}_k$ jest ciałem i teza dowodzonego twierdzenia wynika wprost z twierdzenia 33. Załóżmy więc, że $\alpha \geqslant 2$. Jeśli wprowadzimy na zbiorze $\{1, \ldots, n\}^2$ porządek leksykograficzny $\prec$, to wtedy możemy moduł $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ utożsamiać z modułem $\mathbb{Z}_k^{n^2}$. Dla każdej macierzy $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ takiej, że $f_k(X) \neq \mathbf{0}$, zdefiniujmy:

$$w(X) := \min\Big\{(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2\colon f_k\Big((X)_{ij}\Big) \neq 0\Big\},$$

tzn. $w(X)$ jest parą indeksów (i,j) najmniejszą względem relacji $\prec$ na zbiorze odwracalnych elementów w macierzy X. Dla modułu $\mathcal{V}$ możemy znaleźć bazę $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_{n^2-n}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ taką, że:

$$w(B_1) \prec w(B_2) \prec \ldots \prec w(B_{n^2-n}) \tag{2.30}$$

oraz:

$$(B_s)_{w(B_s)} = 1, \qquad (B_s)_{w(B_t)} = 0 \tag{2.31}$$

dla dowolnych $s, t \in \{1, \ldots, r\}$, $s < t$. Aby to osiągnąć, należy na macierzach dowolnej bazy modułu $\mathcal{V}$ rozważanych jako wektory modułu $\mathbb{Z}_k^{n^2}$ przeprowadzić „pseudo" algorytm eliminacji Gaussa. Jest on wykonalny z dwóch powodów[3]. Po pierwsze w każdym kroku algorytmu wszystkie macierze z bazy mają co najmniej jeden element odwracalny, ponieważ w przeciwnym razie pomnożylibyśmy macierz zawierającą same elementy nieodwracalne przez $p^{\alpha-1}$, a pozostałe macierze przez zero. Po ich zsumowaniu otrzymalibyśmy macierz zerową, co prowadziłoby do sprzeczności z liniową niezależnością macierzy z bazy. Po drugie w pierścieniu $\mathbb{Z}_k$ po dodaniu do dowolnego elementu nieodwracalnego innego dowolnego elementu nieodwracalnego pomnożonego przez dowolny element pierścienia dostajemy także element nieodwracalny.

Korzystając z bazy $\mathcal{B}$, definiujemy kwadratową macierz zerojedynkową F stopnia n:

$$(F)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy istnieje } s \in \{1, \ldots, n^2 - n\} \text{ takie, że } w(B_s) = (i, j), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Warunek (2.30) implikuje, iż macierz F ma dokładnie n zer, a każda jedynka z macierzy F „powiązana" jest dokładnie z jedną macierzą z bazy $\mathcal{B}$. Sprowadzając do sprzeczności, przyjmijmy, że żaden wiersz ani żadna kolumna macierzy F nie jest zerowa. Na podstawie lematu 5 istnieje wtedy permutacja $\sigma \in S_n$ taka, że:

$$(F)_{i,\sigma(i)} = 1$$

dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Z definicji macierzy F wynika, że istnieją macierze $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ takie, że dla każdego $s \in \{1, \ldots, n\}$ spełnione jest:

$$w(A_s) = \big(s, \sigma(s)\big).$$

Zwróćmy uwagę, że macierze $f_k(A_1), \ldots, f_k(A_n)$ spełniają założenia lematu 6, ponieważ pierścień $\mathbb{Z}_p$ jest ciałem. Na mocy rzeczonego lematu istnieją wtedy skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \{0, 1\}$ takie, że:

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s f_k(A_s) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_p),$$

czyli $\det\left(\sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_s f_k(A_s)\right) \neq 0$. Stąd, na podstawie wzorów (2.25), (2.21) i (2.23), dostajemy:

$$\begin{aligned} f_k\left(\det\left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s A_s\right)\right) &= \det\left(f_k\left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s A_s\right)\right) = \\ &= \det\left(\sum_{s=1}^{n} f_k(\lambda_s) f_k(A_s)\right) = \det\left(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s f_k(A_s)\right) \neq 0, \end{aligned}$$

ponieważ dla $\lambda \in \{0, 1\}$ zachodzi $f_k(\lambda) = \lambda$. Zatem $\det\left(\sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_s A_s\right)$ jest elementem odwra-

[3] W pierścieniu $\mathbb{Z}_k$ wszystkie elementy nieodwracalne tworzą zbiór $\big\{pi \colon i \in \{0, \ldots, p^{\alpha-2}\}\big\}$ oraz istnieje liczba (tzw. anihilator), jest nią np. $p^{\alpha-1}$, która po pomnożeniu przez dowolny element nieodwracalny daje zero.

calnym, a więc:

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s A_s \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k).$$

Jednak mamy również:

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s A_s \in \operatorname{span}\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \operatorname{span} \mathcal{B} \subset \Theta_n(\mathbb{Z}_k),$$

co prowadzi do absurdu, a zatem któryś wiersz lub któraś kolumna macierzy F jest zerowa.

Zwróćmy uwagę, że bez straty ogólności można założyć, iż to właśnie n-ty wiersz macierzy F jest wierszem zerowym, co z definicji macierzy F oznacza, że:

$$\mathcal{B} = \Big\{E_{st} \colon s \in \{1, \ldots, n-1\} \wedge t \in \{1, \ldots, n\}\Big\},$$

oraz:

$$w(E_{st}) = (s, t)$$

dla dowolnych $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $t \in \{1, \ldots, n\}$. Na podstawie definicji funkcji w oraz warunku (2.31) wynika stąd, iż:

$$(E_{st})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (i,j) = (s,t), \\ 0, & \text{gdy } (i,j) \neq (s,t) \wedge i \neq n. \end{cases}$$

Zauważmy, że powyższe macierze są tak samo zdefiniowane jak w dowodzie twierdzenia 33 i powtarzając wykonane tam kroki aż do równości (2.6), możemy udowodnić, że istnieją skalary $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1} \in \mathbb{Z}_k$, dla których zachodzi:

$$(E_{st})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (i,j) = (s,t), \\ \kappa_s, & \text{gdy } (i,j) = (n,t), \\ 0, & \text{gdy } (i,j) \neq (s,t) \wedge (i,j) \neq (n,t), \end{cases}$$

dla dowolnych $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Weźmy wektor $v \in \mathbb{Z}_k^{1\times n}$ postaci:

$$v := [-\kappa_1, \ldots, -\kappa_{n-1}, 1].$$

Ze względu na ostatnią współrzędną wektora v jest spełnione:

$$f_k(v) \neq \mathbf{0},$$

a ponadto zachodzi:

$$vE_{st} = 0$$

dla dowolnych $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ i $t \in \{1, \ldots, n\}$. Wnioskujemy stąd, że $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}_n^v(\mathbb{Z}_k)$. Z drugiej strony wymiar modułu $\mathcal{L}_n^v(\mathbb{Z}_k)$ jest równy $n^2 - n$, a zatem $\mathcal{V} = \mathcal{L}_n^v(\mathbb{Z}_k)$, co oczywiście kończy dowód twierdzenia. $\square$

Bezpośrednio korzystając z powyższego twierdzenia, możemy już podać dowód pierwszej części odpowiednika twierdzenia Dieudonné (chodzi o twierdzenie 31).

Dowód twierdzenia 36 podpunkt a). Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 31 przyjmijmy, że $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{Z}_k^{n\times 1}$ są kolejnymi wektorami bazy kanonicznej, a moduł $\mathcal{K}_n^i(\mathbb{Z}_k) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ jest zbiorem tych wszystkich macierzy, które poza i-tą kolumną mają zerowe kolumny. Łatwo stwierdzamy, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ moduł $\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)$ jest zbiorem wszystkich macierzy o zerowej i-tej kolumnie oraz:

$$\mathcal{K}_n^i(\mathbb{Z}_k) = \bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathcal{R}_n^{e_k}(\mathbb{Z}_k), \qquad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.32}$$

Zauważmy, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ moduł $L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)\Big)$ ma wymiar $n^2 - n$ oraz zawiera jedynie macierze osobliwe o wyznaczniku równym zero. Korzystając z twierdzenia 37 wnosimy, iż istnieją wektory $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}_k^{n\times 1}$ takie, że:

$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)\Big) = \mathcal{R}_n^{u_i}(\mathbb{Z}_k) \qquad \text{lub} \qquad L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)\Big) = \mathcal{L}_n^{u_i^T}(\mathbb{Z}_k)$$

dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nie tracąc ogólności rozważań, załóżmy, że:

$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{Z}_k)\Big) = \mathcal{R}_n^{u_1}(\mathbb{Z}_k),$$

gdyż w sytuacji gdy $L\Big(\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{Z}_k)\Big) = \mathcal{L}_n^{u_1^T}(\mathbb{Z}_k)$ możemy rozważyć przekształcenie $\Big(L(\cdot)\Big)^T$ w miejsce przekształcenia $L(\cdot)$.

Pokażemy przez sprowadzenie do sprzeczności, że dla każdego $i \in \{2, \ldots, n\}$ mamy:

$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)\Big) \neq \mathcal{L}_n^{u_i^T}(\mathbb{Z}_k).$$

Przypuśćmy więc, że dla pewnego $i \in \{2, \ldots, n\}$ zachodzi:

$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)\Big) = \mathcal{L}_n^{u_i^T}(\mathbb{Z}_k).$$

Ponieważ obydwa wektory u_1 oraz u_i^T posiadają na mocy twierdzenia 37 przynajmniej jedną współrzędną, która jest elementem odwracalnym, więc wymiar modułu:

$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{Z}_k) \cap \mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)\Big) = L\Big(\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{Z}_k)\Big) \cap L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)\Big) = \mathcal{R}_n^{u_1}(\mathbb{Z}_k) \cap \mathcal{L}_n^{u_i^T}(\mathbb{Z}_k)$$

wynosi $n^2 - 2n + 1$, podczas gdy wymiar modułu $\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{Z}_k) \cap \mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)$ jest równy $n^2 - 2n$. Jednak przekształcenie L jest nieosobliwe, co przez sprzeczność oznacza, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ spełnione jest:

$$L\Big(\mathcal{R}_n^{e_i}(\mathbb{Z}_k)\Big) = \mathcal{R}_n^{u_i}(\mathbb{Z}_k).$$

Załóżmy znów nie wprost, że wektory $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}_k^{n\times 1}$ są liniowo zależne, tj. istnieją nie wszystkie równe zero skalary $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{Z}_k$ takie, że:

$$\sum_{k=1}^{n} \kappa_k u_k = \mathbf{0}.$$

Nie naruszając ogólności możemy przyjąć, że $\kappa_1 \neq 0$. Ponieważ każdą macierz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ można zapisać jako:

$$A = \tilde{A} + \hat{A},$$

gdzie $\tilde{A} \in \mathcal{K}_n^1(\mathbb{Z}_k)$ oraz $\hat{A} \in \mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{Z}_k)$, więc z tożsamość (2.32) dostajemy:

$$L(\tilde{A}) \in L\Big(\mathcal{K}_n^1(\mathbb{Z}_k)\Big) = L\left(\bigcap_{k=2}^{n} \mathcal{R}_n^{e_k}(\mathbb{Z}_k)\right) = \bigcap_{k=2}^{n} L\Big(\mathcal{R}_n^{e_k}(\mathbb{Z}_k)\Big) = \bigcap_{k=2}^{n} \mathcal{R}_n^{u_k}(\mathbb{Z}_k).$$

To oznacza, że dla każdego $k \in \{2, \ldots, n\}$ zachodzi $L(\tilde{A})u_k = \mathbf{0}$, skąd mamy:

$$L(\tilde{A})\kappa_1 u_1 = L(\tilde{A})\left(-\sum_{k=2}^{n} \kappa_k u_k\right) = -\sum_{k=2}^{n} \kappa_k L(\tilde{A}) u_k = \mathbf{0}.$$

Co więcej jest $L(\hat{A}) \in L\Big(\mathcal{R}_n^{e_1}(\mathbb{Z}_k)\Big) = \mathcal{R}_n^{u_1}(\mathbb{Z}_k)$, czyli $L(\hat{A})u_1 = \mathbf{0}$, skąd wynika, że $L(\hat{A})\kappa_1 u_1 = \mathbf{0}$. Na mocy liniowości przekształcenia L, otrzymujemy:

$$L(A)\kappa_1 u_1 = L(\tilde{A})\kappa_1 u_1 + L(\hat{A})\kappa_1 u_1 = \mathbf{0}.$$

Z twierdzenia 37 zachodzi $\kappa_1 u_1 \neq \mathbf{0}$, co oznacza, iż $L(A) \in \Sigma_n(\mathbb{Z}_k)$. Z dowolności wyboru macierzy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ spełnione jest zatem $L\Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)\Big) \subset \Sigma_n(\mathbb{Z}_k)$, co stoi w sprzeczności z nieosobliwością przekształcenia L.

Reasumując, wektory $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}_k^{n\times 1}$ muszą być liniowo niezależne i w ten sposób możemy zdefiniować przekształcenie $\Lambda\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ postaci:

$$\Lambda(X) = L(X)U,$$

gdzie:

$$U := \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k).$$

Przekształcenie Λ jest liniowe, nieosobliwe i odwzorowuje osobliwe macierze o wyznaczniku równym zero w osobliwe macierze o wyznaczniku równym zero. Rozumując tak jak w dowodzie twierdzenia 31 (od zdania obejmującego tożsamość (2.13) do zdania zawierającego wzór (2.14)), wnosimy, iż:

$$\Lambda(X) = \begin{bmatrix} T_1\Big((X)_{\cdot 1}\Big) & T_2\Big((X)_{\cdot 2}\Big) & \cdots & T_n\Big((X)_{\cdot n}\Big) \end{bmatrix},$$

gdzie $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$.

Niech wektor $x \in \mathbb{Z}_k^{n\times 1}$ będzie jednym z wektorów bazy kanonicznej lub wektorem $[1, \ldots, 1]^T$. Przyjmijmy nie wprost, że wektor $T_i T_1^{-1} x$ nie jest krotnością[4] wektora x dla

[4]Tutaj, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 31, przez krotność wektora $z \in \mathbb{Z}_k^{n\times 1}$ rozumiemy wektor λz, gdzie $\lambda \in \mathbb{Z}_k$.

pewnego $i \in \{2, \dots, n\}$. Ponieważ wektor x ma przynajmniej jedną współrzędną będącą elementem odwracalnym, wiec macierz:

$$\begin{bmatrix} x & T_i T_1^{-1} x \end{bmatrix}$$

posiada przynajmniej jeden niezerowy minor stopnia dwa. Dobierając odpowiednie wektory $v_2 \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \in \mathbb{Z}_k^{n\times 1}$ z bazy kanonicznej, możemy doprowadzić do sytuacji, że $\det N \neq 0$, gdzie:

$$N := \begin{bmatrix} x & v_2 & \cdots & v_{i-1} & T_i T_1^{-1} x & v_{i+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix},$$

czyli $N \notin \Theta_n(\mathbb{Z}_k)$. Jeśli zdefiniujemy macierz:

$$M := \begin{bmatrix} T_1^{-1} x & T_2^{-1} v_2 & \cdots & T_{i-1}^{-1} v_{i-1} & T_1^{-1} x & T_{i+1}^{-1} v_{i+1} & \cdots & T_n^{-1} v_n \end{bmatrix} \in \Theta_n(\mathbb{Z}_k),$$

to wtedy mamy:

$$\Lambda(M) = N \notin \Theta(\mathbb{Z}_k),$$

a więc sprzeczność z jedną z własności przekształcenia Λ. Stąd dla każdego $i \in \{2, \dots, n\}$ wektor $T_i T_1^{-1} x$ jest krotnością wektora x i podstawiając za x kolejne wektory bazy kanonicznej oraz wektor $[1, \dots, 1]^T$, dowodzimy, że spełnione jest:

$$T_i = \gamma_i T_1, \qquad i \in \{2, \dots, n\},$$

gdzie skalary $\gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{Z}_k$ są elementami odwracalnymi. Fakt ten implikuje, iż przekształcenie L jest postaci:

$$\begin{aligned} L(X) = \Lambda(X) U^{-1} &= \begin{bmatrix} T_1\Big((X)_{\cdot 1}\Big) & \gamma_2 T_1\Big((X)_{\cdot 2}\Big) & \cdots & \gamma_n T_1\Big((X)_{\cdot n}\Big) \end{bmatrix} U^{-1} = \\ &= T_1 \begin{bmatrix} (X)_{\cdot 1} & (X)_{\cdot 2} & \cdots & (X)_{\cdot n} \end{bmatrix} \operatorname{diag}(1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) U^{-1} = PXQ, \end{aligned}$$

gdzie:

$$P := T_1 \qquad \text{oraz} \qquad Q := \operatorname{diag}(1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) U^{-1},$$

co kończy dowód twierdzenia. □

W dowodzie drugiej części odpowiednika twierdzenia Dieudonné, tak jak już wspomnieliśmy, użyjemy pierwszej części rzeczonego twierdzenia.

Dowód twierdzenia 36 podpunkt b). Z definicji izomorfizmu g_k oraz wzoru (2.27) możemy zapisać:

$$\begin{aligned} g_k\Big(L(X)\Big) &= \Big(h_k^{(1)}\Big(L(X)\Big), \dots, h_k^{(l)}\Big(L(X)\Big)\Big) = \\ &= \Big(h_k^{(1)}(L)\Big(h_k^{(1)}(X)\Big), \dots, h_k^{(l)}(L)\Big(h_k^{(l)}(X)\Big)\Big), \end{aligned}$$

a więc:

$$L(X) = g_k^{-1}\Big(h_k^{(1)}(L)\Big(h_k^{(1)}(X)\Big), \dots, h_k^{(l)}(L)\Big(h_k^{(l)}(X)\Big)\Big). \tag{2.33}$$

Pokażemy, że dla każdego $i \in \{1, \dots, l\}$ przekształcenie $h_k^{(i)}(L)$ jest nieosobliwe. Ponieważ przekształcenie L jest nieosobliwe, to liczba $\det L$ jest elementem odwracalnym, a stąd liczba $h_k^{(i)}(\det L)$ też musi być elementem odwracalnym. Ponieważ ze wzoru (2.25) spełnione jest:

$$\det\Big(h_k^{(i)}(L)\Big) = h_k^{(i)}(\det L),$$

zatem przekształcenie $h_k^{(i)}(L)$ jest nieosobliwe, co chcieliśmy pokazać. Pozostaje nam udowodnić, że dla każdego $i \in \{1, \dots, l\}$ przekształcenie $h_k^{(i)}(L)$ przenosi osobliwe macierze o wyznaczniku równym zero w osobliwe macierze również o wyznaczniku równym zero. W tym celu weźmy dowolną macierz $Y \in \Theta_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}})$. Oczywiście z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że istnieje macierz $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ taka, że zachodzi $h_k^{(i)}(Z) = Y$ oraz $h_k^{(j)}(Z) = \mathbf{0}$ dla każdego $j \in \{1, \dots, l\}$, $j \neq i$. Wynika to stąd, że liczby $p_l^{\alpha_l}, \dots, p_l^{\alpha_l}$ są parami względnie pierwsze. Wtedy także $Z \in \Theta_n(\mathbb{Z}_k)$, ponieważ ze wzoru (2.25) mamy:

$$\begin{aligned} g_k(\det Z) &= \Big(h_k^{(1)}(\det Z), \dots, h_k^{(l)}(\det Z)\Big) = \\ &= \bigg(\det\Big(h_k^{(1)}(Z)\Big), \dots, \det\Big(h_k^{(l)}(Z)\Big)\bigg) = (0, \dots, 0), \end{aligned}$$

czyli $\det Z = 0$. Stąd z definicji przekształcenia L spełnione jest:

$$\det\Big(L(Z)\Big) = 0,$$

a więc ze wzorów (2.25) oraz (2.27) dostajemy:

$$\begin{aligned} 0 = h_k^{(i)}(0) &= h_k^{(i)}\bigg(\det\Big(L(Z)\Big)\bigg) = \det\bigg(h_k^{(i)}\Big(L(Z)\Big)\bigg) = \\ &= \det\bigg(h_k^{(i)}(L)\Big(h_k^{(i)}(Z)\Big)\bigg) = \det\Big(h_k^{(i)}(L)(Y)\Big), \end{aligned}$$

czyli z dowolności macierzy Y rzeczywiście zachodzi $h_k^{(i)}(L)\Big(\Theta_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}})\Big) \subset \Theta_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}})$. Wykorzystując twierdzenie 36 podpunkt a), wnioskujemy, że dla każdego $i \in \{1, \dots, l\}$ istnieją macierze $A_i, B_i, C_i, D_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}})$ takie, że albo:

$$A_i, B_i \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}) \qquad \text{oraz} \qquad C_i = D_i = \mathbf{0}, \tag{2.34}$$

albo:

$$A_i = B_i = \mathbf{0} \qquad \text{oraz} \qquad C_i, D_i \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}) \tag{2.35}$$

oraz zachodzi:

$$h_k^{(i)}(L)\Big(h_k^{(i)}(X)\Big) = A_i h_k^{(i)}(X) B_i + C_i \Big(h_k^{(i)}(X)\Big)^T D_i. \tag{2.36}$$

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją macierze $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$, takie że dla każdego $i \in \{1, \dots, l\}$ spełnione są równości:

$$h_k^{(i)}(A) = A_i, \qquad h_k^{(i)}(B) = B_i, \qquad h_k^{(i)}(C) = C_i \qquad \text{oraz} \qquad h_k^{(i)}(D) = D_i. \tag{2.37}$$

Stąd oraz z własności (2.24), (2.22) i (2.21) wynika, że równość (2.36) dla każdego $i \in$

$\{1, \ldots, l\}$ przyjmuje postać:

$$h_k^{(i)}(L)\Big(h_k^{(i)}(X)\Big) = h_k^{(i)}(A)h_k^{(i)}(X)h_k^{(i)}(B)+h_k^{(i)}(C)\Big(h_k^{(i)}(X)\Big)^T h_k^{(i)}(D) = h_k^{(i)}\Big(AXB+CX^TD\Big).$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do zależności (2.33) i korzystając z definicji izomorfizmu g_k, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L(X) &= g_k^{-1}\bigg(h_k^{(1)}\Big(AXB + CX^TD\Big), \ldots, h_k^{(l)}\Big(AXB + CX^TD\Big)\bigg) = \\ &= g_k^{-1}\bigg(g_k\Big(AXB + CX^TD\Big)\bigg) = AXB + CX^TD. \end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze udowodnić, że $A + C, B + D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$. Zauważmy, że wykorzystując wzory (2.25) i (2.21) oraz równości (2.37), mamy:

$$\begin{aligned} g_k\Big(\det(A+C)\Big) &= \bigg(h_k^{(1)}\Big(\det(A+C)\Big), \ldots, h_k^{(l)}\Big(\det(A+C)\Big)\bigg) = \\ &= \bigg(\det\Big(h_k^{(1)}(A+C)\Big), \ldots, \det\Big(h_k^{(l)}(A+C)\Big)\bigg) = \\ &= \bigg(\det\Big(h_k^{(1)}(A) + h_k^{(1)}(C)\Big), \ldots, \det\Big(h_k^{(l)}(A) + h_k^{(1)}(C)\Big)\bigg) = \\ &= \Big(\det(A_1 + C_1), \ldots, \det(A_l + C_l)\Big) \end{aligned} \tag{2.38}$$

oraz analogicznie:

$$g_k\Big(\det(B+D)\Big) = \Big(\det(B_1 + D_1), \ldots, \det(B_l + D_l)\Big). \tag{2.39}$$

Z warunków (2.34) oraz (2.35) wynika, że zachodzi $A_i + C_i, B_i + D_i \in \mathcal{GL}(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}})$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, l\}$, a więc liczby $\det(A_i + C_i)$ oraz $\det(B_i + D_i)$ są elementami odwracalnymi. Stąd, na mocy równości (2.38) i (2.39), liczby $\det(A+C)$ oraz $\det(B+D)$ też są elementami odwracalnym, czyli $A + C, B + D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$, co kończy dowód twierdzenia. □

Pozostaje nam do udowodnienia odpowiednik twierdzenia Frobeniusa. Przeprowadzimy to również w dwóch etapach. Najpierw pierwszy etap, w którym wykorzystamy twierdzenie 36.

Dowód twierdzenia 35 podpunkt a). Rozpoczniemy od pokazania, iż przekształcenie $f_k(L)$ zachowuje wyznacznik macierzy. W tym celu weźmy dowolną macierz $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_p)$. Oczywiście trywialnym jest wskazanie poprzez zanurzenie takiej macierzy $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$, że zachodzi $f_k(Z) = Y$. Z definicji przekształcenia L mamy:

$$\det\Big(L(Z)\Big) = \det Z.$$

Z powyższego oraz ze wzorów (2.27) i (2.25) dostajemy:

$$\begin{aligned} \det\Big(f_k(L)(Y)\Big) &= \det\bigg(f_k(L)\Big(f_k(Z)\Big)\bigg) = \det\bigg(f_k\Big(L(Z)\Big)\bigg) = \\ &= f_k\bigg(\det\Big(L(Z)\Big)\bigg) = f_k(\det Z) = \det\Big(f_k(Z)\Big) = \det Y, \end{aligned}$$

czyli z dowolności macierzy Y przekształcenie $f_k(L)$ zachowuje wyznacznik przekształcanej macierzy. Ponieważ pierścień $\mathbb{Z}_p$ jest ciałem, więc z twierdzenia 30 wnioskujemy, iż przekształcenie $f_k(L)$ jest nieosobliwe, czyli $\det\Big(f_k(L)\Big) \neq 0$. Korzystając znowu ze wzoru (2.25), otrzymujemy:

$$f_k(\det L) = \det\Big(f_k(L)\Big) \neq 0,$$

czyli $\det L$ jest elementem odwracalnym, a więc przekształcenie L jest nieosobliwe. Oczywiście mamy $L\Big(\Theta_n(\mathbb{Z}_k)\Big) \subset \Theta_n(\mathbb{Z}_k)$, więc na mocy twierdzenia 36 podpunkt a) spełniona jest poszukiwana teza. □

Kolejno przechodzimy do drugiej części dowodu wspomnianego twierdzenia, w którym wykorzystamy udowodniona już część pierwszą.

Dowód twierdzenia 35 podpunkt b). Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 36 podpunkt b) tutaj także z definicji izomorfizmu g_k oraz na podstawie wzoru (2.27) możemy zapisać:

$$\begin{aligned} g_k\Big(L(X)\Big) &= \Big(h_k^{(1)}\Big(L(X)\Big), \ldots, h_k^{(l)}\Big(L(X)\Big)\Big) = \\ &= \Big(h_k^{(1)}(L)\Big(h_k^{(1)}(X)\Big), \ldots, h_k^{(l)}(L)\Big(h_k^{(l)}(X)\Big)\Big), \end{aligned}$$

a więc również:

$$L(X) = g_k^{-1}\Big(h_k^{(1)}(L)\Big(h_k^{(1)}(X)\Big), \ldots, h_k^{(l)}(L)\Big(h_k^{(l)}(X)\Big)\Big). \tag{2.40}$$

Udowodnimy teraz, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, l\}$ przekształcenie $h_k^{(i)}(L)$ zachowuje wyznacznik macierzy. W tym celu weźmy dowolną macierz $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}})$. Oczywiście poprzez zanurzenie istnieje macierz $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ taka, że zachodzi $h_k^{(i)}(Z) = Y$. Z definicji przekształcenia L mamy:

$$\det\Big(L(Z)\Big) = \det Z.$$

Z powyższego oraz wzorów (2.27) i (2.25) dostajemy:

$$\begin{aligned} \det\Big(h_k^{(i)}(L)(Y)\Big) &= \det\Big(h_k^{(i)}(L)\Big(h_k^{(i)}(Z)\Big)\Big) = \det\Big(h_k^{(i)}\Big(L(Z)\Big)\Big) = \\ &= h_k^{(i)}\Big(\det\Big(L(Z)\Big)\Big) = h_k^{(i)}(\det Z) = \det\Big(h_k^{(i)}(Z)\Big) = \det Y, \end{aligned}$$

a więc z dowolności macierzy Y przekształcenie $h_k^{(i)}(L)$ zachowuje wyznacznik macierzy. Wykorzystując twierdzenie 36 podpunkt a), wnioskujemy, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, l\}$ istnieją macierze $A_i, B_i, C_i, D_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}})$ takie, że albo:

$$A_i, B_i \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}), \qquad C_i = D_i = \mathbf{0} \qquad \text{oraz} \qquad \det(A_iB_i) = 1, \tag{2.41}$$

albo:

$$A_i = B_i = \mathbf{0}, \quad C_i, D_i \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}) \qquad \text{oraz} \qquad \det(C_iD_i) = 1, \tag{2.42}$$

a przy tym zachodzi:

$$h_k^{(i)}(L)\Big(h_k^{(i)}(X)\Big) = A_i h_k^{(i)}(X) B_i + C_i \Big(h_k^{(i)}(X)\Big)^T D_i. \tag{2.43}$$

Z chińskiego twierdzenia o resztach istnieją macierze $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$ takie, że dla każdego $i \in \{1, \dots, l\}$ spełnione są równości:

$$h_k^{(i)}(A) = A_i, \qquad h_k^{(i)}(B) = B_i, \qquad h_k^{(i)}(C) = C_i \qquad \text{oraz} \qquad h_k^{(i)}(D) = D_i. \tag{2.44}$$

Stąd oraz z własności (2.24), (2.22) i (2.21) wynika, że równość (2.43) dla każdego $i \in \{1, \dots, l\}$ przyjmuje postać:

$$h_k^{(i)}(L)\Big(h_k^{(i)}(X)\Big) = h_k^{(i)}(A) h_k^{(i)}(X) h_k^{(i)}(B) + h_k^{(i)}(C) \Big(h_k^{(i)}(X)\Big)^T h_k^{(i)}(D) = h_k^{(i)}\Big(AXB + CX^T D\Big).$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do zależności (2.40), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L(X) &= g_k^{-1}\Big(h_k^{(1)}\Big(AXB + CX^T D\Big), \dots, h_k^{(l)}\Big(AXB + CX^T D\Big)\Big) = \\ &= g_k^{-1}\Big(g_k\Big(AXB + CX^T D\Big)\Big) = AXB + CX^T D. \end{aligned}$$

Na sam koniec udowodnimy, że $A + C, B + D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$ oraz $\det\Big((A + C)(B + D)\Big) = 1$. Zauważmy, że z warunków (2.41) oraz (2.42) wynika, że $\det\Big((A_i + C_i)(B_i + D_i)\Big) = 1$ dla każdego $i \in \{1, \dots, l\}$. Wykorzystując własności (2.22) i (2.21) oraz równości (2.44), pokazujemy, że:

$$\begin{aligned} & g_k\Big(\det\Big((A + C)(B + D)\Big)\Big) = \\ &= \Big(h_k^{(1)}\Big(\det\Big((A + C)(B + D)\Big)\Big), \dots, h_k^{(l)}\Big(\det\Big((A + C)(B + D)\Big)\Big)\Big) = \\ &= \Big(\det\Big(h_k^{(1)}\Big((A + C)(B + D)\Big)\Big), \dots, \det\Big(h_k^{(l)}\Big((A + C)(B + D)\Big)\Big)\Big) = \\ &= \Big(\det\Big(\Big(h_k^{(1)}(A) + h_k^{(1)}(C)\Big)\Big(h_k^{(1)}(B) + h_k^{(1)}(D)\Big)\Big), \dots \\ & \qquad\qquad \dots, \det\Big(\Big(h_k^{(l)}(A) + h_k^{(l)}(C)\Big)\Big(h_k^{(l)}(B) + h_k^{(l)}(D)\Big)\Big)\Big) = \\ &= \Big(\det\Big((A_1 + C_1)(B_1 + D_1)\Big), \dots, \det\Big((A_l + C_l)(B_l + D_l)\Big)\Big) = (1, \dots, 1), \end{aligned}$$

czyli $\det\Big((A + C)(B + D)\Big) = 1$, co implikuje, że $A + C, B + D \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}_k)$ i kończy dowód. □

2.5. Osobliwe przekształcenia liniowe zachowujące macierze osobliwe lub nieosobliwe

Zasadnicze pytanie do obydwu twierdzeń 31 i 32 dotyczy tego, co się dzieje w sytuacji, gdy przekształcenie liniowe L jest osobliwe. Jeśli chodzi o twierdzenie 32, to odpowiedź zaprezentował de Seguins Pazzis w pracy [49]. Poniżej przedstawiamy jego wynik.

Twierdzenie 38. *Jeśli* $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ *jest osobliwym przekształceniem liniowym takim, że* $L\Big(\mathcal{GL}_n(\mathbb{F})\Big) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$*, to istnieją: n-wymiarowa przestrzeń* $\mathcal{V} \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}) \cup \{\mathbf{0}\}$*, izomorfizm* $\alpha\colon \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathcal{V}$ *oraz wektor* $u \in \mathbb{F}^{n\times 1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ *takie, że:*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = \alpha(Xu) \qquad \textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = \alpha(X^T u).$$

Uwaga 7. *Jeśli ciało* $\mathbb{F}$ *jest algebraicznie domknięte, to nie istnieje n-wymiarowa przestrzeń liniowa zawarta w* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{F}) \cup \{\mathbf{0}\}$*. Przykładowo jeśli ciało* $\mathbb{F}$ *jest skończone lub* $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$*, to taka przestrzeń zawsze istnieje. Jeśli natomiast* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$*, to rzeczona przestrzeń istnieje tylko dla* $n \in \{2, 4, 8\}$*.*

Powyższa uwaga w części dotyczącej ciała liczb rzeczywistych pochodzi z pracy [7], natomiast część dotycząca ciał skończonych i ciała liczb wymiernych można wywnioskować na podstawie pracy [49]. Dla ciał algebraicznie domkniętych uwaga ta trywialnie wynika z własności wartości własnych.

Warto wspomnieć, że de Seguins Pazzis podał swoje twierdzenie rozwijając kontrprzykład Botty z artykułu [7, Theorem 3]. Z tego samego artykułu [7, Theorem 1] pochodzi twierdzenie mówiące o sytuacji, gdy przekształcenie L z twierdzenia 31 jest osobliwe. Dowód tego twierdzenia przeprowadzony jest tam za pomocą twierdzenia Hilberta o zerach (niem. *Nullstellensatz*) przy mocnym założeniu algebraicznej domkniętości ciała $\mathbb{F}$. Autorowi dysertacji udało się jednak znacząco osłabić założenia wspomnianego twierdzenia i przy okazji uprościć dowód. Podajemy rzeczone twierdzenie już we wzmocnionej formie.

Twierdzenie 39. *Niech* $|F| \geqslant n+1$*. Jeśli* $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ *jest osobliwym przekształceniem liniowym takim, że* $L\Big(\Sigma_n(\mathbb{F})\Big) \subset \Sigma_n(\mathbb{F})$*, to wtedy* $L\Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{F})\Big) \subset \Sigma_n(\mathbb{F})$*.*

Zanim przejdziemy do dowodu powyższego twierdzenia, rozważmy dwie uwagi.

Uwaga 8. *Twierdzenie 39 pokazuje nam, przy podanych założeniach, charakteryzację algebraiczną osobliwego przekształcenia L zachowującego zbiór macierzy osobliwych. Mianowicie istnieje przestrzeń liniowa* $\mathcal{S} \subset \Sigma_n(\mathbb{F})$ *taka, że jeśli* $B_1, \ldots, B_{n^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ *jest bazą przestrzeni* $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$*, to wtedy* $L(B_1), \ldots, L(B_{n^2}) \in \mathcal{S}$*.*

Uwaga 9. *Założenie* $|\mathbb{F}| \geqslant n+1$ *nie jest optymalne, co w pracy [30] udowodnił Lim, pokazując wprost, że twierdzenie 39 zachodzi również, gdy* $|\mathbb{F}| = n = 2$*. W tym stanie rzeczy całkiem możliwe jest, że w ogóle można pominąć wspomniane założenie, czego jednak dotąd nie udało się udowodnić.*

Teraz rozważmy pomocniczy lemat poprzedzony pewną definicją.

Definicja 13. *Symbolem* $\operatorname{ev} X \subset \mathbb{F}$ *oznaczymy zbiór wszystkich wartości własnych macierzy* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$*.*

Lemat 8. *Jeśli* $|\mathbb{F}| \geqslant n+1$ *i macierz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ *nie jest macierzą zerową, to istnieją macierze* $Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ *takie, że:*

$$A = Y - Z$$

oraz:

$$|\operatorname{ev} Y \cup \operatorname{ev} Z| \geqslant n+1.$$

Dowód. Zauważmy, że istnieje $k \in \{1, \ldots, n\}$, dla którego mamy $(BAB^{-1})_{kk} \neq 0$, gdzie $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$. Rzeczywiście, jeśli istnieje $k \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $A_{kk} \neq 0$, to wystarczy wziąć $B = I$. Stąd dostajemy:

$$(BAB^{-1})_{kk} = (IAI^{-1})_{kk} = (IAI)_{kk} = A_{kk} \neq 0.$$

Jeśli natomiast dla każdego $m \in \{1, \ldots, n\}$ mamy $A_{mm} = 0$, to ponieważ $A \neq 0$, więc istnieją $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq l$, dla których spełnione jest $A_{lk} \neq 0$. Wtedy, jeśli tylko przyjmiemy:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \text{ lub } (i,j) = (k,l), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

to mamy:

$$(B^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j, \\ -1, & \text{gdy } (i,j) = (k,l), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

skąd otrzymujemy:

$$(BAB^{-1})_{kk} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_{kr}A_{rs}(B^{-1})_{sk} = \sum_{r=1}^{n} B_{kr}A_{rk} = A_{kk} + A_{lk} = A_{lk} \neq 0,$$

co wyczerpuje wszystkie możliwe sytuacje. Dzięki założeniu $|\mathbb{F}| \geqslant n+1$ możemy rozważyć teraz różnowartościowy, skończony ciąg skalarów $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n+1}$ taki, że $\lambda_k = (BAB^{-1})_{kk}$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $\lambda_{n+1} = 0$. Zdefiniujmy macierze $Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ następująco:

$$Y = B^{-1}CB \qquad \text{oraz} \qquad Z = B^{-1}DB,$$

gdzie $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ są takie, że:

$$C_{ij} = \begin{cases} (BAB^{-1})_{ij}, & \text{gdy } i < j, \\ \lambda_i, & \text{gdy } i = j, \\ 0, & \text{gdy } i > j \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad D_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i < j, \\ \lambda_i - (BAB^{-1})_{ii}, & \text{gdy } i = j, \\ -(BAB^{-1})_{ij}, & \text{gdy } i > j. \end{cases}$$

Wtedy oczywiście:

$$Y - Z = B^{-1}(C - D)B = B^{-1}BAB^{-1}B = A.$$

Poza tym:

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{n} = \operatorname{ev} C \qquad \text{oraz} \qquad \lambda_k - (BAB^{-1})_{kk} \in \operatorname{ev} D,$$

czyli:

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{n} = \operatorname{ev} Y \qquad \text{oraz} \qquad \lambda_{n+1} \in \operatorname{ev} Z,$$

ponieważ $\lambda_k - (BAB^{-1})_{kk} = \lambda_k - \lambda_k = 0 = \lambda_{n+1}$. Stąd ostatecznie otrzymujemy:

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{n+1} \subset \operatorname{ev} Y \cup \operatorname{ev} Z,$$

co na mocy definicji ciągu $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n+1}$ kończy dowód lematu. □

Opierając się na podanym lemacie możemy już przejść do dowodu głównego twierdzenia tego podrozdziału.

Dowód twierdzenia 39. Załóżmy nie wprost, że przekształcenie L odwzorowuje pewną macierz nieosobliwą na macierz nieosobliwą, czyli istnieje macierz $G \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$, dla której mamy $L(G) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$. Rozważmy przekształcenie $\Lambda\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ przedstawione wzorem:

$$\Lambda(X) = L(G)^{-1}L(GX).$$

Bez problemu można sprawdzić, że przekształcenie Λ jest liniowe, osobliwe, zachowuje macierze osobliwe oraz spełnia warunek $\Lambda(I) = I$. Ponieważ przekształcenie Λ jest osobliwe, więc w szczególności istnieje macierz $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ taka, że $\Lambda(K) = \mathbf{0}$. Na podstawie lematu 8 zapiszmy:

$$K = Y - Z, \tag{2.45}$$

gdzie macierze $Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ są takie, że:

$$|\operatorname{ev} Y \cup \operatorname{ev} Z| \geqslant n + 1. \tag{2.46}$$

Zauważmy jeszcze, że z równości (2.45) mamy:

$$\Lambda(Y) = \Lambda(K + Z) = \Lambda(K) + \Lambda(Z) = \Lambda(Z). \tag{2.47}$$

Jeśli $\mu \in \operatorname{ev} Y$, to mamy następujący ciąg implikacji:

$$\begin{aligned} \det(Y + \mu I) = 0 \;\Rightarrow\; & \det \Lambda(Y + \mu I) = 0 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; & \det\Big(\Lambda(Y) + \mu\Lambda(I)\Big) = 0 \;\Rightarrow\; \det\Big(\Lambda(Y) + \mu I\Big) = 0, \end{aligned}$$

skąd wnioskujemy, że $\mu \in \operatorname{ev} \Lambda(Y)$, czyli:

$$\operatorname{ev} Y \subset \operatorname{ev} \Lambda(Y). \tag{2.48}$$

Analogicznie otrzymujemy inkluzję $\operatorname{ev} Z \subset \operatorname{ev} \Lambda(Z)$, która na mocy równości (2.47) jest równoważna inkluzji:

$$\operatorname{ev} Z \subset \operatorname{ev} \Lambda(Y). \tag{2.49}$$

Korzystając z (2.48) oraz (2.49) otrzymujemy inkluzję:

$$\operatorname{ev} Y \cup \operatorname{ev} Z \subset \operatorname{ev} \Lambda(Y),$$

która wobec nierówności (2.46) daje warunek:

$$|\operatorname{ev} \Lambda(Y)| \geqslant n + 1,$$

co prowadzi do sprzeczności i implikuje tezę twierdzenia. □

2.6. Przekształcenia liniowe zachowujące rząd macierzy

Przyjmijmy w naszych rozważaniach, że jeśli nie jest napisane inaczej, to $\mathbb{F}$ jest dowolnym ciałem. Rozważymy w tym podrozdziale twierdzenia, które są rozwinięciami twierdzenia Frobeniusa z pracy [16]. Określają one postać przekształcenia liniowego zachowującego rzędy macierzy z przestrzeni $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. W znanych pracach w tym temacie (m.in.: [3], [37] i [40]) rzeczone twierdzenia przedstawiane są z różnymi założeniami dotyczącymi ciała $\mathbb{F}$ oraz zachowywanego rzędu. W prezentowanej dysertacji ujednolicimy oraz rozszerzymy kilka podstawowych faktów. Zacznijmy od najbardziej ogólnego wyniku.

Twierdzenie 40. *Jeśli przekształcenie liniowe $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachowuje rząd macierzy, czyli:*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon \operatorname{rank} L(X) = \operatorname{rank} X,$$

to istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ takie, że:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PXQ \qquad \textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PX^TQ.$$

W celu przeprowadzenia dowodu powyższego twierdzenia dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ oznaczmy przez E_{ij} macierz z przestrzeni $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ taką, że:

$$(E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } (k,l) \neq (i,j), \\ 1, & \text{gdy } (k,l) = (i,j). \end{cases}$$

W końcówce dowodu twierdzenia 40 skorzystamy z faktu, iż zbiór $\left\{E_{ij}\colon i, j \in \{1, \ldots, n\}\right\}$ jest bazą przestrzeni $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Ponieważ macierz E_{ij} ma rząd jeden dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, więc jej obraz poprzez przekształcenie L też musi mieć taki rząd. Wnioskujemy stąd, że dla dowolnej pary $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ istnieją wektory $u_{ij} \in \mathbb{F}^{n\times 1} \setminus \{0\}$ oraz $v_{ij} \in \mathbb{F}^{1\times n} \setminus \{0\}$ takie, że:

$$L(E_{ij}) = u_{ij}v_{ij}.$$

Rozważmy teraz kilka pomocniczych lematów. Będziemy w ich dowodach rozważać jedynie podpunkty a), ponieważ resztę podpunktów dowodzi się w analogiczny sposób. Standardową techniką dowodową wykorzystywaną tutaj będzie dowód apagogiczny.

Pierwszy z lematów informuje nas o kolinearności albo liniowej niezależności układów wektorów u_{ij} (odpowiednio v_{ij}) o tym samym jednym z indeksów.

Lemat 9. *Przy powyższych założeniach dla dowolnej pary $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ następujące układy wektorów:*

a) $u_{i1}, \ldots, u_{in}$,

b) $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$,

c) $v_{i1}, \ldots, v_{in}$,

d) $v_{1j}, \ldots, v_{nj}$,

mogą być tylko albo kolinearne, albo liniowo niezależne.

Dowód. Przyjmijmy, że $n \geqslant 3$, ponieważ dla $n = 2$ teza jest oczywista. Po pierwsze pokażemy, że jeśli dla pewnych $s, t \in \{1, \ldots, n\}$, $s \neq t$, wektory u_{is} oraz u_{it} są liniowo niezależne, to wtedy wektory v_{is} oraz v_{it} muszą być kolinearne. Rzeczywiście, zauważmy, że:

$$L(E_{is} + E_{it}) = u_{is}v_{is} + u_{it}v_{it} = \begin{bmatrix} u_{is} & u_{it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{is} \\ v_{it} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz $\begin{bmatrix} u_{is} & u_{it} \end{bmatrix}$ jest pełnego kolumnowego rzędu, więc:

$$\operatorname{rank} L(E_{is} + E_{it}) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} v_{is} \\ v_{it} \end{bmatrix}.$$

Jednak $\operatorname{rank}(E_{is} + E_{it}) = 1$, więc rząd macierzy $L(E_{is} + E_{it})$ też musi być równy jeden, czyli wektory v_{is} oraz v_{it} są kolinearne. Po drugie załóżmy nie wprost, że wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ nie są ani kolinearne, ani liniowo niezależne. Istnieją wtedy takie $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, n\}$, $j_1 \neq j_2$, że wektory u_{ij_1} oraz u_{ij_2} są liniowo niezależne, a więc wektory v_{ij_1} oraz v_{ij_2} są kolinearne. Dla dowolnego $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2\}$ wektor u_{ij} musi być liniowo niezależny względem wektora u_{ij_1} albo wektora u_{ij_2}, a więc wektor v_{ij} musi być kolinearny z wektorem v_{ij_1} albo z wektorem v_{ij_2}, czyli ostatecznie wektory $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ są kolinearne. W związku z tym istnieją skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ oraz wektor $x \in \mathbb{F}^{1\times n} \setminus \{0\}$ takie, że:

$$v_{i1} = \lambda_1 x, \qquad \ldots, \qquad v_{in} = \lambda_n x.$$

Jednak wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są liniowo zależne, więc tym bardziej wektory $\lambda_1 u_{i1}, \ldots, \lambda_n u_{in}$ są liniowo zależne. Możemy więc znaleźć skalary $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{F}$, nie wszystkie równe zero, dla których:

$$\mu_1\lambda_1 u_{i1} + \ldots + \mu_n\lambda_n u_{in} = 0.$$

Wtedy:

$$L(\mu_1 E_{i1} + \ldots + \mu_n E_{in}) = \mu_1 u_{i1}v_{i1} + \ldots + \mu_n u_{in}v_{in} = (\mu_1\lambda_1 u_{i1} + \ldots + \mu_n\lambda_n u_{in})x = 0,$$

czyli $\operatorname{rank} L(\mu_1 E_{i1} + \ldots + \mu_n E_{in}) = 0$, jednak $\operatorname{rank}(\mu_1 E_{i1} + \ldots + \mu_n E_{in}) = 1$, co prowadzi do sprzeczności i kończy dowód lematu. □

Kolejny lemat informuje nas, że zbiór wektorów u_{ij} i zbiór wektorów v_{ij} o tym samym jednym z indeksów nie mogą być ani jednocześnie kolinearne, ani jednocześnie liniowo niezależne.

Lemat 10. *Przy powyższych założeniach dla każdej pary $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi:*

a) wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są liniowo niezależne $\Leftrightarrow$ wektory $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ są kolinearne,

b) wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są kolinearne $\Leftrightarrow$ wektory $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ są liniowo niezależne,

c) wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są liniowo niezależne $\Leftrightarrow$ wektory $v_{1j}, \ldots, v_{nj}$ są kolinearne,

d) wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są kolinearne $\Leftrightarrow$ wektory $v_{1j}, \ldots, v_{nj}$ są liniowo niezależne.

Dowód.
„$\Rightarrow$" Przyjmijmy nie wprost, że wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są liniowo niezależne oraz wektory $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ również są liniowo niezależne. Ponieważ mamy:

$$L(E_{i1} + \ldots + E_{in}) = u_{i1}v_{i1} + \ldots + u_{in}v_{in} = \begin{bmatrix} u_{i1} & \cdots & u_{ts} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{bmatrix},$$

gdzie dwie ostatnie macierze są nieosobliwe, więc rank $L(E_{i1}+\ldots+E_{in}) = n$. Jednak mamy rank$(E_{i1} + \ldots + E_{in}) = 1$, co prowadzi do sprzeczności.
„$\Leftarrow$" Załóżmy nie wprost, że wektory $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ są kolinearne oraz wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ także są kolinearne. Istnieją więc skalary $\lambda, \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, dla których zachodzi równość:

$$u_{i2} = \lambda u_{i1}, \qquad v_{i2} = \mu v_{i1}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$L(\lambda\mu E_{i1} - E_{i2}) = \lambda\mu u_{i1}v_{i1} - u_{i2}v_{i2} = \lambda\mu u_{i1}v_{i1} - \lambda\mu u_{i1}v_{i1} = 0,$$

czyli rank $L(\lambda\mu E_{i1} - E_{i2}) = 0$, pomimo że rank$(\lambda\mu E_{i1} - E_{i2}) = 1$. To zaś prowadzi do niedorzeczności i dowodzi tezy lematu. $\square$

W ostatnim lemacie udowodnimy, że zbiór wektorów u_{ij} (odpowiednio v_{ij}) o ustalonym indeksie i oraz zbiór wektorów u_{ij} (odpowiednio v_{ij}) o ustalonym indeksie j nie mogą być jednocześnie kolinearne lub jednocześnie liniowo niezależne.

Lemat 11. *Przy powyższych założeniach dla każdej pary $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi:*

a) wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są liniowo niezależne $\Leftrightarrow$ wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są kolinearne,

b) wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są kolinearne $\Leftrightarrow$ wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są liniowo niezależne,

c) wektory $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ są liniowo niezależne $\Leftrightarrow$ wektory $v_{1j}, \ldots, v_{nj}$ są kolinearne,

d) wektory $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ są kolinearne $\Leftrightarrow$ wektory $v_{1j}, \ldots, v_{nj}$ są liniowo niezależne.

Dowód.
„$\Leftarrow$" Załóżmy przez sprowadzenie do sprzeczności, że wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są kolinearne oraz wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ również są kolinearne. Stąd istnieją takie skalary $\lambda, \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, że:

$$u_{is} = \lambda u_{ij}, \qquad u_{tj} = \mu u_{ij},$$

gdzie $s \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ oraz $t \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Wtedy otrzymujemy:

$$L(E_{ij} + E_{is} + E_{tj}) = u_{ij}v_{ij} + u_{is}v_{is} + u_{tj}v_{tj} = u_{ij}(v_{ij} + \lambda v_{is} + \mu v_{tj}),$$

czyli rank $L(E_{ij} + E_{is} + E_{tj}) \leqslant 1$. Jednakże rank$(E_{ij} + E_{is} + E_{tj}) = 2$, co bezpośrednio prowadzi do sprzeczności.
„$\Rightarrow$" Załóżmy teraz nie wprost, że wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są liniowo niezależne oraz wektory

$u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ także są liniowo niezależne. Na podstawie lematu 10 otrzymujemy, że wektory $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ są kolinearne i wektory $v_{1j}, \ldots, v_{nj}$ również są kolinearne. To zaś, na mocy rozważań analogicznych do tych przedstawionych przed chwilą, doprowadza do niedorzeczności i ostatecznie kończy dowód lematu. □

Pozostało już nam tylko przeprowadzić bezpośredni dowód twierdzenia 40.

Dowód twierdzenia 40. Dzięki wcześniejszym rozważaniom wiemy już, iż:

$$L(E_{ij}) = u_{ij}v_{ij}, \tag{2.50}$$

gdzie $u_{ij} \in \mathbb{F}^{n\times 1} \setminus \{0\}$ oraz $v_{ij} \in \mathbb{F}^{1\times n} \setminus \{0\}$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Na podstawie lematu 11 wystarczy rozważyć dwie sytuacje, a mianowicie że:

1) dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są liniowo niezależne oraz wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są kolinearne,

2) dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są liniowo niezależne oraz wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są kolinearne.

Zajmijmy się najpierw pierwszą sytuacją. Korzystając z lematu 10, wnioskujemy, iż dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$ wektory $v_{1j}, \ldots, v_{nj}$ są kolinearne. Oznacza to, że dla dowolnych $i, j \in \{2, \ldots, n\}$ istnieją skalary $\lambda_{ij}, \mu_{ij} \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ takie, że:

$$u_{ij} = \lambda_{ij}u_{i1}, \qquad v_{ij} = \mu_{ij}v_{1j}.$$

Stąd oczywiście mamy:

$$\begin{array}{llcl}
L(E_{11}) = u_{11}v_{11}, & L(E_{12}) = \lambda_{12}u_{11}v_{12}, & \cdots & L(E_{1n}) = \lambda_{1n}u_{11}v_{1n}, \\
L(E_{21}) = \mu_{21}u_{21}v_{11}, & L(E_{22}) = \lambda_{22}\mu_{22}u_{21}v_{12}, & \cdots & L(E_{2n}) = \lambda_{2n}\mu_{2n}u_{21}v_{1n}, \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
L(E_{n1}) = \mu_{n1}u_{n1}v_{11}, & L(E_{n2}) = \lambda_{n2}\mu_{n2}u_{n1}v_{12}, & \cdots & L(E_{nn}) = \lambda_{nn}\mu_{nn}u_{n1}v_{1n}.
\end{array}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$p_1 := u_{11}, \qquad p_2 := \mu_{21}u_{21}, \qquad \ldots, \qquad p_n := \mu_{n1}u_{n1}$$

oraz:

$$q_1 := v_{11}, \qquad q_2 := \lambda_{12}v_{12}, \qquad \ldots, \qquad q_n := \lambda_{1n}v_{1n},$$

otrzymujemy:

$$\begin{array}{llcl}
L(E_{11}) = p_1q_1, & L(E_{12}) = p_1q_2, & \cdots & L(E_{1n}) = p_1q_n, \\
L(E_{21}) = p_2q_1, & L(E_{22}) = \sigma_{22}p_2q_2, & \cdots & L(E_{2n}) = \sigma_{2n}p_2q_n, \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
L(E_{n1}) = p_nq_1, & L(E_{n2}) = \sigma_{n2}p_nq_2, & \cdots & L(E_{nn}) = \sigma_{nn}p_nq_n,
\end{array}$$

gdzie $\sigma_{ij} := \lambda_{ij}\lambda_{1j}^{-1}\mu_{ij}\mu_{i1}^{-1} \neq 0$ dla dowolnych $i, j \in \{2, \ldots, n\}$. Ponadto wektory $p_1, \ldots, p_n$ są liniowo niezależne oraz wektory $q_1, \ldots, q_n$ również są liniowo niezależne, co wynika z lematu 10. Ustalmy dowolnie $i, j \in \{2, \ldots, n\}$. Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} L(E_{11} + E_{i1} + E_{1j} + E_{ij}) &= p_1q_1 + p_iq_1 + p_1q_j + \sigma_{ij}p_iq_j = \\ &= (p_1 + p_i)(q_1 + q_j) + (\sigma_{ij} - 1)p_iq_j = \\ &= \begin{bmatrix} p_1 + p_i & p_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 + q_j \\ (\sigma_{ij} - 1)q_j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wektory $p_1 + p_i$ oraz p_i są liniowo niezależne, a więc macierz $\begin{bmatrix} p_1 + p_i & p_i \end{bmatrix}$ jest pełnego kolumnowego rzędu, skąd:

$$\operatorname{rank} L(E_{11} + E_{i1} + E_{1j} + E_{ij}) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} q_1 + q_j \\ (\sigma_{ij} - 1)q_j \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\operatorname{rank}(E_{11} + E_{i1} + E_{1j} + E_{ij}) = 1$, więc rząd macierzy $L(E_{11} + E_{i1} + E_{1j} + E_{ij})$ także musi być równy jeden, co z liniowej niezależności wektorów $q_1 + q_j$ i q_j oznacza, że zachodzi $\sigma_{ij} = 1$. Podsumowując, dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mamy:

$$L(E_{ij}) = p_iq_j,$$

co można zapisać również jako:

$$L(E_{ij}) = PE_{ij}Q,$$

gdzie:

$$P := \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad Q := \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

są macierzami ze zbioru $\mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$. Natychmiastowym wnioskiem jest to, że dla każdego $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ mamy wtedy:

$$L(X) = PXQ,$$

co należało pokazać.

Przejdźmy więc do drugiej sytuacji i zdefiniujmy przekształcenie $\Lambda\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ przy pomocy wzoru:

$$\Lambda(X) = \big(L(X)\big)^T.$$

Zauważmy, że z własności transpozycji macierzy powyższe przekształcenie jest liniowe oraz zachowuje rząd macierzy. Korzystając z równości (2.50) dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mamy:

$$\Lambda(E_{ij}) = v_{ij}^Tu_{ij}^T.$$

Z lematu 10 dostajemy, że wektory $v_{i1}^T, \ldots, v_{in}^T$ są kolinearne oraz wektory $v_{1j}^T, \ldots, v_{nj}^T$ są liniowo niezależne. W ten sposób sprowadziliśmy drugą sytuację do pierwszej sytuacji. Stąd stwierdzamy, że istnieją macierze $R, S \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ takie, że dla każdego $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$

zachodzi:

$$\Lambda(X) = RXS.$$

Definiując $P := S^T$ oraz $Q := R^T$, otrzymujemy, że dla każdego $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachodzi:

$$L(X) = (RXS)^T = PX^TQ,$$

co już bezpośrednio prowadzi do tezy twierdzenia. □

Zauważmy, że przy dowodzeniu twierdzenia 40 wykorzystywaliśmy jedynie fakt, iż przekształcenie liniowe L zachowuje rzędy jeden i dwa macierzy. Możemy więc wspomniane powyżej twierdzenie następująco przeredagować.

Twierdzenie 41. *Jeśli przekształcenie liniowe $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachowuje rzędy jeden i dwa macierzy, czyli:*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon \Big(\big(\operatorname{rank} X = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{rank} L(X) = 1\big) \wedge \big(\operatorname{rank} X = 2 \;\Rightarrow\; \operatorname{rank} L(X) = 2\big)\Big),$$

to istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ takie, że:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PXQ \qquad \textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PX^TQ.$$

Jeśli chcielibyśmy otrzymać taki sam wynik, zakładając jedynie, że przekształcenie liniowe L zachowuje macierze rzędu jeden, to musielibyśmy przykładowo założyć, że ciało $\mathbb{F}$ jest algebraicznie domknięte. Dowód takiego twierdzenia można przeprowadzić z wykorzystaniem lematów 9 i 10 oraz według dowodu twierdzenia 40, ponieważ nie wykorzystuje się w nich tak naprawdę założenia, iż przekształcenie liniowe L zachowuje macierze rzędu dwa. Jedynie dowód lematu 11 należy zmienić, korzystając z domkniętości ciała $\mathbb{F}$. Odpowiednie twierdzenie oraz alternatywną wersję dowodu lematu 11 przy osłabionych założeniach podajemy poniżej. Inny dowód twierdzenia 42, przeprowadzony w języku tensorów, podał Roy Westwick w artykule [51]. Dowód tego twierdzenia można znaleźć także w artykule [40]. Przyjęto tam jednak silniejsze założenie niż w twierdzeniu 40, a mianowicie że charakterystyka ciała algebraicznie domkniętego $\mathbb{F}$ jest równa zero.

Twierdzenie 42. *Niech ciało $\mathbb{F}$ będzie algebraicznie domknięte. Jeśli przekształcenie liniowe $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachowuje rząd macierzy równy jeden, czyli:*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon \big(\operatorname{rank} X = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{rank} L(X) = 1\big),$$

to istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ takie, że:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PXQ \qquad \textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PX^TQ.$$

Dowód lematu 11 (alternatywna wersja).
„$\Leftarrow$" Załóżmy, że wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są kolinearne oraz wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ również są kolinearne. Ustalmy dowolne $s \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ oraz dowolne $t \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Rozważymy dwie sytuacje. W pierwszej przyjmiemy, że wektory u_{ij} oraz u_{st} są liniowo niezależne,

natomiast w drugiej, że są kolinearne. Przejdźmy do pierwszej sytuacji. Ponieważ z założenia wektory u_{ij}, u_{sj} oraz u_{it} są kolinearne i wektor u_{st} jest z każdym z nich liniowo niezależny, więc na podstawie lematu 10 wektory v_{sj}, v_{it} oraz v_{st} są kolinearne i wektor v_{ij} jest z każdym z nich liniowo niezależny. Istnieją więc skalary $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ takie, że:

$$u_{sj} = \lambda_1 u_{ij}, \qquad u_{it} = \lambda_2 u_{ij}, \qquad v_{sj} = \mu_1 v_{st}, \qquad v_{it} = \mu_2 v_{st}.$$

Wtedy otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L(E_{ij} + E_{sj} + E_{it} + E_{st}) &= u_{ij}v_{ij} + u_{sj}v_{sj} + u_{it}v_{it} + u_{st}v_{st} = \\ &= u_{ij}v_{ij} + \lambda_1\mu_1 u_{ij}v_{st} + \lambda_2\mu_2 u_{ij}v_{st} + u_{st}v_{st} = \\ &= u_{ij}(v_{ij} + \lambda_1\mu_1 v_{st}) + (\lambda_2\mu_2 u_{ij} + u_{st})v_{st} = \\ &= \begin{bmatrix} u_{ij} & \lambda_2\mu_2 u_{ij} + u_{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ij} + \lambda_1\mu_1 v_{st} \\ v_{st} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wektory u_{ij} i $\lambda_2\mu_2 u_{ij} + u_{st}$ są liniowo niezależne oraz wektory $v_{ij} + \lambda_1\mu_1 v_{st}$ i v_{st} także są liniowo niezależne. W szczególności to oznacza, że macierz $\begin{bmatrix} u_{ij} & \lambda_2\mu_2 u_{ij} + u_{st} \end{bmatrix}$ jest pełnego kolumnowego rzędu, a macierz $\begin{bmatrix} v_{ij} + \lambda_1\mu_1 v_{st} \\ v_{st} \end{bmatrix}$ jest rzędu dwa, czyli:

$$\operatorname{rank} L(E_{ij} + E_{sj} + E_{it} + E_{st}) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} v_{ij} + \lambda_1\mu_1 v_{st} \\ v_{st} \end{bmatrix} = 2.$$

To sprowadza pierwszą sytuację do niedorzeczności, gdyż $\operatorname{rank}(E_{ij} + E_{sj} + E_{it} + E_{st}) = 1$. Przejdziemy więc do drugiej sytuacji. Ponieważ z założenia wektory u_{1j}, u_{sj}, u_{it} oraz u_{st} są kolinearne, więc wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}, u_{1t}, \ldots, u_{nt}$ też muszą być kolinearne. Istnieją wtedy skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ oraz wektor $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ takie, że:

$$u_{1j} = \lambda_1 x, \qquad \ldots, \qquad u_{nj} = \lambda_n x, \qquad u_{1t} = \mu_1 x, \qquad \ldots, \qquad u_{nt} = \mu_n x.$$

Korzystając z lematu 10, widzimy, że wektory $v_{1t}, \ldots, v_{nt}$ są liniowo niezależne, czyli tym bardziej liniowo niezależne są też wektory $\mu_1 v_{1t}, \ldots, \mu_n v_{nt}$. Z algebraicznej domkniętości ciała $\mathbb{F}$ istnieje $\gamma \in \mathbb{F}$ takie, że wyznacznik macierzy:

$$A + \gamma B = B\Big(B^{-1}A + \gamma I\Big)$$

jest równy zero, gdzie:

$$A := \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_n v_{nj} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad B := \begin{bmatrix} \mu_1 v_{1t} \\ \vdots \\ \mu_n v_{nt} \end{bmatrix},$$

czyli istnieją skalary $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{F}$, nie wszystkie równe zero, dla których:

$$\kappa_1(\lambda v_{1j} + \gamma\mu_1 v_{1t}) + \ldots + \kappa_n(\lambda v_{nj} + \gamma\mu_n v_{nt}) = 0.$$

W tej sytuacji mamy:

$$\begin{aligned} L\Big((\kappa_1(E_{1j}+\gamma E_{1t})+\ldots+\kappa_n(E_{nj}+\gamma E_{nt})\Big) = \\ &= \kappa_1(u_{1j}v_{1j}+\gamma u_{1t}v_{1t})+\ldots+\kappa_n(u_{nj}v_{nj}+\gamma u_{nt}v_{nt}) = \\ &= \kappa_1(\lambda_1 x v_{1j}+\gamma\mu_1 x v_{1t})+\ldots+\kappa_n(\lambda_n x v_{nj}+\gamma\mu_n x v_{nt}) = \\ &= x\Big(\kappa_1(\lambda_1 v_{1j}+\gamma\mu_1 v_{1t})+\ldots+\kappa_n(\lambda_n v_{nj}+\gamma\mu_n v_{nt})\Big) = 0. \end{aligned}$$

To znaczy:

$$\operatorname{rank} L\Big((\kappa_1(E_{1j}+\gamma E_{1t})+\ldots+\kappa_n(E_{nj}+\gamma E_{nt})\Big) = 0,$$

pomimo, że:

$$\operatorname{rank}\Big((\kappa_1(E_{1j}+\gamma E_{1t})+\ldots+\kappa_n(E_{nj}+\gamma E_{nt})\Big) = 1,$$

co bezpośrednio prowadzi do sprzeczności.
„$\Rightarrow$" Jeśli natomiast założymy, że wektory $u_{i1},\ldots,u_{in}$ są liniowo niezależne oraz wektory $u_{1j},\ldots,u_{nj}$ też są liniowo niezależne, to z lematu 10 mamy, że wektory $v_{i1},\ldots,v_{in}$ są kolinearne jak i wektory $v_{1j},\ldots,v_{nj}$ są kolinearne. Stąd, prowadząc analogiczne rozważania do tych powyżej, dochodzimy do sprzeczności. □

Definicja 14. *Nazwijmy n-wymiarową przestrzeń zawartą w zbiorze $\mathcal{GL}_n(\mathbb{F})\cup\{0\}$ pełną przestrzenią nieosobliwą, natomiast n-wymiarową przestrzeń zawartą w zbiorze macierzy o rzędzie równym jeden powiększonym o macierz zerową nazwijmy pełną przestrzenią macierzy rzędu jeden.*

Poza przekształceniami nieosobliwymi możemy jeszcze znaleźć przekształcenia osobliwe, które zachowują rząd macierzy równy jeden. Jednak do tego celu konieczne jest istnienie pełnej przestrzeni nieosobliwej (zob. uwaga 7). Poniżej przedstawiamy rzeczone twierdzenie wraz z dowodem. Inny dowód, napisany w języku tensorów, można też znaleźć w pracy [51].

Twierdzenie 43. *Niech przekształcenie liniowe $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachowuje rząd macierzy równy jeden, czyli:*

$$\forall X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon \Big(\operatorname{rank} X = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{rank} L(X) = 1\Big).$$

Wtedy, jeśli przekształcenie L jest:

a) nieosobliwe, to istnieją macierze $P,Q\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ takie, że:

$$\forall X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PXQ \qquad \textit{albo} \qquad \forall X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PX^TQ,$$

b) osobliwe, to istnieją pełna przestrzeń macierzy rzędu jeden $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ i pełna przestrzeń nieosobliwa $\mathcal{V}\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ takie, że:

$$\forall X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = \sum_{k=1}^{n} U_kXV_k \qquad \textit{albo} \qquad \forall X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = \sum_{k=1}^{n} V_kXU_k,$$

gdzie macierze $U_1,\ldots,U_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{U}$ oraz macierze $V_1,\ldots,V_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{V}$.

Dowód. Mamy do rozważenia cztery sytuacje:

1) dla każdego $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są liniowo niezależne oraz wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są kolinearne,

2) dla każdego $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są liniowo niezależne oraz wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są kolinearne,

3) istnieją $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są kolinearne oraz wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są również kolinearne

4) istnieją $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że wektory $u_{1j}, \ldots, u_{nj}$ są liniowo niezależne oraz wektory $u_{i1}, \ldots, u_{in}$ są również liniowo niezależne.

Pierwsza i druga sytuacja, na mocy dowodu twierdzenia 40, daje nam sytuacje nieosobliwą. W przypadku trzeciej sytuacji, korzystając z takich samych narzędzi jak w alternatywnej wersji dowodu lematu 11, otrzymujemy kolinearność wektorów $u_{11}, \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{n1}, \ldots, u_{nn}$. Bez utraty ogólności możemy założyć, że są one wszystkie równe pewnemu wektorowi $u \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Stąd dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mamy:

$$L(E_{ij}) = uv_{ij},$$

czyli dla dowolnego $X \in \mathcal{M}_n(F)$ zachodzi:

$$L(X) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} ux_{kl}v_{kl} = \sum_{k=1}^{n} u \begin{bmatrix} x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k1} \\ \vdots \\ v_{kn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} U_k X V_k,$$

gdzie:

$$U_1 := \begin{bmatrix} u & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad U_n := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & u \end{bmatrix}$$

oraz:

$$V_1 := \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad V_n := \begin{bmatrix} v_{n1} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierze $U_1, \ldots, U_n$ bez wątpienia tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{U}$. Załóżmy nie wprost, że macierze $V_1, \ldots, V_n$ nie tworzą bazy przestrzeni $\mathcal{V}$. Istnieją wtedy skalary $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{F}$, nie wszystkie równe zero, dla których macierz:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k V_k$$

jest osobliwa. Znajdźmy wektor $q \in \mathbb{F}^{1\times n}$ taki, że:

$$q \sum_{k=1}^{n} p_k V_k = 0.$$

Zdefiniujmy macierz $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ następująco:

$$Y = pq,$$

gdzie $p = [p_1, \cdots, p_n]$. Wtedy:

$$L(Y) = \sum_{k=1}^{n} U_k Y V_k = uq \sum_{k=1}^{n} p_k V_k = 0,$$

czyli $\operatorname{rank} L(Y) = 0$, podczas gdy $\operatorname{rank} Y = 1$, co prowadzi do sprzeczności. Czwartą sytuację można sprowadzić do trzeciej, ponieważ dzięki lematowi 10 jesteśmy w stanie pokazać, że istnieją $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że wektory $v_{1j}, \ldots, v_{nj}$ są kolinearne oraz wektory $v_{i1}, \ldots, v_{in}$ również są kolinearne. Jak wyżej dostajemy kolinearność wektorów $v_{11}, \ldots, v_{1n}, \ldots, v_{n1}, \ldots, v_{nn}$. Bez utraty ogólności oznacza to, iż istnieje wektor $v \in \mathbb{F}^{1\times n}$ taki, że dla każdego $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi:

$$L(E_{ij}) = u_{ij} v.$$

Teraz dla dowolnego $X \in \mathcal{M}_n(F)$ mamy:

$$L(X) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} u_{lk} x_{lk} v = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} u_{1k} & \cdots & u_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} v = \sum_{k=1}^{n} V_k X U_k,$$

gdzie:

$$V_1 := \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad V_n := \begin{bmatrix} u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

oraz:

$$U_1 := \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad U_n := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{bmatrix}.$$

Podobnie jak wcześniej pokazujemy, że macierze $U_1, \ldots, U_n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{U}$, a macierze $V_1, \ldots, V_n$ bazę przestrzeni $\mathcal{V}$, co kończy dowód twierdzenia. □

Powyższe twierdzenie pokazuje, że warunek domkniętości algebraicznej ciała $\mathbb{F}$ podany w twierdzeniu 42 można osłabić. Sformułujmy więc teraz optymalną wersję tego twierdzenia.

Twierdzenie 44. *Niech przekształcenie liniowe $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachowuje rząd macierzy równy jeden, czyli:*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon \Big(\operatorname{rank} X = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{rank} L(X) = 1\Big).$$

Jeśli przestrzeń $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ nie zawiera żadnej pełnej przestrzeni nieosobliwej, to istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ takie, że:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PXQ \qquad \textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PX^T Q.$$

Naturalnym pytaniem jest, czy powyższe twierdzenie zachodzi również, gdy rząd macierzy równy jeden zastąpimy dowolnym rzędem równym k, gdzie $k \in \{1, \dots, n\}$. Tą tematyką zajmowali się D.Ž. Djoković w pracy [13] i L.B. Beasley w pracach [3], [4], [2] i [5]. Wynikiem ich badań było poniższe twierdzenie sformułowane przez Djokovića dla nieskończonych ciał i rozszerzone do obecnej postaci przez Beasleya.

Twierdzenie 45. *Niech będzie spełnione $|\mathbb{F}| \geqslant 4$ oraz niech nieosobliwe przekształcenie liniowe $L\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachowuje rząd macierzy równy k, gdzie $k \in \{1, \dots, n\}$, czyli:*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon \Big(\operatorname{rank} X = k \;\Rightarrow\; \operatorname{rank} L(X) = k\Big).$$

Wtedy istnieją macierze $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ takie, że:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PXQ \qquad \textit{albo} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon L(X) = PX^TQ.$$

3

Dodatki

3.1. Generowanie zbiorów $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ oraz $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$

Powszechnie znany jest fakt, iż macierze $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ generują grupę $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Wynika on bezpośrednio z poniższego twierdzenia, mówiącego o generowaniu zbioru $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ za pomocą skończonych iloczynów pewnych macierzy[1].

Twierdzenie 46. *Zbiór $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ można wygenerować przy pomocy skończonych iloczynów macierzy* $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

W trakcie przygotowywania dysertacji udało się uogólnić powyższe twierdzenie na zbiory $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$, gdzie $\mathbb{Z}_k$ to pierścienie modulo. Warto zauważyć, że w dowodzie poniższego twierdzenia korzysta się z twierdzenia o dzieleniu z resztą w pierścieniu modulo. Pomimo, że taki pierścień nie zawsze jest nawet dziedziną Euklidesa, to o dziwo tutaj wspomniane twierdzenie wciąż działa. Oczywiście nierówności pomiędzy elementami pierścienia modulo rozpatrujemy jako nierówności pomiędzy odpowiednimi liczbami całkowitymi.

Twierdzenie 47. *Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Zbiór $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$ można wygenerować przy pomocy skończonych iloczynów macierzy* $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_k)$.

Dowód. Niech G będzie zbiorem wszystkich możliwych skończonych iloczynów macierzy $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Stąd jeśli $A, B \in G$, to również $AB \in G$. Ponieważ wyznaczniki powyższych dwóch macierzy są równe jeden, więc z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że $G \subset \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$. Zdefiniujmy dla każdego $z \in \mathbb{Z}_k$ macierze:

$$S(z) := \begin{bmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad T(z) := \begin{bmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że:

$$S(z) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^z \qquad \text{i} \qquad T(z) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^z \qquad \text{dla każdego } z \in \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}$$

oraz:

$$S(0) = T(0) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^k.$$

[1] Podobne zagadnienia rozważał Wilhelm Magnus w artykułach [32, 34, 33].

Stąd $S(z), T(z) \in G$ dla każdego $z \in \mathbb{Z}_k$. Ponadto zdefiniujmy macierz diagonalną:

$$D(u,v) := \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$$

dla $u, v \in \mathbb{Z}_k$ takich, że $uv = 1$. Ponieważ zachodzi:

$$T(v)S(-u)T(v-1)S(1)T(-1) = \begin{bmatrix} u & 1-uv \\ uv-1 & v(2-uv) \end{bmatrix},$$

więc $D(u,v) \in G$ dla dowolnych $u, v \in \mathbb{Z}_k$, takich że $uv = 1$. Zwróćmy uwagę, że pomnożenie dowolnej macierzy z lewej strony przez $S(z)$ lub $T(z)$ powoduje dodanie odpowiednio jej drugiego lub pierwszego wiersza pomnożonego przez z do wiersza odpowiednio pierwszego lub drugiego. Weźmy dowolną macierz $X \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$. Ponieważ jej wyznacznik jest elementem odwracalnym pierścienia $\mathbb{Z}_k$, więc istnieje macierz $X^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_k)$. Z twierdzenia Cauchy'ego wnosimy, że $X^{-1} \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$. Udowodnimy później, że istnieje wtedy macierz $Y \in G$, dla której:

$$YX^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_k$. Wcześniej jednak sprawdzimy bezpośrednio, iż $\det(YX^{-1}) = \alpha\beta$. Ponieważ na podstawie twierdzenia Cauchy'ego zachodzi $YX^{-1} \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$, więc musi być spełnione $\alpha\beta = 1$. To oznacza, że:

$$S(-\beta\gamma)D(\beta,\alpha)YX^{-1} = S(-\beta\gamma)\begin{bmatrix} \alpha\beta & \beta\gamma \\ 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} = S(-\beta\gamma)\begin{bmatrix} 1 & \beta\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

a stąd dostajemy:

$$X = S(-\beta\gamma)D(\beta,\alpha)Y,$$

czyli $X \in G$, a więc $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z}_k) \subset G$. Pozostaje nam sprawdzić poprawność założenia (3.1). W tym celu przyjmijmy, że:

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Jeśliby jednocześnie było $a = 0$ i $c = 0$, to wtedy $\det(X^{-1}) = 0$, co prowadzi do sprzeczności. Jeśli $a \neq 0$ i $c = 0$, to przyjmujemy $Y = I$. Jeżeli $a = 0$ i $c \neq 0$, to wtedy kładziemy $Y = T(-1)S(1)$. Jeśli natomiast $a \neq 0$ i $c \neq 0$, to z twierdzenia o dzieleniu z resztą istnieją $l \in \mathbb{N}$ oraz $q_1, q_2, \ldots, q_l \in \mathbb{Z}_k$ takie, że wartości:

$$\begin{aligned} r_1 &:= a + q_1 c, \\ r_2 &:= c + q_2 r_1, \\ r_3 &:= r_1 + q_3 r_2, \\ &\vdots \\ r_l &:= r_{l-2} + q_l r_{l-1}, \end{aligned}$$

spełniają warunek $c > r_1 > r_2 > \ldots > r_{l-1} > r_l = 0$. Wtedy przyjmujemy, że:

$$Y = \begin{cases} T(q_l)S(q_{l-1})\ldots T(q_2)S(q_1), & \text{gdy } l \in 2\mathbb{N}, \\ T(-1)S(q_l+1)T(q_{l-1})\ldots T(q_2)S(q_1), & \text{gdy } l \in 2\mathbb{N}-1. \end{cases}$$

W ten sposób w pełni potwierdzamy założenie (3.1), co wyczerpuje dowód twierdzenia. $\square$

Oczywiście z twierdzenia 47 wynika, że grupa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$ jest generowana przez macierze $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_k)$. Co więcej z twierdzeń 46 i 47 wynika wprost bardzo ciekawy wynik o istnieniu epimorfizmu z grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ na grupę $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$.

Twierdzenie 48. *Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Funkcja $\phi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$ określona wzorem:*

$$\big(\phi(X)\big)_{ij} \equiv (X)_{ij} \mod k \qquad \text{dla } i,j \in \{1,2\}$$

jest epimorfizmem.

3.2. Inne przekształcenia zachowujące rząd, wyznacznik oraz osobliwości macierzy

Rozpocznijmy od wprowadzenia podstawowych oznaczeń, z których będziemy korzystać w tym podrozdziale. Otóż przez $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ i $\Sigma_n(\mathbb{F})$ będziemy oznaczać odpowiednio zbiór wszystkich macierzy kwadratowych, zbiór wszystkich macierzy nieosobliwych i zbiór wszystkich macierzy osobliwych; wszystkie stopnia $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, nad dowolnie ustalonym ciałem $\mathbb{F}$. Natomiast dla ustalonego dowolnie $n \in \mathbb{N}$ dla $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ przez E_{ij} oznaczymy macierz, która zawiera na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny jedynkę i poza tym same zera. Dla dowolnej macierzy $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ przez $M_{ij}(X) \in \mathbb{F}$, gdzie $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, oznaczymy wyznacznik macierzy powstałej z macierzy X przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny, czyli odpowiedni minor macierzy X.

Podrozdział ten poświęcimy pewnym przekształceniom zbioru $M_n(\mathbb{F})$ w siebie, dla których poszukiwane są warunki takie, aby zachowywały rząd macierzy, wyznacznik macierzy lub macierze osobliwe i nieosobliwe, czyli odpowiednio twierdzeniom 49, 50 i 51. Wyniki te pochodzą z prac [26], [25] i [24], których autorem jest Józef Kalinowski. Moim celem jest podanie nowych poprawnych dowodów tych twierdzeń. Zanotujmy, iż wspomniane powyżej przekształcenie $T\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ jest postaci:

$$\big(T(X)\big)_{ij} = f_{ij}\big((X)_{ij}\big), \tag{3.2}$$

gdzie dla dowolnych $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ mamy $f_{ij}\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Zauważmy, że w przeciwieństwie do rozdziału drugiego tej pracy przekształcenie T nie musi być teraz nawet liniowe.

Pierwsze twierdzenie, które przedstawimy, mówi, kiedy przekształcenie T zachowuje rząd macierzy. Ograniczymy się tu tylko do macierzy kwadratowych. Zainteresowanych sytuacją dla macierzy prostokątnych oraz dowodem twierdzenia w obydwu sytuacjach odsyłamy do artykułu [26].

Twierdzenie 49. *Przekształcenie T jest postaci* (3.2) *i zachowuje rząd macierzy, tj. dla każdej macierzy $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachodzi:*

$$\operatorname{rank}\Big(T(X)\Big) = \operatorname{rank}(X),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ i $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ oraz istnieje addytywna (tylko, gdy $n \geqslant 3$) i multiplikatywna injekcja $g \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ taka, że:

$$f_{ij}(x) = u_i v_j g(x), \qquad \text{dla dowolnych } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Przed przejściem do drugiego twierdzenia odnieśmy się jeszcze do pewnej uwagi.

Uwaga 10. *Warto zauważyć, że addytywna i multiplikatywna injekcja $g \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ może być szczegółowiej określona dla szczególnych ciał $\mathbb{F}$. Otóż na przykład, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$, to:*

$$g(x) = x.$$

Ale już, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to funkcja g może być całkiem „dzika" (zob. [52]).

Kolejne twierdzenie dotyczy sytuacji, gdy przekształcenie T zachowuje macierze osobliwe i nieosobliwe.

Twierdzenie 50. *Przekształcenie T jest postaci* (3.2) *i zachowuje macierze osobliwe i nieosobliwe, tj. dla każdej macierzy $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachodzi:*

$$X \in \Sigma_n(\mathbb{F}) \Rightarrow T(X) \in \Sigma_n(\mathbb{F}) \quad \wedge \quad X \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}) \Rightarrow T(X) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ i $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ oraz istnieje addytywna (tylko, gdy $n \geqslant 3$) i multiplikatywna injekcja $g \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ taka, że:

$$f_{ij}(x) = u_i v_j g(x), \qquad \text{dla dowolnych } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ostatnie, trzecie twierdzenie mówi o tym, kiedy przekształcenie T zachowuje wyznacznik macierzy.

Twierdzenie 51. *Przekształcenie T jest postaci* (3.2) *i zachowuje wyznacznik macierzy, tj. dla każdej macierzy $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachodzi:*

$$\det\Big(T(X)\Big) = \det(X),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ i $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ takie, że:

$$\prod_{k=1}^{n} u_k v_k = 1$$

oraz:

$$f_{ij}(x) = u_i v_j x, \qquad \text{dla dowolnych } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Wspomnijmy, że w oryginalnych twierdzeniach 49 i 50 podany jeszcze był warunek, iż $g(0) = 0$, który jednak można pominąć, gdyż multiplikatywna injekcja g zawsze spełnia równość $g(0) = 0$. Ponadto w oryginalnym dowodzie twierdzenia 50 macierze B_5, B_6, B_7 i B_8 były niepoprawnie zdefiniowane. Co gorsza, w oryginalnym dowodzie twierdzenia 51 (dowód lematu 1 z pracy [24]) założono, że jeśli dwie funkcje wielomianowe są sobie równe, to ich współczynniki też są sobie równe, co nie jest prawdą w ogólności dla ciał skończonych. Na szczęście udało się to skorygować i poniżej w dowodach podano już poprawnie zdefiniowane wspomniane powyżej macierze oraz przedstawiono dowód sformułowanego powyżej twierdzenia 51, w którym nie wykorzystuje się zanegowanego faktu. Zaczniemy od dowodu twierdzenia 50, który poprzedzimy dwoma lematami.

Lemat 12. *Jeśli przekształcenie T jest postaci* (3.2) *oraz zachowuje macierze osobliwe i nieosobliwe, to dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, n\}$ oraz każdego $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ zachodzi:*

$$f_{ij}(x) \neq f_{ij}(0).$$

Dowód. Ustalmy $i, j \in \{1, \dots, n\}$ oraz $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Niech permutacja $\Sigma \in S_n$ będzie taka, że $\Sigma(i) = j$. Zdefiniujmy macierze $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ oraz $B \in \Sigma_n(\mathbb{F})$ odpowiednio wzorami:

$$(A)_{kl} = \begin{cases} x, & \text{gdy } (k, l) = (i, j), \\ 1, & \text{gdy } l = \Sigma(k) \wedge k \neq i, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

oraz:

$$(B)_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } l = \Sigma(k) \wedge k \neq i, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wtedy z założenia zachodzi $T(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ oraz $T(B) \in \Sigma_n(\mathbb{F})$, gdzie:

$$\Big(T(A)\Big)_{kl} = \begin{cases} f_{kl}(x), & \text{gdy } (k, l) = (i, j), \\ f_{kl}(1), & \text{gdy } l = \Sigma(k) \wedge k \neq i, \\ f_{kl}(0), & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

oraz:

$$\Big(T(B)\Big)_{kl} = \begin{cases} f_{kl}(1), & \text{gdy } l = \Sigma(k) \wedge k \neq i, \\ f_{kl}(0), & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Ponieważ, jak łatwo zauważyć, dla każdego $r \in \{1, \dots, n\}$ spełnione jest:

$$M_{ir}\Big(T(A)\Big) = M_{ir}\Big(T(B)\Big),$$

więc:

$$0 \neq \det\Big(T(A)\Big) = (-1)^{i+j} f_{ij}(x) M_{ij}\Big(T(A)\Big) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (-1)^{i+k} f_{ik}(0) M_{ik}\Big(T(A)\Big)$$

oraz:

$$0 = \det\Big(T(B)\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} f_{ik}(0) M_{ik}\Big(T(B)\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} f_{ik}(0) M_{ik}\Big(T(A)\Big).$$

Odjęcie od siebie dwóch powyższych zależności stronami implikuje:

$$0 \neq (-1)^{i+j}\Big(f_{ij}(x) - f_{ij}(0)\Big)M_{ij}\Big(T(A)\Big),$$

czyli w szczególności mamy $f_{ij}(x) \neq f_{ij}(0)$, co kończy dowód lematu. □

Lemat 13. *Jeśli przekształcenie T jest postaci* (3.2) *oraz zachowuje macierze osobliwe i nieosobliwe, to dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz każdego $x \in \mathbb{F}$ spełnione jest:*

$$x = 0 \Rightarrow f_{ij}(x) = 0 \quad \wedge \quad x \neq 0 \Rightarrow f_{ij}(x) \neq 0.$$

Dowód. Ustalmy $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ i weźmy taką permutację $\Sigma \in S_n$, że $\Sigma(i) = j$. Zdefiniujmy macierz $A \in \Sigma_n(\mathbb{F})$ oraz dla każdego $s \in \{1, \ldots, n\}$ macierz $B_s \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ w następujący sposób:

$$(A)_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } l = \Sigma(k) \wedge k \neq i, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

oraz:

$$(B_s)_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (k, l) = (i, s) \vee \Big(l = \Sigma(k) \wedge k \neq i\Big), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zauważmy, że jeśli $s = j$, to $B_s \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$, a jeśli $s \neq j$, to $B_s \in \Sigma_n(\mathbb{F})$. Stąd macierze $T(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$ oraz $T(B_s) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ dla każdego $s \in \{1, \ldots, n\}$ są postaci:

$$\Big(T(A)\Big)_{kl} = \begin{cases} f_{ij}(1), & \text{gdy } l = \Sigma(k) \wedge k \neq i, \\ f_{ij}(0), & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

oraz:

$$\Big(T(B_s)\Big)_{kl} = \begin{cases} f_{ij}(1), & \text{gdy } (k, l) = (i, s) \vee \Big(l = \Sigma(k) \wedge k \neq i\Big), \\ f_{ij}(0), & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie $T(B_s) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F})$, jeśli $s = j$ oraz $T(B_s) \in \Sigma_n(\mathbb{F})$, jeśli $s \neq j$. Ponieważ dla dowolnych $r \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $s \in \{1, \ldots, n\}$ mamy:

$$M_{ir}\Big(T(A)\Big) = M_{ir}\Big(T(B_s)\Big),$$

więc mamy:

$$\det\Big(T(A)\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} f_{ik}(0) M_{ik}\Big(T(A)\Big) \tag{3.3}$$

oraz:

$$\begin{aligned} \det\Big(T(B_s)\Big) &= (-1)^{i+s} f_{is}(1) M_{is}\Big(T(B_s)\Big) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} (-1)^{i+k} f_{ik}(0) M_{ik}\Big(T(B_s)\Big) = \\ &= (-1)^{i+s} f_{is}(1) M_{is}\Big(T(A)\Big) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} (-1)^{i+k} f_{ik}(0) M_{ik}\Big(T(A)\Big). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Odejmując od siebie równości (3.3) i (3.4) odpowiednio stronami, otrzymujemy:

$$0 = \det\Big(T(A)\Big) - \det\Big(T(B_s)\Big) = (-1)^{i+s}\Big(f_{is}(0) - f_{is}(1)\Big)M_{is}\Big(T(A)\Big) \tag{3.5}$$

dla każdego $s \in \{1, \ldots, n\}$, $s \neq j$, oraz:

$$0 \neq \det\Big(T(A)\Big) - \det\Big(T(B_j)\Big) = (-1)^{i+j}\Big(f_{ij}(0) - f_{ij}(1)\Big)M_{ij}\Big(T(A)\Big). \tag{3.6}$$

Z równości (3.5) wnosimy, że dla każdego $s \in \{1, \ldots, n\}$, $s \neq j$, zachodzi $M_{is}\Big(T(A)\Big) = 0$, ponieważ na podstawie lematu 12 mamy $f_{is}(0) \neq f_{is}(1)$. To zaś implikuje, że wzór (3.3) przyjmuje postać:

$$0 = \det\Big(T(A)\Big) = (-1)^{i+j} f_{ij}(0) M_{ij}\Big(T(A)\Big),$$

czyli $f_{ij}(0) = 0$, gdyż na mocy nierówności (3.6) spełnione jest $M_{ij}\Big(T(A)\Big) \neq 0$. Weźmy $x \in \mathbb{F}$ i zauważmy, że jeśli $x = 0$, to wtedy $f_{ij}(x) = 0$. Jeśli natomiast mamy $x \neq 0$, to z lematu 12 zachodzi $f_{ij}(x) \neq f_{ij}(0)$, a ponieważ to $f_{ij}(0) = 0$, więc $f_{ij}(x) \neq 0$, co było do pokazania. □

Dowód twierdzenia 50.
„$\Rightarrow$” Zdefiniujmy macierz $A \in \Sigma_n(\mathbb{F})$ wzorem:

$$A := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} E_{kl}.$$

Ponieważ $T(A) \in \Sigma_n(\mathbb{F})$ jest postaci:

$$T(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} f_{kl}(1) E_{kl},$$

więc $\operatorname{rank}\Big(T(A)\Big) \geqslant 1$, jako że na podstawie lematu 13 dla dowolnych $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi $f_{kl}(1) \neq 0$. Załóżmy nie wprost, że $\operatorname{rank}\Big(T(A)\Big) > 1$. Stąd wnioskujemy, że istnieją takie $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, \ldots, n\}$, $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$, że:

$$f_{i_1j_1}(1) f_{i_2j_2}(1) - f_{i_1j_2}(1) f_{i_2j_1}(1) \neq 0.$$

Niech $\sigma \in S_n$ będzie permutacją taką, że $\sigma(i_1) = j_1$ oraz $\sigma(i_2) = j_2$. Rozważmy macierz $B \in \Sigma_n(\mathbb{F})$ zdefiniowaną następująco:

$$B := E_{i_1j_1} + E_{i_2j_2} + E_{i_1j_2} + E_{i_2j_1} + \sum_{\substack{1 \leqslant 1 \leqslant n \\ k \notin \{i_1, i_2\}}} E_{k\sigma(k)}.$$

Wtedy macierz $T(B) \in \Sigma_n(\mathbb{F})$ można na mocy lematu 13 zapisać w postaci:

$$T(B) = f_{i_1j_1}(1)E_{i_1j_1} + f_{i_2j_2}(1)E_{i_2j_2} + f_{i_1j_2}(1)E_{i_1j_2} + f_{i_2j_1}(1)E_{i_2j_1} + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \notin \{i_1, i_2\}}} f_{k\sigma(k)}(1) E_{k\sigma(k)}.$$

Korzystając z równości:

$$0 = \det\Big(T(B)\Big) = \operatorname{sgn}(\sigma)\Big(f_{i_1j_1}(1)f_{i_2j_2}(1) - f_{i_1j_2}(1)f_{i_2j_1}(1)\Big)\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\notin\{i_1,i_2\}}} f_{k\sigma(k)}(1),$$

otrzymujemy sprzeczność, albowiem z lematu 13 dla każdego $k \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2\}$, spełnione jest $f_{k\sigma(k)}(1) \neq 0$. Zatem macierz $\operatorname{rank}\Big(T(A)\Big) = 1$, a więc istnieją liczby $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ oraz $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ takie, że dla dowolnych $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ spełnione jest:

$$f_{ij}(1) = u_iv_j.$$

Jeśli zdefiniujemy teraz dla dowolnych $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ funkcję $g_{ij}\colon \mathbb{F}\to\mathbb{F}$ wzorem:

$$g_{ij}(x) := (u_iv_j)^{-1}f(x),$$

to wtedy widzimy, że:

$$f_{ij}(x) = u_iv_jg_{ij}(x), \qquad g_{ij}(0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad g_{ij}(1) = 1.$$

Ustalmy $p_1,p_2,r_1 \in \{1,\ldots,n\}$, $p_1 \neq p_2$, i permutację $\tau \in S_n$ taką, że $\tau(p_1) = r_1$. Niech $r_2 := \tau(p_2)$. Wtedy dla dowolnego $x \in \mathbb{F}$ mamy:

$$C := xE_{p_1r_1} + E_{p_1r_2} + xE_{p_2r_1} + E_{p_2r_2} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\notin\{p_1,p_2\}}} E_{k\tau(k)},$$

czyli $C \in \Sigma_n(\mathbb{F})$, a stąd:

$$\begin{aligned}T(C) = {} & u_{p_1}v_{r_1}g_{p_1r_1}(x)E_{p_1r_1} + u_{p_1}v_{r_2}E_{p_1r_2} + u_{p_2}v_{r_1}g_{p_2r_1}(x)E_{p_2r_1} + u_{p_2}v_{r_2}E_{p_2r_2} + \\ & + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\notin\{p_1,p_2\}}} u_kv_{\tau(k)}E_{k\tau(k)},\end{aligned}$$

czyli $T(C) \in \Sigma_n(\mathbb{F})$, co implikuje, że:

$$0 = \det\Big(T(C)\Big) = \operatorname{sgn}(\tau)u_{p_1}v_{r_1}u_{p_2}v_{r_2}\Big(g_{p_1r_1}(x) - g_{p_2r_1}(x)\Big)\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\notin\{p_1,p_2\}}} u_kv_{\tau(k)},$$

a zatem:

$$g_{p_1r_1}(x) = g_{p_2r_1}(x). \tag{3.7}$$

Ustalmy $s_1,r_1,r_2 \in \{1,\ldots,n\}$, $r_1 \neq r_2$, i permutację $\varrho \in S_n$ taką, że $\varrho(s_1) = r_1$. Niech $s_2 := \varrho^{-1}(r_2)$. Wtedy dla dowolnego $x \in \mathbb{F}$ mamy:

$$D := xE_{s_1r_1} + xE_{s_1r_2} + E_{s_2r_1} + E_{s_2r_2} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\notin\{s_1,s_2\}}} E_{k\varrho(k)},$$

czyli $D \in \Sigma_n(\mathbb{F})$, a stąd:

$$T(D) = u_{s_1}v_{r_1}g_{s_1r_1}(x)E_{s_1r_1} + u_{s_1}v_{r_2}g_{s_1r_2}(x)E_{s_1r_2} + u_{s_2}v_{r_1}E_{s_2r_1} + u_{s_2}v_{r_2}E_{s_2r_2} + \\ + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\notin\{s_1,s_2\}}} u_k v_{\varrho(k)} E_{k\varrho(k)},$$

czyli $T(D) \in \Sigma_n(\mathbb{F})$, co implikuje, że:

$$0 = \det\Big(T(D)\Big) = \operatorname{sgn}(\varrho)u_{s_1}v_{r_1}u_{s_2}v_{r_2}\Big(g_{s_1r_1}(x) - g_{s_1r_2}(x)\Big) \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\notin\{s_1,s_2\}}} u_k v_{\varrho(k)},$$

skąd:

$$g_{s_1r_1}(x) = g_{s_1r_2}(x). \tag{3.8}$$

Reasumując, z równości (3.7) i (3.8) wynika, iż istnieje funkcja $g\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ taka, że dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ jest:

$$f_{ij}(x) = u_i v_j g(x).$$

Pokażemy teraz, że funkcja g jest injekcją. Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{F}$, $x \neq y$, zdefiniujmy:

$$F := xE_{11} + yE_{12} + E_{21} + E_{22} + \sum_{k=3}^{n} E_{kk} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}).$$

Z tego wynika, że:

$$T(F) = u_1v_1g(x)E_{11} + u_1v_2g(y)E_{12} + u_2v_1E_{21} + u_2v_2E_{22} + \sum_{k=3}^{n} u_kv_kE_{kk} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{F}),$$

co daje nam:

$$0 \neq \det\Big(T(F)\Big) = u_1v_1u_2v_2\Big(g(x) - g(y)\Big)\prod_{k=3}^{n} u_kv_k,$$

czyli:

$$g(x) \neq g(y).$$

Poza tym udowodnimy, że funkcja g jest multiplikatywna. W tym celu weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{F}$ i przyjmijmy:

$$G := xE_{11} + xyE_{12} + E_{21} + yE_{22} + \sum_{k=3}^{n} E_{kk} \in \Sigma_n(\mathbb{F}).$$

Ponieważ zachodzi:

$$T(G) = u_1v_1g(x)E_{11} + u_1v_2g(xy)E_{12} + u_2v_1E_{21} + u_2v_2g(y)E_{22} + \sum_{k=3}^{n} u_kv_kE_{kk} \in \Sigma_n(\mathbb{F}),$$

więc otrzymujemy:

$$0 = \det\Big(T(G)\Big) = u_1v_1u_2v_2\Big(g(x)g(y) - g(xy)\Big)\prod_{k=3}^{n} u_kv_k,$$

co daje nam równość:

$$g(x)g(y) = g(xy).$$

Pozostaje nam pokazać, że jeśli $n \geqslant 3$, to funkcja g jest addytywna. Aby tego dokonać ustalmy dowolnie $x, y \in \mathbb{F}$ i rozważmy macierz:

$$H := xE_{11} + E_{12} + yE_{21} + E_{23} + (x+y)E_{31} + E_{32} + E_{33} + \sum_{k=4}^{n} E_{kk} \in \Sigma_n(\mathbb{F}).$$

Widzimy, że:

$$\begin{aligned} T(H) = u_1v_1g(x)E_{11} + u_1v_2E_{12} + u_2v_1g(y)E_{21} + u_2v_3E_{23} + \\ + u_3v_1g(x+y)E_{31} + u_3v_2E_{32} + u_3v_3E_{33} + \sum_{k=4}^{n} E_{kk} \in \Sigma_n(\mathbb{F}), \end{aligned}$$

skąd dostajemy:

$$0 = \det\Big(T(H)\Big) = u_1v_1u_2v_2u_3v_3\Big(g(x+y) - g(x) - g(y)\Big)\prod_{k=4}^{n} u_kv_k,$$

a więc:

$$g(x) + g(y) = g(x+y).$$

„$\Leftarrow$" Zauważmy, że stwierdzenie, iż operator T postaci (3.2) zachowuje macierze osobliwe i nieosobliwe, jest równoważne faktowi, iż dla każdej macierzy $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ zachodzi:

$$\det(X) = 0 \Leftrightarrow \det\Big(T(X)\Big) = 0.$$

Jeśli $n = 2$, to z injektywności i multiplikatywności funkcji g mamy następujący ciąg równoważności:

$$\begin{aligned} \det(X) = 0 &\Leftrightarrow (X)_{11}(X)_{22} = (X)_{12}(X)_{21} \Leftrightarrow g\Big((X)_{11}(X)_{22}\Big) = g\Big((X)_{12}(X)_{21}\Big) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g\Big((X)_{11}\Big)g\Big((X)_{22}\Big) = g\Big((X)_{12}\Big)g\Big((X)_{21}\Big) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_1v_1g\Big((X)_{11}\Big)u_2v_2g\Big((X)_{22}\Big) = u_1v_2g\Big((X)_{12}\Big)u_2v_1g\Big((X)_{21}\Big) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f_{11}\Big((X)_{11}\Big)f_{22}\Big((X)_{22}\Big) = f_{12}\Big((X)_{12}\Big)f_{21}\Big((X)_{21}\Big) \Leftrightarrow \det\Big(T(X)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Jeśli natomiast $n \geqslant 3$, to z addytywności i multiplikatywności funkcji g mamy następującą równość:

$$\det\Big(T(X)\Big) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} f_{k\sigma(k)}\Big((X)_{k\sigma(k)}\Big) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} u_kv_{\sigma(k)}g\Big((X)_{k\sigma(k)}\Big) =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} u_k v_k\right)\left(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} g\Big((X)_{k\sigma(k)}\Big)\right) =$$
$$= \left(\prod_{k=1}^{n} u_k v_k\right) g\left(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{n} (X)_{k\sigma(k)}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k v_k\right) g\Big(\det(X)\Big),$$

z której, korzystając z addytywności i injekcyjności funkcji g, otrzymujemy równoważności:

$$\det\Big(T(X)\Big) = 0 \Leftrightarrow g\Big(\det(X)\Big) = 0 \Leftrightarrow g\Big(\det(X)\Big) + g\Big(\det(X)\Big) = g\Big(\det(X)\Big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g\Big(\det(X) + \det(X)\Big) = g\Big(\det(X)\Big) \Leftrightarrow g\Big(2\det(X)\Big) = g\Big(\det(X)\Big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\det(X) = \det(X) \Leftrightarrow \det(X) = 0,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Podrozdział ten zakończymy dowodem twierdzenia 51.

Dowód twierdzenia 51.
„$\Rightarrow$” Ponieważ przekształcenie T zachowuje wyznacznik macierzy, więc także zachowuje macierze osobliwe i nieosobliwe. Stąd na mocy twierdzenia 50 istnieją $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ i $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ oraz multiplikatywna injekcja $g\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ taka, że:

$$f_{ij}(x) = c_i d_j g(x), \qquad \text{dla każdego } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ponieważ funkcja g jest multiplikatywna, więc $g(0) = 0$ lub $g(0) = 1$, ale w tym drugim przypadku dla każdego $x \in \mathbb{F}$ mielibyśmy $g(x)g(0) = g(x\cdot 0)$, czyli $g(x) = 1$, a zatem mamy sprzeczność z injekcyjnością funkcji g. Podobnie z multiplikatywności funkcji g dostajemy $g(1) = 0$ lub $g(1) = 1$, ale tym razem w pierwszym przypadku mielibyśmy sprzeczność z injekcyjnością funkcji g, jako że $g(0) = 0$. Reasumując, zachodzi:

$$g(0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad g(1) = 1.$$

Dla dowolnego $x \in \mathbb{F}$ zdefiniujmy macierz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ wzorem:

$$A := xE_{11} + \sum_{k=2}^{n} E_{kk}.$$

Wtedy zachodzi:

$$T(A) = c_1 d_1 g(x) E_{11} + \sum_{k=2}^{n} c_k d_k E_{kk}$$

i z równości wyznaczników macierzy A i $T(A)$ otrzymujemy:

$$x = \det(A) = \det\Big(T(A)\Big) = g(x)\prod_{k=1}^{n} c_k d_k,$$

czyli:

$$g(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} c_k d_k\right)^{-1} x.$$

Stąd dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz każdego $x \in \mathbb{F}$ mamy:

$$f_{ij}(x) = c_i d_j \left(\prod_{k=1}^{n} c_k d_k \right)^{-1} x = u_i v_j x,$$

gdzie:

$$u_i := c_i \left(\prod_{k=1}^{n} c_k \right)^{-1} \qquad \text{oraz} \qquad v_j := d_j \left(\prod_{k=1}^{n} d_k \right)^{-1}$$

Rozważmy jeszcze macierz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, przedstawioną jako:

$$B := \sum_{k=1}^{n} E_{kk}.$$

Widzimy, że:

$$T(B) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k E_{kk},$$

więc z równości wyznaczników tych macierzy dostajemy:

$$1 = \det(B) = \det\big(T(B)\big) = \prod_{k=1}^{n} u_k v_k,$$

co było do pokazania.
„$\Leftarrow$” Dla dowolnej macierzy $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ stwierdzamy, że:

$$\det\big(T(X)\big) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} f_{k\sigma(k)}\big((X)_{k\sigma(k)}\big) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} u_k v_{\sigma(k)} (X)_{k\sigma(k)} =$$
$$= \left(\prod_{k=1}^{n} u_k v_k \right) \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} (X)_{k\sigma(k)} \right) = \det(X),$$

co prowadzi do poszukiwanej tezy. $\square$

Bibliografia

1. El Abidine Abdelali Z., *Maps preserving the spectrum of polynomial products of matrices*, J. Math. Anal. Appl. **480** (2019), Article 123392.

2. Beasley L.B., *Linear operators on matrices: the invariance of rank-k matrices*, Linear Algebra Appl. **107** (1988), 161–167.

3. Beasley L.B., *Linear transformations on matrices: the invariance of rank k matrices*, Linear Algebra Appl. **3** (1970), 407–427.

4. Beasley L.B., *Linear transformations which preserve fixed rank*, Linear Algebra Appl. **40** (1981), 183–187.

5. Beasley L.B., Laffey T.J., *Linear operators on matrices: the invariance of rank-k matrices*, Linear Algebra Appl. **133** (1990), 175–184.

6. Bhatia R., *Matrix Analysis*, Springer, New York 1997.

7. Botta P., *Linear maps that preserve singular and nonsingular matrices*, Linear Algebra Appl. **20** (1978), 45–49.

8. Botta P., Pierce S., *The preservers of any orthogonal group*, Pac. J. Math. **70** (1977), 37–49.

9. Botta P., Pierce S., Watkins W., *Linear transformations that preserve the nilpotent matrices*, Pac. J. Math. **104** (1983), 39-46.

10. Chan G.H., Lim M.H., *Linear transformations on symmetric matrices that preserve commutativity*, Linear Algebra Appl. **47** (1982), 11-22.

11. Costara C., *Linear maps preserving structured singular values of matrices*, Linear Algebra Appl. **620** (2021), 76–91.

12. Dieudonné J., *Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables*, Arch. Math. **1** (1949), 282–287.

13. Djoković D.Ž., *Linear transformations of tensor products preserving a fixed rank*, Pac. J. Math. **30** (1969), 411–414.

14. Fan K., *Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 760–766.

15. Fischer E., *Über den Hadamardschen Determinentsatz*, Arch. Math. u. Phys. **13** (1907), 32–40.

16. Frobenius G., *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. (1897), 994–1015.

17. Gantmacher F.R., *The Theory of Matrices*, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island 2000.

18. Gram J.P., *Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate*, J. Reine Angew. Math. **94** (1883), 41–73.

19. Grigorieff R.F., *A Note on von Neumann's Trace Inequality*. Zamieszczone w Internecie pod adresem: `https://page.math.tu-berlin.de/~grigo/10_Neumann_trace.pdf`.

20. Helton J.W., Rodman L., *Signature preserving linear maps of Hermitian matrices*, Linear Multilinear Algebra **17** (1985), 29-37.

21. Hetmaniok E., Pleszczyński M., Różański M., Słota D., Trawiński T., Wituła R., Wróbel A., *Zagadnienia lokalizacyjne wartości własnych macierzy w powiązaniu z twierdzeniem Gerszgorina*, Wydaw. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2018.

22. Hetmaniok E., Pleszczyński M., Różański M., Wituła R., *Parametric-vector versions of the Gerschgorin Theorem and the Brauer Theorem*. In: *International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, Thessaloniki, Greece, 25-30 September 2017*, American Institute of Physics, Melville 2018.

23. Horn R.A., Johnson C.R., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 2013.

24. Kalinowski J., *On preservers of determinant over a field*, Demonstr. Math. **41** (2008), 519–524.

25. Kalinowski J., *On preservers of singularity and nonsingularity of matrices*, Demonstr. Math. **42** (2009), 681–685.

26. Kalinowski J., *Preservers of the rank of matrices over a field*, Beitr. Algebra Geom. **50** (2009), 215–218.

27. Krejn M.G., *Ob odnom predpoloženii A.M. Lâpunova*, Funkcionalnyj analiz i ego priloženiâ **7** (1973), 45–54 (po rosyjsku).

28. Kristof W., *Generalization of a Theorem by John von Neumann on the Trace of Certain Matrix Products*, Research Bulletin (1969).

29. Leng G.-S., Zhou G.-B., *Inverse Forms of Hadamard Inequality*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **23** (2002), 990–997.

30. Lim M.H., *Linear transformations of tensor spaces preserving decomposable vectors*, Publ. de l'Institut Math. **18** (1975), 131–135.

31. Lin M.-H., Sinnamon G., *Revisiting a sharpened version of Hadamard's determinant inequality*, Linear Algebra Appl. **606** (2020), 192–200.

32. Magnus W., *On a theorem for Marshall Hall*, Ann. of Math. **40** (1939), 764–768.

33. Magnus W., *The uses of 2 by 2 matrices in combinatorial group theory. A survey*, Results Math. **4** (1981), 171–192.

34. Magnus W., *Two generator subgroups of* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. II. Math.-Phys. Klasse **7** (1975), 81–94.

35. Marcus M., *All linear operators leaving the unitary group invariant*, Duke Math. J. **26** (1959), 155–163.

36. Marcus M., Gordon W.R., *A generalization of the unitary group*, Linear Algebra Appl. **3** (1970), 225–247.

37. Marcus M., Moyls B.N., *Linear transformations on algebras of matrices*, Canad. J. Math. **11** (1959), 61–66.

38. Marshall A.W., Olkin I., Arnold B.C., *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Springer, New York 2011.

39. Meshulam R., *On the maximal rank in a subspace of matrices*, Q. J. Math. **36** (1985), 225–229.

40. Minc H., *Linear transformations on matrices: rank 1 preservers and determinant preservers*, Linear Multilinear Algebra **4** (1977), 265–272.

41. Minc H., *Nonnegative Matrices*, John Wiley & Sons, New York 1988.

42. Mirsky L., *A trace inequality of John von Neumann*, Monatsh. für Math. **79** (1975), 303–306.

43. Mirsky L., *On the trace of matrix products*, Math. Nachr. **20** (1959), 171–174.

44. von Neumann J., *Some matrix-inequalities and metrization of matrix-space*, Tomsk Univ. Rev. **1** (1937), 286–300.

45. Pierce S. et al., *A Survey of Linear Preserver Problems Contents*, Linear Multilinear Algebra **33** (1922), 1–119.

46. Richter H., *Zur Abschätzung von Matrizennormen*, Math. Nachr. **18** (1958), 178–187.

47. Różański M., Wituła R., Hetmaniok E., *More subtle versions of the Hadamard inequality*, Linear Algebra Appl. **532** (2017), 500–511.

48. Różański M., Wituła R., *Hadamard's optimized inequality*, Linear Algebra Appl. **620** (2021), 109–123.

49. de Seguins Pazzis C., *The singular linear preservers of non-singular matrices*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 483–490.

50. Tu Y.-Y., Su R.-Q., *Some inequalities about trace of matrix*, J. Sci. Eng. Res. **6** (2019), 89–93.

51. Westwick R., *Transformations on tensor spaces*, Pac. J. Math. **23** (1967), 613–620.

52. Yale P.B., *Automorphisms of the complex numbers*, Math. Mag. **39** (1966), 135–141.

53. Zhang X.-D., Yang S.-J., *An Improvement of Hadamard's Inequality for Totally Nonnegative Matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **14** (1993), 705–711.

54. Zhang X.-D., Yang S.-J., *A note on Hadamard's inequality*, Acta Math. Appl. Sinica **20** (1997), 269–274 (po chińsku).