Prof. zw. dr hab. Taras Banakh
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

Lviv, 16 lutego 2021 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Judyty Bąk
O pewnych własnościach baz oraz π-baz przestrzeni topologicznych
Promotor: prof. dr hab. Andrzej Kucharski

W rozprawie doktorskiej Judyty Bąk rozważono topologiczne aspekty własności Freese–Nation oraz różnych jej modyfikacji. Owa własność powstaje w sposób naturalny w logice, jako możliwość aproksymacji tautologicznej implikacji $\varphi \to \psi$ przez implikacje $\varphi \to \chi$ i $\chi \to \psi$, w których formula χ ma wspólne zmienne wolne z φ oraz ψ. Początkowo własność Freese–Nation wprowadzono w teorii algebr Boole'a, jako własność finitarnej aproksymacji elementów algebry Boole'a, przy której zachowują się własności porządkowe algebry. Nazwa tej własności pochodzi od nazwisk Freese i Nation, którzy w roku 1978 wprowadzili ją dla charakteryzacji projektywnych algebr Boole'a. Od tego czasu własność Freese–Nation dość regularnie pojawia się w artykułach z logiki, teorii algebr Boole'a i topologii ogólnej. Wyszukiwarka Google pokazuje 1130 zródeł, w których pojawia sie termin "Freese–Nation property". Własnością tą zajmowali się tacy wybitni matematycy jak Saharon Shelah, Sabine Koppelberg, Sakae Fuchino, Lutz Heindorf, Leonid Shapiro i wielu innych.

Przez algebry zbiorów regularnie otwartych własność Freese–Nation wkroczyła do topologii ogólnej. W 1994 roku Heindorf i Shapiro przetłumaczyli własność Freese–Nation w języku topologii i powiązali ją z takimi ważnymi pojęciami topologii ogólnej jak przestrzenie κ-metryzowalne czy otwarcie generowane. Dwie ostatnie własności zostały wprowadzone i zbadane przez Eugeni Szczepina w latach 70-tych ubiegłego wieku.

Rozprawa doktorska Judyty Bąk znajduje się w tym właśnie nurcie: badanie aspektów topologicznych własności Freese–Nation i jej modyfikacji. Ważnym walorem rozprawy Judyty Bąk jest odkrycie powiązań własności Freese–Nation z nowymi klasami przestrzeni topologicznych, które pojawiły się w topologii ogólnej całkiem niedawno. Mam tutaj na myśli klasę przestrzeni szkieletowo generowanych (badane w rozprawie habilitacyjnej prof. A. Kucharskiego) i klasę przestrzeni reprezentowanych przez dziedziny (takie przestrzenie odkryte zostały przez amerykańskich matematyków Fleissnera i Yengulalp).

Zawartość pracy: Praca składa się z sześciu rozdziałów. Pierwszy rozdział zawiera wiadomości wstępne. W drugim wprowadzono własność Freese–Nation i jej modyfikacje: separatywną i interpolacyjną własność Freese–Nation oraz ich topologiczne odpowiedniki dla baz i π-baz. W drugim rozdziale podano różne przykłady dotyczące tych własności oraz warunki dla bazy, przy których własność Freese–Nation jest równoważna jej separatawnej czy interpolacyjnej modyfikacji. Drugi rozdział zawiera także nowe wyniki dotyczące zachowania własności Freese–Nation dla produktów. Ciekawym nowym wynikiem jest Twierdzenie 2.3 o związku separatywnej własności Freese–Nation z przeliczalnością liczby Suslina. Z drugiej strony dla własności Freese–Nation nie ma takiego ograniczenia, ponieważ każda przestrzeń metryzowalna ma własność Freese–Nation, co udowodniono w Twierdzeniu 2.5.

W rozdziale 3 analizowany jest związek własności Freese–Nation z przestrzeniami otwarcie generowanymi oraz szkieletowo generowanymi. Dla przestrzeni otwarcie generowanych związek ten był już chyba wcześniej odkryty przez Heindorfa i Shapiro (w języku algebr Boole'a) i w rozprawie podano alternatywne topologiczne dowody. Z drugiej strony nowymi wynikami rozdziału 3 są Twierdzenia 3.3, 3.4, 3.6 o związku własności Freese–Nation dla π-baz z przestrzeniami szkieletowo generowanymi i pewnymi grami topologicznymi.

W rozdziale czwartym podano przykłady baz nie mających własności Freese–Nation. Jednym z głównych wyników tego rozdziału jest Twierdzenie 4.3 (i 4.2) mówiące, że rodzina wszystkich zbiorów regularnie otwartych przestrzeni regularnej nieskończonej nie ma (separatywnej) własności Freese–Nation.

W piątym rozdziale badano związek własności Freese–Nation z koabsolutnością i przestrzeniami Gleasona. W Twierdzeniu 5.3 udowodniono, że separatywna własność Freese–Nation dla π-baz zachowuje się w relacji koabsolutności. Innym ważnym (i technicznie złożonym) wynikiem rodziału 5 jest Twierdzenie 5.8 o posiadaniu separatywnej własności Freese–Nation dla π-baz przestrzeni szkieletowo Dugudji'ego.

W ostatnim rozdziale rozprawy zajmowano się przestrzeniami topologicznymi, które są reprezentowane lub π-reprezentowane przez dziedziny. Pojęcie reprezentowalności przez dziedzinę wprowadzone zostało przez Fleissnera i Yengulalp w 2013, czyli całkiem niedawno. Głównymi wynikami tego rozdziału są Przykład 6.1 przestrzeni topologicznej, która jest przeliczalnie reprezentowana przez dziedzinę, ale nie jest π-reprezentowana przez dziedzinę oraz Twierdzenie 6.3 o charakteryzacji przestrzeni Choqueta (czyli przestrzeni w której drugi gracz ma strategię wygrywająca w grze Choqueta) jako przestrzeni przeliczalnie reprezentowanych przez dziedzinę w sensie Fleissner–Yengulalp.

Uwagi krytyczne i ocena pracy: Praca sprawia dobre wrażenie, zawiera sporo nowych wyników oraz nowych topologicznych dowodów wyników już znanych (dotyczy to głównie przestrzeni otwarcie generowanych oraz Dugundji'ego).

Z drugiej strony, zbyt mało dla mnie jest tutaj informacji historycznej i motywacyjnej. Czytając rozprawę nie mogłem zrozumieć dlaczego własność Freese–Nation jest ważna dla topologii. Sprawa wyjaśniła się dopiero po przeczytaniu odpowiedniej literatury, w szczególności artykułu Davida Milovicha (który nie jest cytowany w bibliografii, a warto by było). Mam więc wrażenie ze Judyta Bąk nie podeszła krytycznie do tematu, a robiła to, co powiedział promotor.

Dużo miejsca w pracy zajmują dowody znanych już rzeczy. Dotyczy to przestrzeni otwarcie generowanych, ciągów odwrotnych etc. Z drugiej strony takie podejście czyni rozprawę samowystarczalną i ułatwia rozumienie dowodów. To czego zdecydowanie nie trzeba było robić, to jeszcze raz udowadniać klasycznego twierdzenie Stone'a o parazwartości przestrzeni metrycznych. Autorka uzasadnia zamieszczenie takiego dowodu tym, że dodatkowy warunek nie wynika z klasycznego sformułowania, co nie jest prawda - wystarczy wziąć dowolne lokalnie (czy nawet punktowo) skończone pokrycie i zostawić w nim tylko elementy maksymalne w sensie inkluzji.

Czasem brakuje w tekście definicji. Na przykład, przy wprowadzeniu przestrzeni Stone'a na stronie 8 przydałaby się definicja ultrafiltra w algebrze Boole'a.

W definicji bazy odwzorowania na stronie 69 trzeba byłoby dodać, że zbiory są funkcyjnie otwarte w przestrzeni X.

Przy dyskusji o relacji $\sim_{\mathcal{P}}$ dobrze byłoby zauważyć, że relacja ta jest generowana odwzorowaniem w potęgę przestrzeni Sierpińskiego (czyli dwupunktowej przestrzeni $\{0, 1\}$ z topologią $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$).

Pojawiają się też formalne usterki w dowodach. Na przykład, uzasadnienie Wniosku 5.2 brzmi tak: "Ponieważ przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego gęstego jest zbiorem nigdziegęstym, to z powyższego lematu wyciagnąć możemy następujący wniosek". Zupełnie nie widać tutaj dlaczego przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego gęstego jest zbiorem nigdziegęstym; wręcz przeciwnie: taki przeciwobraz jest zawsze otwarty.

Lemat 3.8 jest sformułowany dla rodzin przeliczalnych $\mathcal{P}$, a stosowany w dowodzie Lematu 3.9 dla rodzin nieprzeliczalnych. To znaczy, że Lemat 3.8 należało sformułować ogólniej dla dowolnych (nie tylko przeliczalnych) rodzin $\mathcal{P}$ i w przypadku rodziny przeliczalnej udowodnić dodatkową własność, mianowicie metryzowalność i ośrodkowość przestrzeni ilorazowej $X/\mathcal{P}$.

Konkluzja: Wspomniane uwagi, zarówno te o charakterze merytorycznym, jak i redakcyjnym, nie mają istotnego wpływu na ostateczną pozytywną ocenę pracy i nie umniejszają faktu, że **rozprawa doktorska mgr Judyty Bąk wnosi znaczący wkład w rozwój nauk matematycznych.**

Tym samym uznaję, iż przedłożona rozprawa spełnia wymagania zdefiniowane w artykule 13 Ustawy z dnia 14 maja 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki i **wnoszę o dopuszczenie mgr Judyty Bąk do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**