# MODELE OTOCZENIOWE I UOGÓLNIONE MODELE TOPOLOGICZNE DLA KLASYCZNYCH I (SUB)INTUICJONISTYCZNYCH LOGIK MODALNYCH: KONSPEKT ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

**TOMASZ WITCZAK**
OPIEKUN NAUKOWY: DR HAB. PROF. UŚ TOMASZ POŁACIK

Spis treści



## 1. Wstęp

Niniejszy konspekt dotyczy rozprawy doktorskiej przygotowywanej przez autora (mgr Tomasza Witczaka) w ramach studiów doktoranckich na Uniwersytecie Śląskim, rozpoczętych w sezonie 2014 / 2015. Autor ubiega się o stopień doktora w zakresie matematyki. Stosując klasyfikację MNiSW (`http://www.dziennikustaw.gov.pl/DU/2018/1818/1`): dziedzina autora to *nauki ścisłe i przyrodnicze*, dyscyplina naukowa to *matematyka*. Jego faktyczny obszar badań to *logika matematyczna*, w szczególności semantyka logik nieklasycznych (w tym modalnych). Opiekunem naukowym autora jest dr hab. prof. UŚ Tomasz Połacik. Autor ma na koncie dwie opublikowane prace, jedną przyjętą do druku, kilka prac zamieszczonych w internecie (w formie *pre-printów*) i był uczestnikiem kilkunastu konferencji lub warsztatów naukowych. Nie posiada tytułu doktora w żadnej dziedzinie, nie wszczynał też dotąd przewodu doktorskiego na żadnej uczelni.

## 2. Sformułowanie tematu

Tematykę pracy scharakteryzować można dwojako. Po pierwsze, ze względu na systemy logiczne (a więc zbiory aksjomatów i reguł), które są w niej badane. Po drugie, ze względu na wykorzystywane w tej analizie narzędzia semantyczne (modele).

W pierwszym ujęciu rzecz będzie wyglądać następująco: interesować będą nas logiki zdaniowe (ang. *propositional logics*), a zatem nie będziemy zajmować się systemami pierwszego i drugiego rzędu. Z puli logik zdaniowych wybieramy od razu *logiki nieklasyczne*. Pojęcie to jest oczywiście bardzo szerokie: istnieje wiele powodów, dla których dany system może być traktowany jako "nieklasyczny". W szczególności może chodzić o poszerzenie lub zawężenie języka logiki klasycznej - lub o zawężenie jej aksjomatyki. Doprecyzujmy zatem, że chodzi nam o oba te aspekty: badamy bowiem logiki modalne (a więc wyposażone w dodatkowe operatory unarne, interpretowane np. jako *konieczność* i *możliwość*), a wśród nich zarówno klasyczne (czyli z zachowanym prawem wyłączonego środka), jak i intuicjonistyczne. Do tego interesować będą nas logiki subintuicjonistyczne, ale raczej bez modalności.

W ujęciu drugim można powiedzieć, że koncentrujemy się na strukturach (i modelach, tj. strukturach z wartościowaniem formuł) *otoczeniowych* (ang. *neighbourhood structures*), a także topologicznych i - wprowadzonych przez nas - uogólnionych topologicznych. Te ostatnie stanowią logiczne zastosowanie przestrzeni uogólnionych w sensie Császára. Naturalnym krokiem jest także badanie modeli infratopologicznych, co również czynimy. Oprócz wymienionych klas będziemy jeszcze stosować modele relacyjne, bi-relacyjne i relacyjno-otoczeniowe.

## 3. Uzasadnienie wyboru tematyki

W matematyce pytanie o *motywację* stojącą za badaniami bywa niekiedy kłopotliwe: przede wszystkim dlatego, że tak naprawdę każde uzasadnienie wyboru takiej, a nie innej tematyki bazuje na szeregu założeń, które same również domagają się usprawiedliwienia. W uproszczeniu można przyjąć, że analizowane zagadnienia powinny mieć potencjalne zastosowanie (przynajmniej w innych działach naszej dyscypliny lub całej matematyki; bądź też w innych naukach) - oraz być nietrywialne w sensie technicznym. Kryteria oceny tego nie są niestety w pełni jasne, ale mimo tych trudności uważamy naszą motywację za dobrze sformułowaną.

Przede wszystkim odwołujemy się do dość powszechnie przyjętego przeświadczenia, że badanie semantyki nieklasycznych systemów logicznych jest pożyteczne: choćby dlatego, że podejście semantyczne wiąże logiczną abstrakcję z rozmaitymi, nieraz bardzo naturalnymi, obiektami matematycznymi (jak właśnie przestrzenie topologiczne), a także umożliwia zastosowanie logiki w filozofii, naukach prawnych czy fundamentach teorii prawdopodobieństwa). Poza tym ułatwia ono dowodzenie i obalanie twierdzeń.

Jeśli mowa o konkretnych systemach i modelach badanych w naszej pracy, to: **i)** intuicjonistyczne logiki modalne, analizowane w pierwszych trzech rozdziałach, wciąż są rozwojową dziedziną: nawet samo określenie tego, jakie warunki powinna spełniać logika modalna, by można ją było postrzegać jako intuicjonistyczną, nie jest do końca klarowne (panuje oczywiście zgoda co do braku prawa wyłączonego środka, ale np. nie jest jasne, czy należy żądać wzajemnej niezależności operatorów konieczności i możliwości); **ii)** próba budowy semantyki topologicznej (czy też "multi-topologicznej") dla logik intuicjonistyczno-modalnych słabszych (modalnie) niż **S4** jawi się jako dość nowatorska (a robimy to w rozdziale drugim); **iii)** słabe logiki modalne oparte o intuicjonizm (rozdział trzeci) to również tematyka nowa (por. [5]); **iv)** wokół uogólnionych topologii wyrosła cała teoria, w dużej mierze analogiczna do teorii "zwykłej" topologii, a równocześnie przestrzenie te rzadko dotąd były wykorzystywane jako semantyka dla logik zdaniowych (a jeśli już, to poniekąd niejawnie, bez odwołań do topologii, pod nazwą *ekstensjonalnych abstrakcji* czy *przestrzeni wiedzy*, por. [12]).

## 4. Metoda badawcza

Punktem wyjścia jest dla nas zazwyczaj pewna koncepcja semantyczna, wynikająca z dość naturalnych pytań, które postawić można w odniesieniu do istniejących już struktur i modeli. Przez *naturalne* pytania rozumiemy takie jak np.: **i)** jeżeli dopiero niedawno została jawnie zaprezentowana semantyka otoczeniowa dla logiki intuicjonistycznej (por. [8]), to do czego doprowadzą nas jej najbardziej narzucające się modyfikacje; i czy nie jest tak, że modyfikacje te można wygodnie interpretować w kontekście modalnym? (w istocie sądzimy, że tak właśnie jest); **ii)** jeżeli topologie uogólnione (w sensie Császára lub innym) pozwalają używać pewnych pojęć topologicznych przy jednoczesnym osłabieniu definicji zbioru otwartego, to czy nie byłoby wskazane potraktowanie tych przestrzeni jako modeli logicznych? (uważamy, że byłoby); **iii)** jeśli przy pomocy zbiorów otwartych można modelować nie tylko zachowanie operatorów modalnych, ale i implikacji (intuicjonistycznej), to czy nie byłoby ciekawym pomysłem potraktowanie w ten sposób również topologii uogólnionej, dzięki czemu otrzymalibyśmy implikację subintuicjonistyczną? (w rzeczy samej, to według nas ciekawy pomysł); **iv)** jeżeli $\mathbf{GT}\mathcal{F}$-modele, wprowadzone w rozdziale czwartym, pozwalają na wydefiniowanie w prosty sposób pewnych (niedoskonałych) analogonów takich pojęć jak wnętrze i domknięcie, to czy nie należałoby nakreślić przynajmniej zrębów teorii tych analogonów? (owszem, podstawowe ich własności opisujemy w rozdziale piątym, analizując m.in. pojęcie uogólnionego ciągu).

W większości przypadków kolejne rozdziały i podrozdziały naszej pracy budowane są w oparciu o takie właśnie intuicje i według stałego (co do zasady) schematu. Zwykle zaczynamy więc od kilku inicjujących pytań lub sugestii, po czym definiujemy pewną klasę struktur (i modeli). Szukamy przystosowanych do nich aksjomatów, a w niektórych przypadkach osiągamy również adekwatność owych systemów dowodowych. Innymi słowy, dowodzimy tego, co w nomenklaturze angielskiej określa się jako *soundess* i *completeness* (w tym drugim aspekcie korzystamy z modeli kanonicznych opartych o teorie maksymalne). Dowodzimy także szeregu pomniejszych, dodatkowych twierdzeń, zwykle opisujących własności modeli. Adaptujemy znane już techniki i narzędzia (takie jak bisymulacja) do naszych potrzeb. Zdecydowana większość naszych własnych twierdzeń i lematów jest szczegółowo dowodzona, pomijając te najprostsze (lub te, które są prostymi wariantami tez dowiedzionych wcześniej). Finalnie prezentujemy możliwe dalsze kierunki rozwoju i pytania otwarte.

## 5. Problem badawczy

W ogólności problem badawczy, który jest przedmiotem pracy, podsumować można jako:

(1) Dokonanie pewnych uzupełnień w twierdzeniach dotyczących znanych już wariantów semantyki otoczeniowej i topologicznej; oraz w twierdzeniach opisujących niektóre badane w literaturze systemy logiczne (przede wszystkim $\mathbf{iKT}_{\Box}$, $\mathbf{MT4}$ i $\mathbf{MNT4}$).
(2) Otwarcie i wstępne zbadanie pewnych nowych dróg w obszarze semantyki otoczeniowej i (uogólnionej) topologicznej.

Praca nie zmierza ku *jednemu* wynikowi, który byłby rezultatem wszystkich wcześniejszych, odpowiednio uporządkowanych dociekań; nie można więc powiedzieć, że jej przedmiotem jest obalenie lub potwierdzenie jakiejś generalnej hipotezy, którą dałoby się wysłowić w jednym, precyzyjnym twierdzeniu matematycznym. Tym niemniej każdy rozdział zawiera szereg nowych definicji i tez. Co więcej, rozdziały są albo bezpośrednio powiązane ze sobą przez to, że analizuje się w nich te same obiekty matematyczne (np. rozdział pierwszy z drugim i poniekąd trzecim, a czwarty z piątym i szóstym), albo powiązane pośrednio: w tym sensie, że cały czas pracujemy z nieklasycznymi logikami zdaniowymi, głównie modalnymi - i semantykami otoczeniowymi lub topologicznymi. Z tego powodu pracę można uznać, jak mniemamy, za spójną czy też skondensowaną.

## 6. Podstawowe terminy

Wymienimy tu głównie te pojęcia, które stale stosujemy w rozprawie, a które przynależą do szeroko pojętej logiki matematycznej lub topologii. Pomijamy tu większość szczegółowych pojęć i symboli wprowadzonych przez nas samych (choć wspomnimy o nich w przeglądzie rozdziałów).

A zatem słowa kluczowe (dla) naszej rozprawy to:

- Nieklasyczne logiki zdaniowe.
- Intuicjonistyczna logika modalna.
- Słabe logiki modalne: nienormalne (*non-normal*), nieregularne i niemonotoniczne; oraz ich warianty intuicjonistyczne.
- Logiki subintucjonistyczne.
- Semantyki światów możliwych: otoczeniowa, topologiczna, relacyjna (Kripkego), bi-relacyjna i relacyjno-otoczeniowa; wymuszanie formuł w światach.
- Punktowa równoważność różnych semantyk (ang. *pointwise equivalency*).
- Własność skończonego modelu, filtracja.
- Przystosowanie i adekwatność aksjomatyzacji, twierdzenie o pełności, model kanoniczny, teoria (relatywnie) maksymalna.
- Ograniczony morfizm, bisymulacja, behawioralna równoważność.
- Uogólnione przestrzenie topologiczne: w sensie Császára oraz w innych (jak infra-topologie, struktury słabe czy struktury minimalne).
- Przestrzenie topologiczne osadzone w "alternatywnych" uniwersach (jak przestrzenie intuicjonistyczne, $n$-arne, nano-topologiczne, mikro-topologiczne).
- Struktury i modele (dla logik modalnych i subintuicjonistycznych) zbudowane na bazie przestrzeni Császára.
- Ciąg uogólniony, ciągłość.

Poza tym warto wymienić główne aksjomaty modalne, jakie są w orbicie naszych zainteresowań:

- $M: \Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi \wedge \Box\psi$
- $C: \Box\varphi \wedge \Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)$
- $T: \Box\varphi \to \varphi$
- $D: \Box \to \neg\Box\neg\varphi$
- $K: \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- $4: \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
- $N: \Box\top$
- $RE: \varphi \leftrightarrow \psi \vdash \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$
- $RN: \varphi \vdash \Box\varphi$
- $RM: \varphi \to \psi \vdash \Box\varphi \to \Box\psi$
- $MP: \varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$

Można dodać, a to w kontekście subintuicjonizmu, że pojawią się też sytuacje, w których pewne dobrze znane aksjomaty nie-modalne, np. *a fortiori*, będą akceptowane tylko jako reguły.

Jakie są ograniczenia tematyczne naszej rozprawy, tj. czego nie należy od niej oczekiwać? Na przykład: nie zajmujemy się semantyką algebraiczną (algebrami Boole'a czy Heytinga), w każdym razie nie w sposób jawny i bezpośredni; nie wkraczamy w logiki wielowartościowe, relewantne czy parakonsystentne; nie zajmujemy się, jak to już powiedzieliśmy na samym początku, logiką predykatów. Rozprawa nie zawiera również *całościowego* przeglądu zagadnień takich jak modele otoczeniowe czy intuicjonistyczne logiki modalne: koncentruje się raczej na kilkunastu konkretnych klasach struktur i systemów.

## 7. Przegląd rozdziałów i wyników

W tej sekcji naszego konspektu omówimy (w skrótowy sposób) kolejne partie rozprawy, uwypuklając główne wyniki i pojęcia.

(1) W pierwszej części rozprawy wychodzimy przede wszystkim od pracy Moniri i Maleki ([8]) i modyfikujemy wprowadzoną przez nich semantykę otoczeniową dla intuicjonizmu. Robimy to w taki sposób, by modyfikacja była możliwie prosta, a jednocześnie otwierała drzwi do nowych rozważań. W praktyce oznacza to odrzucenie aksjomatu nadzbioru, tzn. dopuszczamy możliwość, że całe uniwersum nie jest maksymalnym otoczeniem świata możliwego.

**Definicja.**

Definiujemy **in1**-strukturę jako parę uporządkowaną $\langle W, \mathcal{N} \rangle$, w której:

(a) $W$ to niepusty zbiór (światów).

(b) $\mathcal{N}$ to funkcja z $W$ w $P(P(W))$ taka, że:

(i) $w \in \bigcap \mathcal{N}_w$ (przez $\mathcal{N}_w$ rozumiemy $\mathcal{N}(w)$).

(ii) $\bigcap \mathcal{N}_w \in \mathcal{N}_w$.

(iii) $u \in \bigcap \mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcap \mathcal{N}_u \subseteq \bigcap \mathcal{N}_w$ ($\to$-*warunek*).

(iv) $X \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$ and $\bigcap \mathcal{N}_w \subseteq X \Rightarrow X \in \mathcal{N}_w$ (*zrelatywizowany aksjomat nadzbioru*).

(v) $u \in \bigcap \mathcal{N}_w \Rightarrow \bigcup \mathcal{N}_u \subseteq \bigcup \mathcal{N}_w$ ($\Box$-*warunek*).

Co do wartościowania zmiennych zdaniowych, to zakłada się, że obowiązuje ono w minimalnym otoczeniu świata, a nie tylko w samym świecie (monotoniczność). Dla każdego **in1**-modelu $M = \langle W, \mathcal{N}, V \rangle$ i dla każdej formuły $\varphi$ określamy relację $\Vdash$ pomiędzy światami i formułami w sposób induktywny, przy czym:

$w \Vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \nVdash \varphi \text{ lub } v \Vdash \psi\}$.

W ramach tych rozważań wprowadzamy też modalność (intuicjonistyczny odpowiednik konieczności):

$w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{N}_w \subseteq \{v \in W; v \Vdash \varphi\}$.

Okazuje się, że otrzymana semantyka odpowiada intuicjonistycznej logice modalnej z aksjomatami $K$ i $T$. Dowodzimy pełności bezpośrednio i pośrednio, tj. poprzez pokazanie równoważności naszych struktur z tymi, które zaprezentowane zostały uprzednio w pracy [1]. Dowodzimy własności skończonego modelu (poprzez filtrację) i tymczasowo wprowadzamy operator możliwości - w taki sposób, by obie modalności były niezależne, tj. wzajemnie niedefiniowalne (co pokazujemy na odpowiednich kontrprzykładach). Pokazujemy też translację pomiędzy $\mathbf{iKT}_\Box$ (lub rozszerzeniami tego systemu) a pewnymi systemami klasycznie modalnymi, wyposażonymi wszelako w dwa operatory konieczności. Dość istotnym fragmentem tego rozdziału jest technicznie złożone twierdzenie o warstwowej bisymulacji, będące adaptacją analogicznego twierdzenia z pracy [8], wszelako w środowisku modalnym (co wymaga zdiagnozowania kilku znamiennych niuansów).

(2) W części drugiej udaje się nam osiągnąć punktowo równoważne przejścia (co prawda za każdym razem tylko w jedną stronę) pomiędzy wariantami semantyk otoczeniowych i pewnymi modelami topologicznymi. W zasadzie są to nawet modele *multi-topologiczne*, co oznacza tutaj nie tyle "wiele topologii na jednym uniwersum", ile raczej "wiele uniwersów z własnymi topologiami". Nie osiągamy tu pełności, niemniej nasze modele są przystosowane do intuicjonistycznej logiki z aksjomatami $K$ i $T$, podobnie jak to bylo w rozdziale pierwszym.

(3) Część trzecia poświęcona jest słabym logikom modalnym, a przede wszystkim tak zwanym logikom *fałszywych wierzeń*. W ogólności logika fałszywych wierzeń opisuje sytuację następującą: formuła $\varphi$ jest fałszywa, ale mimo tego się w nią wierzy (por. [6]), tzn. wierzymy w nią my czy też podmiot, który nas interesuje. W każdym razie wiara ta obowiązuje w danym świecie możliwym. Koncept ów wyraża już sama definicja wymuszania formuły poprzedzonej operatorem modalnym $\mathsf{W}$. Mianowicie: jeżeli $w$ jest światem, to $w \Vdash \mathsf{W}\varphi \Leftrightarrow w \nVdash \varphi$ oraz $V(\varphi) \in \mathcal{N}_w$. Fakt, że $\varphi$ jest *błędnie* uważana za prawdziwą, wyrażono w drugiej części definicji poprzez to, że $V(\varphi)$ jest jednym z naszych otoczeń.

Omawiamy także inne możliwe interpretacje wprowadzonego operatora. Na przykład: odrzucamy $\varphi$ (w danym świecie), ale zarazem formuła ta jest nam narzucana bądź sugerowana przez swego rodzaju "radę nadzorczą" czy też doradczą. Innymi słowy, jesteśmy zachęcani do tego, by przyjąć $\varphi$, przynajmniej w aktualnym świecie, czego przejawem jest fakt, iż wśród naszych otoczeń jest m.in. kolekcja światów akceptujących $\varphi$.

Dowodzimy pełności kilku intuicjonistycznych systemów fałszywych wierzeń (dotychczas w literaturze badano jedynie klasyczne systemy tego rodzaju, tj. z prawem wyłączonego środka). Wskazujemy na pewne subtelności, które związane są właśnie z tym, że nasza logika jest intuicjonistyczna, a które związane są z modelem kanonicznym oraz z samą definicją operatora $\mathsf{W}$. Następnie omawiamy cztery inne operatory, które w pewien sposób oddają intuicję zachęcania lub zniechęcania do przyjęcia danej formuły. Jedna z tych modalności, mianowicie $\bullet$, odpowiada tzw. logice *nieznanych prawd.*

Później pokrótce omawiamy tzw. modele bi-otoczeniowe dla słabych logik modalnych opartych o intuicjonizm, przy czym ten podrozdział ma charakter przeglądowy i nie zawiera naszych wyników. Z drugiej strony, w końcówce części czwartej prezentujemy ogólny projekt połączenia semantyki otoczeniowej z logikami zdaniowymi wyposażonymi w operatory probabilistyczne.

(4) W części czwartej zaczynamy od krótkiego przeglądu istniejących w literaturze uogólnień lub modyfikacji pojęcia *topologii.* Przedstawiamy motywacje autorów i ich główne pomysły. Naszą uwagę ostatecznie koncentrujemy na koncepcji *generalized topological space*, wprowadzonej przez Császára w [2] i następnie badanej przez licznych matematyków.

**Definicja.** [2], [3] Załóżmy, że $W$ to dowolny zbiór niepusty (tzw. *uniwersum przestrzeni*), zaś $\mu \subseteq \mathcal{P}(W)$. Mówimy, że rodzina $\mu$ jest *uogólnioną topologią* (w sensie Császára) na $W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu$ jest domknięta na dowolne sumy, tzn. jeśli $J$ jest zbiorem indeksów (być może pustym) oraz dla każdego $i \in J$, $X_i \in \mu$, to $\bigcup_{i \in J} X_i \in \mu$.

Parę $\langle W, \mu \rangle$ nazywamy *uogólnioną przestrzenią topologiczną* (**GT**-przestrzenią). Jest ona:

- *silna* lub *supratopologiczna* wtedy, gdy $W \in \mu$.

- *topologiczna* (w zwykłym sensie), gdy jest silna oraz domknięta co najmniej na skończone przekroje, tzn. jeśli $X_1, X_2 \in \mu$, to $X_1 \cap X_2 \in \mu$.

Na początku budujemy modele oparte na silnej uogólnionej topologii i pokazujemy ich równoważność z pewną klasą modeli otoczeniowych, przez co pośrednio dowodzimy pełności naszych struktur względem logiki **MNT4**. Następnie uogólniamy naszą semantykę do poziomu tzw. **GT**$\mathcal{F}$-struktur:

**Definicja.** Definiujemy **GT**$\mathcal{F}$-strukturę jako trójkę $M_\mu = \langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$, w której $\mu$ to uogólniona topologia na $W$ (zatem $\langle W, \mu \rangle$ to **GT**-przestrzeń), zaś $\mathcal{F}$ to funkcja z $W$ w $P(P(\bigcup \mu)$ taka, że:

- Jeżeli $w \in \bigcup \mu$, to $[X \in \mathcal{F}_w \Leftrightarrow X \in \mu$ oraz $w \in X]$ [$\mathcal{F}_w$ to uproszczony zapis symbolu $\mathcal{F}(w)$].
- Jeżeli $w \in W \setminus \bigcup \mu$, to $[X \in \mathcal{F}_w \Rightarrow X \in \mu]$.

Jak widać, idea jest taka: punktom, które są poza *każdym* otoczeniem otwartym przypisujemy mimo wszystko (mniej lub bardziej arbitralnie) pewne rodziny otoczeń.

W odniesieniu do tych struktur osiągamy częściowe rezultaty, jeśli chodzi o aksjomatyzację. To, że są one częściowe, oznacza, że pełność odnosi się albo do pewnych podklas, albo do struktur różnych, choć w ogólnym zamyśle podobnych (mamy tu na myśli np. tzw. **GTf**-struktury). W szczególności **GT**$\mathcal{F}$-struktury, w których punktom spoza maksymalnego zbioru otwartego nie przypisuje się *żadnych* otoczeń przez funkcję $\mathcal{F}$ (tzn. przypisuje się im rodziny puste), odpowiadają logice **MT4** i można je interpretować w kontekście teorii światów niemożliwych (o ile zgodzimy się, by nasza topologia była domknięta na skończone przekroje, co pozwoli nam zaakceptować aksjomat $K$, ale nie regułę $RN$). Wprowadzamy też trzy warianty pojęcia bisymulacji, przy czym jedno z nich działa poprawnie wtedy, gdy odpowiednio zmienimy sposób rozumienia operatora modalnego. Przedstawiamy też (ale w sposób wstępny) subintuicjonistyczną interpretację naszych modeli.

W tej części pracy przedstawiamy też inne koncepcje: m.in. omawiamy topologie w *alternatywnych* uniwersach (takich jak zbiory intuicjonistyczne czy przestrzenie $n$-arne tudzież rozmaite klasy zbiorów rozmytych). Na bazie tych rozważań przedstawiamy zarys teorii zbiorów, które nazwaliśmy *negocjacyjnymi*, a które łączą w sobie dwa podejścia do wspomnianych zbiorów intuicjonistycznych. Omawiamy także tzw. logiki wiarygodności, których semantyką są topologie zredukowane.

(5) W części piątej przenosimy się do przestrzeni w pewnym sensie komplementarnych wobec wcześniejszych. Tym razem to przestrzenie infra-topologiczne: domknięte na skończone przekroje, ale niekoniecznie na jakiekolwiek sumy. W tym środowisku badamy podstawowe pojęcia, w szczególności zauważamy, że zbiór otwarty może mieć wnętrze, które nie jest otwarte. Budujemy także modele logiczne dostosowane do systemu z dwiema koniecznościami, jedną słabszą i jedną silniejszą.

(6) Część szóstą wypełniają dodatkowe rozważania na temat **GT**$\mathcal{F}$-struktur. Rozwijane i badane są (o czym wspominaliśmy już w niniejszym konspekcie) $\mathcal{F}$-odpowiedniki pojęć wnętrza i domknięcia, a także pewne typy funkcji ciągłych i ciągów uogólnionych.

Wspomniane odpowiedniki operacji topologicznych definiowane są jak poniżej:

**Definicja.** Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą. Załóżmy, że $w \in W$ oraz $A \subseteq W$. Powiemy, że $w \in \mathcal{F}Int(A) \Leftrightarrow$ istnieje $G \in \mathcal{F}_w$ że $G \subseteq A$.

Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą oraz $w \in W$. Załóżmy, że $A \subseteq W$. Powiemy, że $w \in \mathcal{F}Cl(A) \Leftrightarrow$ dla każdego $G \in \mathcal{F}_w, G \cap A \neq \emptyset$.

Następnie:

**Definicja.**

Załóżmy, że $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ jest **GT**$\mathcal{F}$-strukturą oraz $A \subseteq W$. Niech $\langle W, \mu, \mathcal{F} \rangle$ będzie **GT**$\mathcal{F}$-strukturą. Załóżmy, że $w \in W$. Definiujemy $\mathcal{E}_w$ jako zbiór wszystkich $\mathcal{F}$-otwartych zbiorów, do których należy $w$. Powiemy, że:

- $w \in \mathcal{E}Int(A) \Leftrightarrow$ istnieje $S \in \mathcal{E}_w$ taki że $S \subseteq A$.
- $w \in \mathcal{E}Cl(A) \Leftrightarrow$ dla każdego $S \in \mathcal{E}_w$, $S \cap A \neq \emptyset$.

Zbiór $A$ jest $\mathcal{E}$*-otwarty* ($\mathcal{E}$-o.) wtedy, gdy $\mathcal{E}Int(A) = A$, i jest $\mathcal{E}$*-domknięty* ($\mathcal{E}$-c.), jeżeli $\mathcal{E}Cl(A) = A$.

W odniesieniu do ciągów powiemy w ramach streszczenia, że zwykle bada się ciągi w ścisłym tego słowa znaczeniu (z dziedziną naturalną) oraz ciągi uogólnione (*nets*), gdzie dziedziną jest dowolny zbiór skierowany. My rozważamy także ciągi "podwójnie uogólnione", w których argumentami są elementy zbioru częściowo uporządkowanego.

## 8. Dalsze kierunki badań

Zakres pracy, z natury rzeczy ograniczony, rodzi pytanie o dalsze kierunki badań. Wymieńmy przynajmniej niektóre z nich:

- Dalsza analiza uogólnionych semantyk topologicznych: w szczególności badanie związków pomiędzy słabymi logikami modalnymi a konkretnymi przestrzeniami (konkretnymi, tj. takimi jak np. przestrzeń ko-singletonowa).
- Badanie (przy pomocy uogólnionej semantyki topologicznej) relacji pomiędzy pewnymi systemami subintuicjonistycznymi i odpowiadającymi im modalnymi.
- Budowa sub-intuicjonistycznych logik zdaniowych z modalnościami.
- Budowa sub-intuicjonistycznych logik zdaniowych z kwantyfikatorami zdaniowymi.
- Analiza związków pomiędzy uogólnionymi modelami topologicznymi a semantykami algebraicznymi.
- Wykorzystanie zarysowanej w pracy koncepcji zbiorów podwójnych modelujących negocjacje i kompromisy.
- Uporządkowanie przestrzeni multi-topologicznych (w taki sposób, by wzajemne relacje pomiędzy przestrzeniami topologicznymi generowały rezultaty ciekawe w sensie logicznym).

## 9. Publikacje przygotowane w związku z rozprawą

W latach 2014 - 2019 Autor napisał kilka prac w ramach badań nad zagadnieniami, które są przedmiotem przygotowywanej rozprawy. Obecnie (koniec września 2020) dwie prace mają status *opublikowanych*:

(1) T. Witczak, *Topological and multi-topological frames in the context of intuitionistic modal logic*, "Bulletin of the Section of Logic", Volume 48/3 (2019), pp. 1 - 19, DOI 10.18778/0138-0680.48.3.05.[1]

Materiał ten trafił do drugiego rozdziału rozprawy. Dotyczy semantyki multi-topologicznej dla modalnej logiki intuicjonistycznej z aksjomatami $K$ i $T$.

(2) T. Witczak, *Propositional logic with probability operators (based on general ideas of weak modal calculus)*, w: "Logic, Cognition, Games", seria *Studies in Logic* (vol. 83), College Publications 2020.

Ta książka to pokłosie konferencji "Poznań Reasoning Week 2018". Materiał zawarty w tym artykule jest rozwinięciem trzeciego rozdziału rozprawy: a właściwie zastosowaniem idei z tego rozdziału w kontekście logik z operatorami probabilistycznymi.

Jedna praca ma status *przyjętej do druku*:

[1] Pismo ma na liście ministerialnej 20 pkt.

(1) T. Witczak, *Generalized topologies with associating function and logical applications*. Praca ma się ukazać na łamach "Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica"[2].

Dwie prace zostały wysłane do czasopism i oczekują na recenzję, mianowicie:

(1) *Infra-topologies revisited: logic and clarification of basic notions.*
Wyniki z tego artykułu pojawiają się w piątym rozdziale pracy doktorskiej.
(2) *Generalized topological semantics for weak modal logics.*
Materiał z tej pracy został użyty w czwartym rozdziale rozprawy.

Inne artykuły są dostępne w serwisie arxiv.org:

(1) T. Witczak, *Intuitionistic modal logic based on neighborhood semantics without superset axiom*, `https://arxiv.org/pdf/1707.03859`.
Praca ma dwa cytowania (według ResearchGate) i zawiera w większości materiał z pierwszego rozdziału naszej rozprawy.
(2) T. Witczak, *Simple example of weak modal logic based on intuitionistic core*, `https://arxiv.org/pdf/1806.09443`.
Praca tematycznie zbliżona jest do rozdziału trzeciego i ma jedno cytowanie (według Semantic Scholar).
(3) T. Witczak, *Generalized topological spaces with associating function*, `https://arxiv.org/pdf/1909.00460`.
Do tego artykułu nawiązujemy w szóstym rozdziale rozprawy.

Wypada nadmienić, że choć rozprawa bazuje na wspomnianych wyżej pracach, to jednak rozwija materiał w nich zawarty (o dodatkowe definicje i twierdzenia, nie mówiąc o różnego rodzaju poprawkach i ulepszeniach). Wyniki autora były prezentowane na konferencjach naukowych i referowane podczas seminariów Zakładu Logiki Matematycznej Instytutu Matematyki WMFiCh UŚ.

W ostatniej sekcji niniejszego konspektu wymieniamy *wybrane* pozycje bibliograficzne (innych autorów). Faktyczna bibliografia jest znacznie szersza, obejmuje m.in. kilkanaście prac z dziedziny uogólnionych przestrzeni topologicznych; tu ograniczamy się jedynie do prac bezpośrednio cytowanych wyżej oraz kilku innych, które uznaliśmy za istotne dla tematyki (jak np. książka E. Pacuit o semantyce otoczeniowej).

## Literatura


[1] M. Božic, K. Došen, *Models for normal intuitionistic modal logics*, Studia Logica XLIII (1984).
[2] Á. Császár, *Generalized topology, generalized continuity*, Acta Math. Hungar., 96(4) (2002), 351 - 357.
[3] Á. Császár, *Generalized open sets in generalized topologies*, Acta Math. Hungar., 106 (2005), 53-66.
[4] T. Dalmonte, Ch. Grellois, N. Olivetti, *Towards intuitionistic non-normal modal logic and its calculi*, `https://members.loria.fr/DGalmiche/files/=papers/EICNCL2018/EICNCL2018\_paper\_3.pdf`.
[5] T. Dalmonte, Ch. Grellois, N. Olivetti, *Intuitionistic Non-Normal Modal Logics: A General Framework*, `https://arxiv.org/pdf/1901.09812.pdf`
[6] D. R. Gilbert, G. Venturi, *Neighborhood semantics for logics of unknown truths and false beliefs*, The Australasian Journal of Logic, vol. 14, no 1 (2017).
[7] J. Järvinen, M. Kondo, J. Kortelainen, *Logics from Galois connections*, Internat. J. Approx. Reason., vol. 49, Issue 3, November 2008, pages 595 - 606.
[8] M. Moniri, F. S. Maleki, *Neighborhood semantics for basic and intuitionistic logic*, Logic and Logical Philosophy, Volume 23 (2015), 339-355.


[2]Pismo ma na liście ministerialnej 20 pkt. W chwili składania wniosku, nowy numer jeszcze się nie ukazał, por. `http://acutm.math.ut.ee/index.php/acutm`.

[9] E. Pacuit, *Neighborhood Semantics for Modal Logic*, Springer International Publishing AG 2017.
[10] A. Palmigiano, S. Sourabh, Z. Zhao, *Sahlqvist theory for impossible worlds*, `https://arxiv.org/pdf/1603.08202.pdf`
[11] A. Simpson, *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*, PhD Thesis at the University of Edinburgh (1994), homepages.inf.ed.ac.uk/als/Research/thesis.pdf.
[12] H. Soldano, *A modal view on abstract learning and reasoning*, Ninth Symposium on Abstraction, Reformulation, and Approximation, SARA 2011, `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.189.2748&rep=rep1&type=pdf`
[13] V. H. Sotirov, *Modal theories with intuitionistic logic*, w: *Proceedings of the Conference on Mathematical Logic*, Sofia 1980, p. 139 - 171. Bulgarian Academy of Sciences, 1984.
[14] A. Visser, *Uniform interpolation and layered bisimulation*, Lecture Notes in Logic, volume 6, 1996, 139 - 164.

Institute of Mathematics, University of Silesia, Bankowa 14, 40-007 Katowice, Poland

*Email address*: `tm.witczak@gmail.com`